Matriser

En $m \times n$-matris A har följande form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Vi skriver också $A = (a_{ij})_{m \times n}$. $m \times n$ kallas för A:s storlek.

Exempel 1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3×2, 1×3, (radmatris) 2×1 (kolumnmatris)

Två matriser A, B av samma storlek stämmer överens, $A = B$, om deras element stämmer överens.

Matrisoperationer

(1) Summa och differens. Matriser *med samma storlek* adderas och subtraheras elementvis.

Exempel 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observera att $A \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inte är definerad!

(2) Multiplikation med en skalär. En matris A multipliceras med en skalär (= ett tal) c genom att multiplicera varje element i A med c.

Exempel 2 (forts)

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) Matrismultiplikation. Låt A vara en $m \times r$-matris och B en $r \times n$-matris. Produkten $C = AB$ är $m \times n$-matrisen med elementen

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}.$$

Schematiskt:

$$\text{rad } i \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & b_{2j} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & b_{rj} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{kolumn } j \end{array}$$

Tumregel:

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & = & C \\ m \times \underbrace{r \quad r} \times n & & m \times n \end{array}$$

Exemple 2 (forts) $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
D \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ \hline 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{array} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$A \cdot D$ är inte definierad!

Exempel 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = (5) = 5$$

$$1 \times \underbrace{2 \qquad 2} \times 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \underbrace{1 \qquad 1} \times 2$$

OBS: Detta exempel visar att $AB = BA$ inte gäller för alla matriser A, B.

I exemplet har de inte ens samma storlek!

Transponerade matriser

Låt A vara en $m \times n$-matris,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den transponerade matrisen A^T till A är $n \times m$-matrisen

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Anmärkning: $A = (a_{ij})_{m \times n} \Longrightarrow A^T = (a_{ji})_{n \times m}$, d.v.s. rader blir kolumner och tvärtom.

Exempel 2 (forts) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Egenskaper för transponerade matriser:

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
$(cA)^T = cA^T$ för varje tal c

(3) $(AB)^T = B^T A^T$

THEOREM 1.4.1 Properties of Matrix Arithmetic

Assuming that the sizes of the matrices are such that the indicated operations can be performed, the following rules of matrix arithmetic are valid.

(*a*) $A + B = B + A$ **(Commutative law for addition)**

(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **(Associative law for addition)**

(*c*) $A(BC) = (AB)C$ **(Associative law for multiplication)**

(*d*) $A(B + C) = AB + AC$ **(Left distributive law)**

(*e*) $(B + C)A = BA + CA$ **(Right distributive law)**

(*f*) $A(B - C) = AB - AC$

(*g*) $(B - C)A = BA - CA$

(*h*) $a(B + C) = aB + aC$

(*i*) $a(B - C) = aB - aC$

(*j*) $(a + b)C = aC + bC$

(*k*) $(a - b)C = aC - bC$

(*l*) $a(bC) = (ab)C$

(*m*) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Räknelagar för matriser

Många räknelagar för vanliga tal gäller även för matriser (Anton/Rorres Theorem 1.4.1). Det är viktigt att veta vilka lagar inte gäller. Observera följande undantag:

(1) **Matrismultiplikation är inte kommutativ!** Även om AB och BA är båda definierade och har samma storlek så gäller dock i allmänheten

$$AB \neq BA$$

Motexempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) **Man kan inte förenkla!**

$$AB = AC \text{ implicerar inte alltid } B = C$$

Motexempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 17 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Senare ska vi behandla ett viktigt fall där man får förkorta.)

(3) **Produkten av två matriser kan ge nollmatrisen utan att någon av matriserna är nollmatrisen.**

$$AB = 0 \not\Longrightarrow A = 0 \text{ eller } B = 0$$

Motexempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverterbara matriser

Matrisen

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{pmatrix}}\right\} n$$

kallas för enhetsmatrisen av storlek $n \times n$. Observera att det gäller $I_m A = A = A I_n$ för varje $m \times n$-matris A.

Definition: En $n \times n$-matris A sägs vara inverterbar om det finns en $n \times n$-matris B sådan att

$$AB = I_n = BA.$$

I så fall kallas B inversen till A och betecknas A^{-1}.

Inverterbara matriser kallas också reguljära, icke-inverterbara matriser singulära.

Anmärkning: Om inversen till en matris finns, så är den unik.

Bevis: Antag att B, B' är inverser till A. Då gäller

$$B' = B'(AB) = (B'A)B = B \qquad \square$$

Exempel 4

a) Enhetsmatrisen I_n är inverterbar med $I_n^{-1} = I_n$

b) Nollmatrisen är inte inverterbar, eftersom $0_n \cdot B = 0_n$ för alla $n \times n$-matriser B.

Anmärkning: Om A är inverterbar, så är också A^{-1} inverterbar och det gäller

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Nu kan vi ange det fall i vilket man får förenkla.

Sats: Om A är inverterbar, så gäller

$$(1)\quad AB = AC \Longrightarrow B = C,$$

$$(2)\quad BA = CA \Longrightarrow B = C.$$

Bevis av (1):

$$\begin{aligned} AB = AC \quad &\Longrightarrow \quad A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Longrightarrow \quad (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Longrightarrow \quad B = C \qquad \square \end{aligned}$$

Formel för inversen till en 2×2-matris:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$.
I detta fall gäller

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Viktiga egenskaper:

(1) Om A, B är inverterbara, då är även AB inverterbar med
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(2) Om A är inverterbar, då är även A^T inverterbar med
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Bevis

a) $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_{=I_n})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n})B = B^{-1}B = I_n$

b) $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n,$

$(A^{-1})^T \cdot A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$

Exemppel 5 Bestäm A om $(I_2 + 2A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
&(I_2 + 2A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&\implies \quad I_2 + 2A^T = \frac{1}{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 4}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \\
&\implies \quad 2A^T = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \\
&\implies \quad A^T = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{pmatrix} \\
&\implies \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{6}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exempel 6 Ange om följande påståenden gäller för alla $n \times n$-matriser eller inte. Ge ett motexempel om ett påstående inte gäller.

a) Om $A = 0_n$, så $A^2 = 0_n$.

b) Om $A^2 = 0_n$, så $A = 0_n$.

c) Om A och B är inverterbara, då är $A + B$ inverterbar.

d) Om A och B är inverterbara, då är BA^T inverterbar.

Lösning:

a) Ja.

b) Nej. Motexempel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är inte nollmatrisen, men A^2.

c) Nej. Motexempel: $A = I_2$, $B = -I_2$ är inverterbara, men $A + B$ är nollmatrisen som inte är inverterbar.

d) Ja, inversen är $(A^{-1})^T B^{-1}$

Beräkning av inversen med Gauss-Jordan elimination:

(1) **Sats:** En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om dess RTSF är enhetsmatrisen.

(2) **Beräkning av A^{-1}:**

- Börja med $(A \mid I_n)$
- Tillämpa Gauss-Jordan elimination för att transformera A på RTSF. Tillämpa samma operationer på höger sidan. Om A är inverterbar slutar proceduren med $(I_n \mid A^{-1})$.

(3) **Anmärkning:** Om proceduren slutar med en annan RTSF på vänster sidan är A inte inverterbar.

Exempel 7 Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{(-2)\cdot rad1 \\ adderad\ \ till\ \ rad2, \\ (-1)\cdot rad1 \\ adderad\ \ till\ \ rad3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{2\cdot rad2 \\ adderad\ \ till\ \ rad3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{(-1)\cdot rad3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{3\cdot rad3 \\ adderad \ \ till \ \ rad2, \\ (-3)\cdot rad3 \\ adderad \ \ till \ \ rad1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(-2)\cdot rad2 \\ adderad \ \ till \ \ rad1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 8 Låt $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lös matrisekvationen $XA - X = B$ m.a.p. X.

Lösning: $XA - X = B \iff X(A - I_2) = B$.

Eftersom $A - I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ är inverterbar med

$$(A - I_2)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3}_{=1}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

får vi

$$X = B(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriser och linjära ekvationssystem

Varje ekvationssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kan också skrivas i matrisform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m \times 1}.$$

Kort: $\boxed{Ax = b}$

Här betraktas x som en obekant kolumnmatris.

Sats 1: Ett linjärt ekvationssystem har inga lösningar, en unik lösning eller oändligt många lösningar.

Bevis: Antag att vi redan har hittat två lösningar $x_1 \neq x_2$. Vi visar att i det fallet finns det oändligt många lösningar: Sätt

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

med $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Det är oändligt många!
- Var och en löser systemet ty

$$\begin{aligned} Ax_\lambda &= A\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) = \lambda(Ax_1) + (1-\lambda)(Ax_2) \\ &= \lambda b + (1-\lambda) b = b \qquad \square \end{aligned}$$

Sats 2: Lå A vara en inverterbar $n \times n$-matris. Då har systemet $Ax = b$ den unika lösningen $A^{-1}b$.

Bevis: Om x är en lösning gäller

$$x = (AA^1)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Tvärtom löser $A^{-1}b$ uppenbarligen systemet. $\square$

Exempel 9 Det linjära ekvationssystemet

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{cases}$$

kan skrivas som

$$(2) \qquad Ax = b$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Uppgiften att lösa systemet (1) motsvarar alltså uppgiften att lösa matrisekvationen (2) m.a.p. den okända 3×1-matrisen x.

I Exempel 7 har vi redan bestämt As invers $\Longrightarrow$ Systemet har den unika lösningen

$$x = A^{-1}b \overset{\substack{\text{sätt i } A^{-1} \\ \text{och } b}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinanter

Vi betraktar nu determinantfunktionen som till varje kvadratisk matris A associerar ett reellt tal $\det(A)$.

För $n \times n$-matriser med $n \leq 3$ är determinanten given genom följande formler:

(1) $n = 1$:

$$\det(a) = a$$

(2) $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

(3) $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Anmärkning: Det finns ingen enkel formel för större n!

I **(3)** gäller

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix} \\ &\quad + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix} \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})\end{aligned}$$

där A_{ij} betecknar den delmatrisen av A man får genom att stryka rad i och kolumn j.

Talen $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ kallas för kofaktorer till A.

Med denna notation kan vi skriva

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Vi har härlett ett samband mellan determinanter av 3×3- och 2×2-matriser. Ett likandant samband gäller i det allmäna fallet.

Sats (Kofaktorutveckling): Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(1) För varje i mellan 1 och n gäller

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(utveckling längs rad i).

(2) För varje j mellan 1 och n gäller

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(utveckling längs kolumn j).

Följd: $\det(A^T) = \det(A)$.

Anmärkning Observera att tecknen framför underdeterminanterna fördelas enligt

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & \dots \\ + & - & \dots & \\ - & \dots & & \end{pmatrix}$$

Exempel 10

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{utveckling längs} \\ \text{kolumn 2}}}{=} \quad 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \quad (-2)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

Exempel 11 Om A har en rad (eller en kolumn) som består bara av nollor, så är $\det(A) = 0$.

Exempel 12 För övertriangulära matriser A, d.v.s. matriser av formen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

gäller

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Resultatet följer genom stegvis utveckling längs första kolumnen. Exempelvis för $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \det(a_{33}) \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} \end{aligned}$$

Beräkning av determinanter med rad- och kolumnoperationer

Följande sats visar hur determinanten förändras om man genomför elementära radoperationer:

Sats:

(1) Byter man två rader så ändrar determinanten tecknet.

(2) Adderar man en multipel av en rad till en annan rad så ändras determinanten inte.

(3) Multiplicerar man en rad med ett tal c så multipliceras också determinanten med c.

Motsvarande regler gäller även för elementära kolumnoperationer.

Exempel 13 Antag att $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -6.$

Bestäm

$$\det\begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a & b & c \\ g-a & h-b & i-c \end{pmatrix}.$$

Lösning

$$\det\begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a & b & c \\ g-a & h-b & i-c \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}\text{ rad } 1}{=} 2\det\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g-a & h-b & i-c \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{rad } 1 \leftrightarrow \text{rad } 2}{=} -2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{addera rad } 1\\ \text{till rad } 2}}{=} -2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (-2)(-6) = 12$$

Exempel 14

a) Om en matris A har två rader (eller två kolumner) som är multipler av varandra så gäller $\det(A) = 0$.

b) $\det \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 1 & a+1 \\ a & 2 & a+2 \end{pmatrix} = 0$ för alla a.

Recept för att beräkna $\det(A)$:

Använd elementära radoperationer för att överföra A till en övertriangulär matris Δ. Håll koll på hur determinanten påverkas! Slutligen kan $\det(\Delta)$ beräknas som produkt av alla element på Δ:s diagonal.

Vi har redan sett:

$$\begin{aligned} A \text{ inverterbar} &\iff \text{RTSF av } A \text{ är enhetsmatrisen} \\ &\iff \det(A) \neq 0. \end{aligned}$$

Alltså:

Sats: A inverterbar $\iff \det(A) \neq 0$.

Exempel 15 Beräkna $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rad } 1 \leftrightarrow \text{rad } 2}{=} -\det \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}\text{ rad } 1}{=} \quad -3\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{addera (-2) rad 1} \\ \text{till rad 3}}}{=} \quad -3\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{addera (-10) rad 2} \\ \text{till rad 3}}}{=} \quad -3\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{pmatrix}$$

$$= \quad -3\big(1 \cdot 1 \cdot (-55)\big) \quad = \quad 165$$

Egenskaper av determinanter

Kom ihåg att $\det(A^T) = \det(A)$. Vidare gäller:

(1) $\det(cA) = c^n \det(A)$ om A är en $n \times n$-matris och c är ett reellt tal.

(2) (Multiplikationssatsen) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3) Om A är inverterbar så gäller

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Anmärkning: I allmänheten $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. T.ex. får vi för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

att $\det(A + B) = \det(I_2) = 1 \neq 0 = \det(A) + \det(B)$.

Exempel 16 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna $\det(3A^2)$.

b) Bestäm $\det(A^{-4})$ om A är inverterbar.

Lösning

$$\det(A) \overset{\substack{\text{addera rad 1} \\ \text{till rad 3}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{addera (-1) rad 2} \\ \text{till rad 3}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

Eftersom $\det(A) \neq 0$ är A inverterbar.

a) $\det(3A^2) \overset{(1)}{=} 3^3 \det(A^2) \overset{(2)}{=} 3^3 \big(\det(A)\big)^2 = 3^3 \cdot 2^2 = 108.$

b) $A^{-4} = (A^{-1})^4.$

$\Longrightarrow \det(A^{-4}) \overset{(2)}{=} \big(\det(A^{-1})\big)^4 \overset{(3)}{=} \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$