

Hjälpmedel: Formelsamling samt skolans räknare.

1. Redogör med goda exempel för skillnaden mellan en gränspunkt till en mängd och en hopningspunkt till en följd samt ange med bevis någon vital egenskap hos begränsade oändliga mängder. Förklara även med väl valda exempel vad som menas med öppna och slutna mängder samt hur dessa egenskaper sammanhänger med varandra. (5p)
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerlig funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Formulera och bevisa implicita funktionssatsen samt visa hur några andra viktiga resultat följer ur denna. (5p)
5. Förklara vad som menas med en fullständig metrisk rymd samt ge exempel på rymder av funktioner som är fullständiga respektive inte fullständiga. (5p)
6. Avgör om serien

$$\sum_1^{\infty} ke^{-kx}$$

konvergerar likformigt på intervallet $[1,2]$. Säger detta i så fall något om karaktären hos gränsfunktionen? (5p)

7. Ange förutsättningar för att formeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

ska gälla och ge ett icke-trivialt exempel på en sådan följd funktioner $\{f_n\}$ samt genomför beräkningarna. Motivera väl. (5p)

8. Avgör om rummet $C^1[0,1]$ (de en gång kontinuerligt deriverbara funktionerna på intervallet $[0,1]$) är fullständigt med metriken

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x) - g'(x)|. \quad (5p)$$

17/3 - 99

6. Vi studerar

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx}, \quad 1 \leq x \leq 2$$

genom M-test (Th 7.11)

$$|f_k(x)| \leq |k e^{-kx}| \leq k e^{-k} = M_k$$

Om vi kan visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k} < \infty$$

så är (1) likf. konv.

Vi använder integralkriteriet (Th 7.4)

$$f(x) = x e^{-x}$$

är avtagande för $x \geq 1$ och

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx \text{ konv. (vanlig part.int)}$$

Vi har ett konv. M-test för

$$M_k = k e^{-k}$$

7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

om

(1) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ likformigt (Th 7.13)

Som exempel ger vi

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}x^2, \quad f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{n}x^2 \leq \frac{1}{n}.$$

och vi har visat (1).

$$8. \quad d(f_n, f) = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'_n(x) - f'(x)|$$

Antag f_n, f_n kont och

$$d(f_n, f) \rightarrow 0$$

för något

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Då har vi (Th 7.12)

$$f_n \rightarrow f \text{ likf} \Rightarrow f \text{ kont.}$$

$$f'_n \rightarrow f' \text{ likf} \Rightarrow f' \text{ kont.}$$

$C'[0,1]$ är fullständigt

Hjälpmedel: Formelsamling samt skolans räknare.

1. Förklara skillnaden mellan att en följd konvergerar och att den är en Cauchyföljd samt redogör för under vilka förutsättningar en Cauchyföljd också säkert är konvergent. Definiera även vad som menas med en begränsad följd samt ge exempel på när sådana följder eller delföljder därav konvergerar samt ge bevis för dessa egenskaper. (5p)
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerlig funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Bevisa en medelvärdessats för deriverbara funktioner och använd denna för att bevisa att en deriverbar funktion är likformigt kontinuerlig. Inför även begreppet Lipschitz kontinuerlig och utnyttja detta för att bevisa en skarpare version av en fixpunktssats. Bevisa även den ursprungliga fixpunktssatsen. Ange villkor för att en funktions derivata ska vara kontinuerlig och ge ett exempel med kommentarer på en funktion som är deriverbar i en punkt utan att derivatan är kontinuerlig. (5p)
5. Förklara vad som menas med en fullständig metrisk rymd samt ge exempel på rymdar av funktioner som är fullständiga respektive inte fullständiga. (5p)
6. Visa att funktionsföljden
$$f_n(x) = 1 + \frac{\sin nx}{n+1}$$
konvergerar mot en kontinuerlig funktion. (5p)
7. Beräkna
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \left(1 + \frac{\sin x}{n^2 x + 1} \right) dx.$$
(5p)
8. Visa att
$$f(x) = e^{-|x|}$$
är likformigt kontinuerlig på hela \mathbb{R} . (5p)

16/4-99

6. Funktionsföljden

$$f_n(x) = 1 + \frac{\sin nx}{n+1}$$

består av kontinuerliga funkt.

Om den konv. likf mot en gräns f så måste även den vara kontinuerlig.

Vi studerar

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n+1} - \frac{\sin mx}{m+1} \right| \leq$$

$$\left| \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)}{m+1} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \rightarrow 0$$

för $n, m \rightarrow \infty$. $\{f_n\}$ är likformigt Cauchy och därför likformigt konv. se Th 7.10.

$$7. \quad f_n(x) = 1 + \frac{\sin x}{n^2 x + 1}$$

Punktvis har vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{n^2 x + 1} = 1, \quad x=0.$$

Desutom gäller

$$\sup_{x \in [1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1,2]} \left| \frac{\sin x}{n^2 x + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1} \rightarrow 0$$

d.v.s

$f_n \rightarrow f$ likformigt på $[1,2]$.

Då har vi (Th 7.13)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 1 + \frac{\sin x}{n^2 x + 1} dx = \int_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{n^2 x + 1} dx$$
$$\int_1^2 1 dx = 1$$

8. Välj $a \in \mathbb{R}$ godtyckligt.

Vi har

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-|x|} = 0$$

Th 4.15 och corollarier

ger att f är likf. kont.

på $[a, \infty)$ resp. $(-\infty, a]$.

Vi har att f är likf. kont på

$$(-\infty, a] \cup [a, \infty) = \mathbb{R}$$

Hjälpmedel: Formelsamling samt skolans räknare.

1. Förklara skillnaden mellan att en följd konvergerar och att den är en Cauchyföljd samt redogör för under vilka förutsättningar en Cauchyföljd också säkert är konvergent. Definiera även vad som menas med en begränsad följd samt ge exempel på när sådana följder eller delföljder därav konvergerar samt ge bevis för dessa egenskaper. (5p)
2. Inför integralbegreppet med utförliga motiveringar, ange några klasser av integrerbara funktioner samt ge ett användbart kriterium på integrerbarhet. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Bevisa en medelvärdessats för deriverbara funktioner och använd denna för att bevisa att en deriverbar funktion är likformigt kontinuerlig. Inför även begreppet Lipschitz kontinuerlig och utnyttja detta för att bevisa en skarpare version av en fixpunktssats. Bevisa även den ursprungliga fixpunktssatsen. Ange villkor för att en funktions derivata ska vara kontinuerlig och ge ett exempel med kommentarer på en funktion som är deriverbar i en punkt utan att derivatan är kontinuerlig. (5p)
5. Förklara vad som menas med en fullständig metrisk rymd samt ge exempel på rynder av funktioner som är fullständiga respektive inte fullständiga. (5p)
6. Avgör om funktionsföljden
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ x^n, & x \in [0,1) \end{cases}$$
konvergerar likformigt. (5p)
7. Avgör om
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [0, \infty) \\ x^2 + 1, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$
är likformigt kontinuerlig. (5p)
8. Avgör om z kan lösas ut entydigt ur
$$z + 2 \cos(x + y + z) - 2 = 0$$
i en omgivning till origo. (5p)

19/5 - 99

6. Vi har

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2] \\ x^n, & x \in [0, 1) \end{cases}$$

som är kont. medan den

punktvisa gränsen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases}$$

är diskontinuerlig. Th 7.12

säger att f skulle ha varit

kont. vid likf. konv.

7. Vi har

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in [0, \infty) \\ x^2 + 1, & x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Då gäller att f är lmf kont
på $[-1, \infty)$ enligt Th 4.15
eftersom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

och f är kont. på $[-1, \infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$$

8. Vi vill lösa ut z ur

$$z + 2\cos(x+y+z) - 2 = 0$$

runter origo:

Vi tillämpar implicita funktionsatsen
med

$$F(x, y, z) = z + 2\cos(x+y+z) - 2$$

och får

$$F'_z(x, y, z) = 1 - 2\sin(x+y+z)$$

Vi har då

$$F(0, 0, 0) = 0$$

och

$$F'_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$$

och z kan lösas ut enligt

Th 8.14,

Fullständiga lösningar krävs till varje uppgift. Även delvis lösta uppgifter kan ge poäng. Maxpoäng på varje uppgift är 5p.

1. Förklara skillnaden mellan att en följd av reella tal konvergerar och att den är en Cauchyföljd samt redogör för under vilka förutsättningar en Cauchyföljd också säkert är konvergent. Definiera även vad som menas med en begränsad följd samt ge exempel på när sådana följder eller delföljder därav konvergerar samt ge bevis för dessa egenskaper.
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerligt funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel.
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier.
4. Formulera och bevisa implicita funktionssatsen samt visa hur några andra viktiga resultat följer ur denna.
5. Förklara vad som menas med en fullständig metrisk rymd samt ge exempel på rymder av funktioner som är fullständiga respektive inte fullständiga.

6. Beräkna med goda motiveringar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x + \frac{e^x}{n^2}\right) \sin x dx.$$

7. Visa att

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

ger en metrik för rummet av de kontinuerliga funktionerna på $[0, 1]$.

8. Avgör om

$$f(x) = \sin^2 x$$

är Lipschitzkontinuerlig på \mathbb{R} .

13/3-00

6. Vi visar att

$$f_n(x) = \left(x + \frac{e^x}{n^2}\right) \sin x$$

konv. likformigt mot

$$f(x) = x \sin x.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{e^x}{n^2} \sin x \right| \leq e/n^2 < \varepsilon$$

f.ä. $x \in [0, 1]$ om $n > \sqrt{e/\varepsilon}$

och vi har visat likf. konv.

Då ger Th 7.13 att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x + \frac{e^x}{n^2}\right) \sin x \, dx =$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{e^x}{n^2}\right) \sin x \, dx =$$

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = \left[-x \cos x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$-\cos 1 + \left[\sin x \right]_0^1 = \sin 1 - \cos 1.$$

7. Vi studerar $(C[0,1], d)$ för

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$1) d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq 0$$

eftersom

$$|f(x) - g(x)| \geq 0$$

$$2) d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$$

eftersom

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$$

\Leftrightarrow

$$|f(x) - g(x)| = 0$$

enligt Th 6.10.

8. Vi avgör om

$$f(x) = \sin^2 x$$

är Lipschitzkont. på \mathbb{R}

$$|\sin^2 x - \sin^2 y| =$$

$$|\sin x + \sin y| \cdot |\sin x - \sin y| \leq$$

$$2|\sin x - \sin y| = 4 \left| \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq$$

$$4 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| = 4 \cdot \left| \frac{x-y}{2} \right| = 2|x-y|$$

Vi har visat Lipschitzkont.

Fullständiga lösningar krävs till varje uppgift. Även delvis lösta uppgifter kan ge poäng.

1. Förklara skillnaden mellan att en följd av reella tal konvergerar och att den är en Cauchyföljd samt redogör för under vilka förutsättningar en Cauchyföljd också säkert är konvergent. Definiera även vad som menas med en begränsad följd samt ge exempel på när sådana följder eller delföljder därav konvergerar samt ge bevis för dessa egenskaper. (5p)
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerlig funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Formulera och bevisa implicita funktionssatsen samt visa hur några andra viktiga resultat följer ur denna. (5p)
5. Beskriv de olika typerna av kompakthet, visa i några fall deras inbördes förhållande och förklara hur kompakthet förhåller sig till slutenhet och begränsning. (5p)
6. Avgör om serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx} \sin kx$$
konvergerar likformigt på $[1,2]$. (5p)
7. Beräkna med goda motiveringar
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 - \frac{\sin^2 x}{1 + ne^x} dx$$
(5p)
8. Avgör om
$$f(x) = x^4$$
är likformigt kontinuerlig på $[0,1]$. (5p)

6. Vi tillämpar ett M-test på

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \sin kx, \quad x \in [1, 2]$$

$$|k e^{-kx} \sin kx| \leq k e^{-k} = M$$

Integralkriteriet ger (Th 7.4)

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right]_1^{\infty} =$$

$$\left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_1^{\infty} = 0 - (-e^{-1} - e^{-1}) = 2e^{-1}$$

och således att

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

konvergerar. Vi har visat att

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \sin kx$$

konvergerar likformigt (Th 7.11)

7. Om

$$f_n(x) = x^2 - \frac{\sin^2 x}{1+ne^x}$$

konvergerar likformigt så kan vi flytta in limestecknet (Th 7.13)

Vi visar likformig konv.

Den punktvisa gränser är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2.$$

Vi får

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin^2 x}{1+ne^x} \right| \leq \frac{1}{1+n}$$

Likformig konv. gäller. Vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 - \frac{\sin^2 x}{1+ne^x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

8. Vi studerar

$$|f(x) - f(y)|$$

och får

$$|f(x) - f(y)| = |x^4 - y^4| = |x^2 + y^2| \cdot |x^2 - y^2| \leq$$

$$|1^2 + 1^2| \cdot |x^2 - y^2| = 2 \cdot |x + y| \cdot |x - y| \leq$$

$$4 \cdot |x - y|.$$

f är Lipschitzkont.

Fullständiga lösningar krävs till varje uppgift. Även delvis lösta uppgifter kan ge poäng.

1. Redogör med goda exempel för skillnaden mellan en gränspunkt till en mängd och en hopningspunkt till en följd samt ange med bevis någon vital egenskap hos begränsade oändliga mängder. Förklara även med väl valda exempel vad som menas med öppna och slutna mängder samt hur dessa egenskaper sammanhänger med varandra (5p)
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerlig funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Bevisa en medelvärdessats för deriverbara funktioner och använd denna för att bevisa att en deriverbar funktion är likformigt kontinuerlig. Inför även begreppet Lipschitz kontinuerlig och utnyttja detta för att bevisa en skarpare version av en fixpunktssats. Bevisa även den ursprungliga fixpunktssatsen. Ange villkor för att en funktions derivata ska vara kontinuerlig och ge ett exempel med kommentarer på en funktion som är deriverbar i en punkt utan att derivatan är kontinuerlig. (5p)
5. Förklara vad som menas med en fullständig metrisk rymd samt ge exempel på rymder av funktioner som är fullständiga respektive inte fullständiga. (5p)
6. Avgör om serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos^2 kx$$
konvergerar likformigt på hela R . (5p)
7. Beräkna med goda motiveringar
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^x - \frac{\cos^2 x}{1 + ne^x} dx$$
(5p)
8. Avgör om
$$f(x) = x^4$$
är Lipschitzkontinuerlig på $[0,1]$. (5p)

21/4-01

6. Vi studerar

$$\sum_1^{\infty} k^{-2} \cos^2 kx. \quad (1)$$

$$|k^{-2} \cos kx| \leq k^{-2}$$

och ett M-test säger att

(1) konv. om (Th7.11)

$$\sum_1^{\infty} k^{-2}$$

konv., vilket sker enligt

integralkriteriet (Th7.4)

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^{\infty} = 1$$

7. Vi har (Th 7.13)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^x - \frac{\cos^2 x}{1+n e^x} dx =$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} e^x - \frac{\cos^2 x}{1+n e^x} dx = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 =$$

$e-1$

om

$$e^x - \frac{\cos^2 x}{1+n e^x} \rightarrow e^x \text{ likformigt.}$$

Vi har

$$\left| e^x - \frac{\cos^2 x}{1+n e^x} - e^x \right| = \left| \frac{\cos^2 x}{1+n e^x} \right| = \frac{1}{1+n e^x}$$

$$\leq \frac{1}{1+n} < \varepsilon \quad \text{om} \quad 1+n > \varepsilon^{-1}$$

d.v.s. om

$$n > \varepsilon^{-1} - 1,$$

Likf. konv. är bevisad

8. Se uppg. 8 i 2/3-01

Fullständiga lösningar krävs till varje uppgift. Även delvis lösta uppgifter kan ge poäng.

1. Förklara skillnaden mellan att en följd av reella tal konvergerar och att den är en Cauchyföljd samt redogör för under vilka förutsättningar en Cauchyföljd också säkert är konvergent. Definiera även vad som menas med en begränsad följd samt ge exempel på när sådana följder eller delföljder därav konvergerar samt ge bevis för dessa egenskaper. (5p)
2. Definiera vad som menas med en kontinuerlig funktion och ge exempel på egenskaper hos sådana funktioner. Beskriv även utförligt vad som kännetecknar en likformigt kontinuerligt funktion i jämförelse med en som är kontinuerlig i vanlig mening. Redogör även för när vi kan vara säkra på att en kontinuerlig funktion också är likformigt kontinuerlig, bevisa några av dessa egenskaper samt ge belysande exempel. (5p)
3. Definiera likformig konvergens och jämför med några andra former av konvergens. Ge också ett kriterium på likformig konvergens för serier samt bevisa några viktiga egenskaper hos likformigt konvergenta serier. Ange också kriterier på konvergens för något viktigt specialfall av funktionsserier. (5p)
4. Bevisa en medelvärdessats för deriverbara funktioner och använd denna för att bevisa att en deriverbar funktion är likformigt kontinuerlig. Inför även begreppet Lipschitz kontinuerlig och utnyttja detta för att bevisa en skarpare version av en fixpunktssats. Bevisa även den ursprungliga fixpunktssatsen. Ange villkor för att en funktions derivata ska vara kontinuerlig och ge ett exempel med kommentarer på en funktion som är deriverbar i en punkt utan att derivatan är kontinuerlig. (5p)
5. Beskriv de olika typerna av kompakthet, visa i några fall deras inbördes förhållande och förklara hur kompakthet förhåller sig till slutenhet och begränsning. (5p)
6. Beräkna integralen
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \cos x + \frac{1}{1 + nx^3} dx$$
 (5p)
7. Finns det något intervall där
$$f(x) = \cos x$$

är Lipschitzkontinuerlig? Ge i sådana fall exempel på detta. (5p)
8. Avgör om serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}$$

konvergerar likformigt på $[1,2]$. (5p)

3/6 - 02

6. Vi studerar

$$f_n(x) = \cos x + \frac{1}{1+nx^3}, \quad x \in [1, 2]$$

Den punktvisa gränsen är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x + \frac{1}{1+nx^3} = \cos x$$

Vi visar likformig konvergens:

$$\sup_{x \in [1, 2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1, 2]} \frac{1}{1+nx^3} = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Enligt Th 7.13 har vi då

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \cos x dx =$$

$$\cos 2 - \cos 1.$$

7. Vi studerar

$$f(x) = \cos x$$

$$|f(x) - f(y)| = |\cos x - \cos y| = [\text{Th 5.6}]$$

$$|f'(c)(x-y)| \leq |f'(c)| \cdot |x-y| \leq$$

$$1 \cdot |x-y|$$

eftersom

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leq 1 \quad \text{f.o. } x \in \mathbb{R}$$

f är Lipschitzkont. på hela \mathbb{R}

8. Förenklad version av uppg. 7
i 16/4-99