Linjära avbildningar

Låt $\mathbb{R}^n$ vara mängden av alla vektorer med n komponenter, d.v.s.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi räknar med vektorer $\vec{x}$, $\vec{y}$ likandant som i planet och i rymden.

- vektorsumma:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{för } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

- produkt av en vektor med en skalär:

$$k\vec{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} \quad \text{för } k \in \mathbb{R} \text{ och } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

- skalärprodukt:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

- norm:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \\ &= \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} \end{aligned}$$

Två vektorer kallas för ortogonala om $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$.

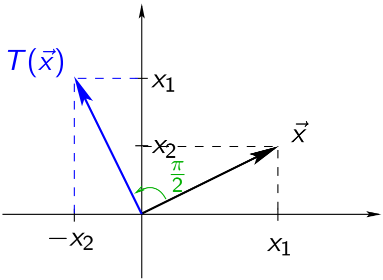
En avbildning T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som avbildar varje $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ på ett element $T(\vec{x})$ i $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto T(\vec{x}) \end{aligned}$$

En avbildning kan vara given genom

- en beskrivning av hur T verkar på $\vec{x}$
- en formel för $T(\vec{x})$
- ekvationer som ger sambandet mellan komponenterna av $\vec{x}$ och $T(\vec{x})$

Exempel 1 Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den avbildning som roterar varje vektor med 90° moturs.



Då beskrivs T genom följande formel:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

eller genom ekvationerna

$$\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Exempel 2

a) Ekvationerna
$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & x_1 + x_2 \\ w_2 & = & x_1 x_2 \\ w_3 & = & x_1 - x_2 \end{array}$$
definierar en avbildning $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som avbildar varje $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. Man skriver
$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

b) Ekvationerna
$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & x_1 + x_2 \\ w_2 & = & 2x_2 \\ w_3 & = & x_1 - x_2 \end{array}$$
ger $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Observera att $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Låt A vara en $m \times n$-matris. Matrisen kan användas för att definiera en avbildning $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genom att sätta

$$T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

Exempel Enhetsmatrisen I_n definierar identitetsavbildningen $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som avbildar varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ på sig själv,

$$I(\vec{x}) = I_n \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Exempel Nollmatrisen av storlek $m \times n$ definierar nollavbildningen $0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som avbildar varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ på nollvektorn i $\mathbb{R}^m$,

$$0(\vec{x}) = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m.$$

En avbildning T kallas för linjär om man kan uttrycka $T(\vec{x})$ genom matrismultiplikation med en lämplig matris $[T]$:

$$T(\vec{x}) = [T] \cdot \vec{x}$$

för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

I så fall kallas $[T]$ för standardmatrisen till T.

Exempel 1 (forts.) T är linjär eftersom

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

och $[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är standardmatrisen till T.

Exempel 2 (forts.) T_2 är linjär med $[T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exempel 3 Vilka av följande avbildningar är linjära? Ge ett argument!

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad T_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

Lösning $T_1,\ T_3$ är linjära eftersom

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Hur är det med T_2?

Observation: En linjär avbildning T uppfyller

$$\text{(1)}\quad T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}),$$

$$\text{(2)}\quad T(k\vec{x}) = k \cdot T(\vec{x})$$

för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ och alla tal $k \in \mathbb{R}$. Det är anmärkningsvärd att omvändningen också gäller:

Sats: En avbildning T är linjär om och endast om den uppfyller båda (1) och (2).

Följd: T linjär $\Longrightarrow T(\vec{0}) = \vec{0}$.
Bevis: $T(\vec{0}) = T(\vec{0}-\vec{0}) = T(\vec{0}) - T(\vec{0}) = \vec{0}$ $\square$

Exempel Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppfyller (2) så gäller $f(x) = a \cdot x$ med ett lämpligt tal a ty

$$f(x) = f(x \cdot 1) \overset{(2)}{=} x \cdot \underbrace{f(1)}_{=:a}$$

Exemple 3 (forts.) T_2 är inte linjär eftersom

$$T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel 2 (forts.) T_1 är inte linjär eftersom

$$T_1\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) = T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

men

$$T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Problemet är termen $x_1 \cdot x_2$!)

Exempel 4

Avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ där $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$ är linjär med

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel 5

a) Låt T vara en linjär avbildning med $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ och $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\end{pmatrix}$. Bestäm $T\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Lösning Observera att $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Eftersom T är linjär får vi

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} &= T\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= 2T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-3)T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Givna är standardenhetsvektorerna $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Låt T vara en linjär avbildning med $T\vec{v}_1 = \vec{w}_1$ och $T\vec{v}_2 = \vec{w}_2$. Bestäm $T\vec{e}_1$ och $T\vec{e}_2$.

Lösning För att skriva båda $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ som en linjär kombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ löser vi det linjära ekvatiossystemet

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{b}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_1 - \lambda_2 & = & b_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & b_2 \end{array} \right.$$

för en allmän höger sida $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Gausseliminationen ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & b_1 \\ 1 & 3 & b_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_2 \\ 2 & -1 & b_1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_2 \\ 0 & -7 & b_1 - 2b_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}(b_1 - 2b_2) \end{array}\right),$$

alltså $\lambda_1 = \frac{1}{7}(3b_1 + b_2)$, $\lambda_2 = -\frac{1}{7}(b_1 - 2b_2)$. Som resultat får vi för standardenhetsvektorerna som högra sidor

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \tfrac{3}{7}\vec{v}_1 - \tfrac{1}{7}\vec{v}_2 \qquad (b_1 = 1, b_2 = 0), \\ \vec{e}_2 &= \tfrac{1}{7}\vec{v}_1 + \tfrac{2}{7}\vec{v}_2 \qquad (b_1 = 0, b_2 = 1). \end{aligned}$$

Eftersom T är linjär får vi

$$\begin{aligned}
T\vec{e}_1 &= T\left(\tfrac{3}{7}\vec{v}_1 - \tfrac{1}{7}\vec{v}_2\right) = \tfrac{3}{7}T(\vec{v}_1) - \tfrac{1}{7}T(\vec{v}_2) = \tfrac{3}{7}\vec{w}_1 - \tfrac{1}{7}\vec{w}_2 \\
&= \tfrac{3}{7}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix} \\
T\vec{e}_2 &= T\left(\tfrac{1}{7}\vec{v}_1 + \tfrac{2}{7}\vec{v}_2\right) = \tfrac{1}{7}T(\vec{v}_1) + \tfrac{2}{7}T(\vec{v}_2) = \tfrac{1}{7}\vec{w}_1 + \tfrac{2}{7}\vec{w}_2 \\
&= \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \tfrac{2}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observera att vi har visat följande formel för T:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\tfrac{2}{7}x_1 - \tfrac{3}{7}x_2\\ -\tfrac{5}{7}x_1 + \tfrac{3}{7}x_2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Hur hittar man standardmatrisen $[T]$ till en given linjär avbildning T?

Betrakta fallet $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Först observerar vi att varje vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad T(\vec{x}) &= T\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) \\
&\overset{T \text{ linjär}}{=} xT(\vec{\imath}) + yT(\vec{\jmath}) + zT(\vec{k}) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} T(\vec{\imath}) & T(\vec{\jmath}) & T(\vec{k}) \end{pmatrix}}_{\text{standardmatrisen till } T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sats: Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning är standardmatrisen till T given genom

$$[T] = \begin{pmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

där $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ betecknar standardenhetsvektorerna, d.v.s.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observera att $[T]$ är en $m \times n$-matris.

Exempel 6

a) Hitta standardmatrisen till den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestäm $T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösning

a) $[T] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $$T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = T\Big(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \Big) = -T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2)$$

$$= -\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exempel 5 (forts.) Hitta standardmatriserna till avbildningarna i Exempel 5!

a) $[T] = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

Observera att $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $[T] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exempel 7 Låt T vara en linjär avbildning med

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}.$$

Ange $[T]$.

Lösning

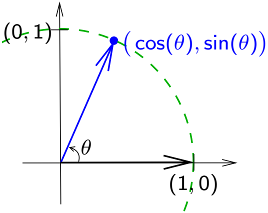
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Longrightarrow T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

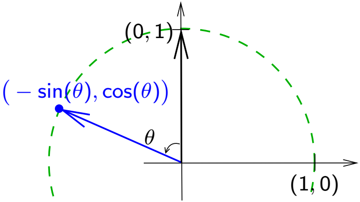
$$\Longrightarrow \qquad [T]=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

Exempel 8 Hitta standardmatrisen till den avbildning R_θ som roterar varje vektor med vinkeln θ moturs.

Lösning Vi kollar vad som händer med enhetsvektorerna.



$$R_\theta(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$



$$R_\theta(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad [R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exempel 9 Hitta standardmatrisen till projektionen P på linjen $y = x$.

Lösning

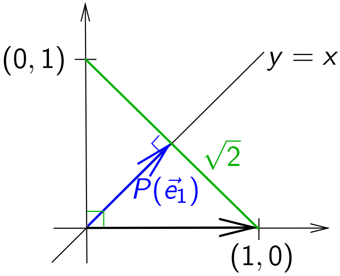
$$\operatorname{proj}_{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \vec{x} = \frac{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{1^2+1^2} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad [P] = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

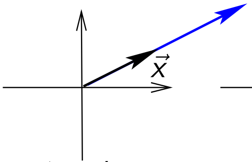
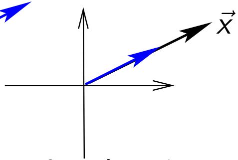
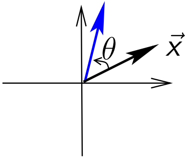
Alternativt: för $d = \|P(\vec{e}_1)\|$ får vi

$$1^2 = d^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

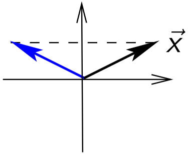
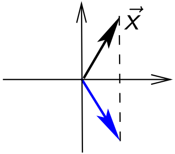
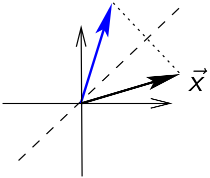
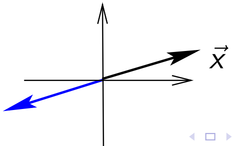
$$P(\vec{e}_1) = P(\vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\substack{\text{enhetsvektor}\\ \text{i rätt riktning}}}$$

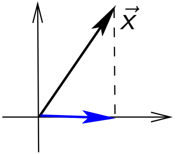
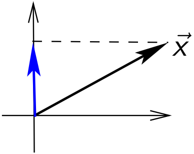
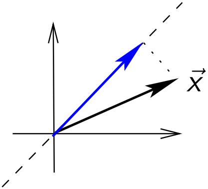


Några viktiga avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

avbildning T		$[T]$
utvidning/ förkortning	 $1 < k$  $0 < k < 1$	$k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
rotation med vinkeln θ moturs		$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Anmärkning: Förflyttningen $T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{x}_0$ med $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ är inte en linjär avbildning!

avbildning T		$[T]$
spegling i		
-> y-axeln		$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
-> x-axeln		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
-> linjen $y = x$		$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
-> origo		$-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

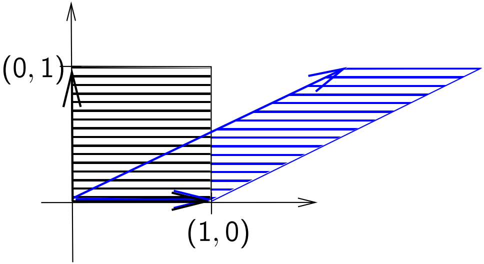
avbildning T		$[T]$
ortogonala projektionen på		
-> x-axeln		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
-> y-axeln		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
-> linjen $y = x$		$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exempel

a) Skjuvning av $\mathbb{R}^2$ i x-riktningen med faktor k.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}, \qquad [T] = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 2$:



b) Skjuvning av $\mathbb{R}^2$ i y-riktningen med faktor k.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+kx \end{pmatrix}, \qquad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Sammansättning av linjära avbildningar:

Låt $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ och $T_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ vara linjära avbildningar.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "T_1"] & \mathbb{R}^k \arrow[r, bend left, "T_2"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Sammansättningen av T_1 med T_2 är den avbildning som erhålls genom att först använda T_1 och sedan T_2.

Vi skriver $T_2 \circ T_1$.

$T_2 \circ T_1$ är alltså en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Observera att den är igen linjär! Vi har

$$\underbrace{\left(T_2 \circ T_1 \right)}_{\text{avbildning}}(\vec{x}) \quad = \quad T_2\Big(\underbrace{T_1(\vec{x})}_{\text{vektor i } \mathbb{R}^k} \Big).$$

Exempel 10 För $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som är givna genom

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 - x_3, \qquad T_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

är

$$(T_2 \circ T_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T_2\Big(T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big) = T_2(x_1 - x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Däremot är $T_1 \circ T_2$ inte definierad.

Sats: $[T_2 \circ T_1] = [T_2] \cdot [T_1]$

Bevis:

$$\left(T_2 \circ T_1 \right)(\vec{x}) = T_2 \left(\underbrace{T_1(\vec{x})}_{=:\, \vec{y}} \right) \overset{T_2 \text{ linjär}}{=} [T_2] \cdot \vec{y}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = [T_1] \cdot \vec{x} \quad \overset{T_1 \text{ linjär}}{=} \quad [T_2] \cdot \left([T_1] \cdot \vec{x} \right)$$

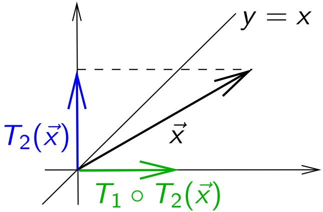
$$= \underbrace{\left([T_2] \cdot [T_1] \right)}_{\substack{\text{standardmatris} \\ \text{till } T_2 \circ T_1}} \cdot \vec{x} \qquad \square$$

Anmärkning: Sammansättningen är inte kommutativ!

Exempel 10 (forts.) $[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [T_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad [T_2 \circ T_1] &= [T_2][T_1] \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel 11 Låt T_1 vara speglingen i linjen $y = x$ och T_2 projektionen på y-axeln.

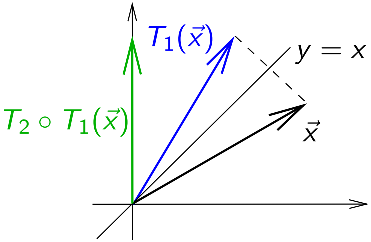


$$\Longrightarrow \quad [T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså

$$[T_1 \circ T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Vi ser: $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$.

Det gäller dock att rotationer i planet kommuterar:

Sats: Låt $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beteckna rotationen med vinkeln θ moturs. Då är

$$R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1} = R_{\theta_1+\theta_2}.$$

Bevis: (med matrisräkning)

$$\begin{aligned}
[R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1}] &= [R_{\theta_2}] \cdot [R_{\theta_1}] \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}}_{} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2)\cos(\theta_1) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_2)\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2)\sin(\theta_1) + \cos(\theta_2)\cos(\theta_1) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Additions-teorem}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= [R_{\theta_1+\theta_2}] \qquad \square
\end{aligned}$$

Inverterbara avbildningar

En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för inverterbar om det finns en avbildning $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att

$$T \circ S = S \circ T = I$$

där I är identitetsavbildningen, d.v.s. $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med $I(\vec{x}) = \vec{x}$ för alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Om inversa avbildningen S finns, så är den entydig bestämt och själv en linjär avbildning[1].

Vi skriver $S =: T^{-1}$.

---

[1] T.ex.
$$\begin{aligned} S(\vec{x}+\vec{y}) &= S \circ \Big(\underbrace{T \circ S}_{=I}(\vec{x}) + T \circ S(\vec{y}) \Big) \\ &\overset{T \text{ linjär}}{=} \underbrace{S \circ T}_{=I} \circ \Big(S(\vec{x}) + S(\vec{y}) \Big) = S(\vec{x}) + S(\vec{y}). \end{aligned}$$

Sambandet mellan avbildningar och deras standardmatriser ger

Sats: Om T är en inverterbar linjär avbildning, då är standardmatrisen $[T]$ till T en inverterbar matris och det gäller

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Följd: En linjär avbildning T är inverterbar om och endast om $\det([T]) \neq 0$.

Exempel 12 Rotationen R_θ med vinkeln θ moturs är inverterbar och $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

Exempel 13 Projektionen P på y-axeln är inte inverterbar eftersom

$$\det[P] = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Exempel 14 Visa att avbildningen T som ges genom ekvationerna

$$\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

är inverterbar och bestäm den inversa avbildningen.

Lösning $[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\det[T] = 1 \neq 0$ är T inverterbar och

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad T^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w_1 + w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 15 Låt T_1 vara avbildningen som roterar 45° medurs och T_2 avbildningen som speglar i linjen $y = -x$.

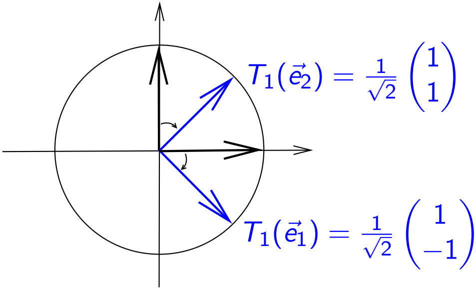
a) Bestäm standardmatriserna ill T_1 och T_2.

b) Bestäm standardmatrisen till den sammansatta avbildningen $T_2 \circ T_1$. Tolka avbildningen geometriskt!

c) Är $T_2 \circ T_1$ inverterbar? Bestäm den inversa avbildningen i så fallet.

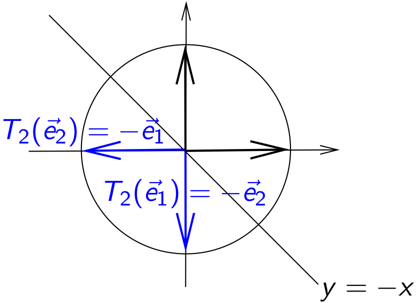
d) Kommuterar T_1 och T_2?

Lösning



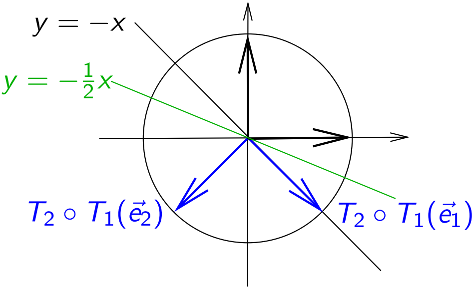
a) $[T_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$[T_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



b) $[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

$T_2 \circ T_1$ är speglingen i linjen $y = -\frac{1}{2}x$.



c) Eftersom $\det[T_2 \circ T_1] = -\sqrt{2} \neq 0$ är $T_2 \circ T_1$ inverterbar och vi får

$$[(T_2 \circ T_1)^{-1}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [T_2 \circ T_1].$$

Avbildningen är självinvers.

Observera att speglingar alltid är självinversa.

d) $[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Eftersom $[T_1 \circ T_2] \neq [T_2 \circ T_1]$ kommuterar avbildningarna T_1 och T_2 inte.