Egenvärden och egenvektorer

Låt A vara en $n \times n$-matris. Ett tal $\lambda \in \mathbb{R}$ sägs vara ett egenvärde till A om der finns en vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, sådan att

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{1}$$

I detta fall kallas $\vec{x}$ för en egenvektor till egenvärdet λ.

Observera att (1) är ekvivalent till det homogena linjära ekvationssytemet

$$(\lambda I_n - A)\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Exemple 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 & = & \lambda x_2 \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{rrcl} (\lambda - 1)x_1 & - 3x_2 & = & 0 \\ -4x_1 & + (\lambda - 2)x_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff\ & \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff\ & \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eftersom systemet (2) är homogent vet vi:

- Systemet har alltid den triviala lösningen $\vec{x} = \vec{0}$.
- Det finns icke-triviala lösningar

$$\begin{aligned} &\iff \lambda I_n - A \text{ är inte inverterbar} \\ &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(3) kallas för den karakteristiska ekvationen till A. Utvecklar man determinanten erhåller man ett polynom $p_A(\lambda)$ i λ,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiska polynomet till A.

Sats: λ egenvärde till $A \iff p_A(\lambda) = 0$.

Observation: En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om 0 *inte* är ett egenvärde till A.

Exempel 1 (forts.)

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda + 2)(\lambda - 5)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ egenvärdena till A är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 5$.

För att bestämma egenvektorerna måste vi hitta alla icke-triviala lösningar till systemet (2).

För ett egenvärde λ till A definiera vi egenrummet V_λ till λ som

$$V_\lambda = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\right\}.$$

Denna mängd innehåller alla egenvektorer till λ och nollvektorn.

Exempel 1 (forts.)

a) $\lambda = -2$:

$$\Big(-2I_2 - A\Big) \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -2-1 & -3 \\ -4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gausseliminationen ger $x_1 = -t$, $x_2 = t$ där $t \in \mathbb{R}$.

Alltså är

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = -2$.

b) $\lambda = 5$:

$$\Big(5I_2 - A\Big) \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Här får vi genom Gausselimination att

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

är egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 5$.

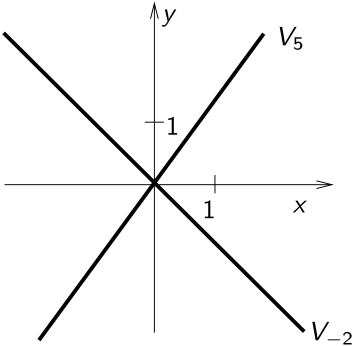
Vi får egenrummen

$$
\begin{aligned}
V_{-2} &= \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \\
V_5 &= \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Observera att egenrummen är linjer genom origo.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_{-2} \iff y = -x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_5 \iff y = \frac{4}{3}x$$



Exempel 2

a) Betrakta nollmatrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Eftersom $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det(\lambda I_3) = \lambda^3 \det(I_3) = \lambda^3$ är 0 det enda egenvärdet till A med

$$V_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \underbrace{A\vec{x}}_{=\vec{0}} = 0 \cdot \vec{x}\} \ = \mathbb{R}^3.$$

b) För enhetsmatrisen $A = I_3$ är $p_A(\lambda) = \det\big((\lambda - 1)I_3\big) =$
$= (\lambda - 1)^3$. Alltså är 1 det enda egenvärde till A och likandan som i a) visar man $V_1 = \mathbb{R}^3$.

Exempel 3 Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm egenvärdena till A.

b) Bestäm deras egenvektorer.

Lösning

a)
$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \det \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 2)\big(\lambda(\lambda - 3) - 2(-1)\big) \\ &= (\lambda - 2)\big(\lambda^2 - 3\lambda + 2\big) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$.

b) V_1 innehåller alla vektorer $\vec{x}$ med

$$(1 \cdot I_3 - A)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ger den allmäna lösningen $x_1 = -2t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$ där $t \in \mathbb{R}$.

$$\implies \quad V_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\},$$

en linje i rymnden genom origo.

V_2 innehåller alla vektorer $\vec{x}$ med

$$(2 \cdot I_3 - A)\vec{x} = \vec{0} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ger den allmäna lösningen $x_1 = -t$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ där s, $t \in \mathbb{R}$.

$$\implies \quad V_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

ett plan i rymnden genom origo.

Låt A vara en $n \times n$-matris. Vi har sett

(1) A har högst n egenvärden eftersom $p_A(\lambda)$ har grad n (högst n nollställen).

(2) Det kan dock hända att det finns inga (reella) egenvärden alls.

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0 \text{ för alla } \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) Ett egenrum V_λ innehåller alltid en linje genom origo (nämligen $\ell : t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, där $\vec{v}$ är en egenvektor till λ). Men egenrummet kan vara större är linjer.

Några typiska **exempel** för vad som kan hända:

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(3)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

I alla tre fall gäller $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. Det finns alltså precis ett egenvärde $\lambda = 2$. Dessutom får vi

(1) $V_2 = x$-axeln.

(2) $V_2 = xz$-planet

(3) $V_2 = \mathbb{R}^3$