Metriska rymder

(S,d) är en metrisk rymd

om

$$d: S \times S \to R$$

uppfyller

a) $d(x,y) \geq 0$ f.a. $x,y \in S$

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ f.a $x,y \in S$

c) $d(x,y) = d(y,x)$ f.a $x,y \in S$

d) $d(x,y) \leq d(x,w) + d(w,y)$ f.a. $x,y,w \in S$

a) Avstånd är positiva

b) Avstånd $= 0 \Leftrightarrow$ identitet

c) Lika i båda riktningar

d) Omväg $\Leftrightarrow$ längre väg

En mängd S kan ha flera olika metriker

R^2

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

och

$$e(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

ger två olika metriker för R^2.

Övn: Visa att d och e verkligen är metriker.

$C[0,1]$

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

och

$$e(f,g) = \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

ger metriker för $C[0,1]$

Övn: Visa detta.

Normerade och metriska rymder

Om S är ett linjärt rum och det finns en norm

$$\| \ \|: S \to R$$

så kan vi använda den för att skapa en metrik

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

(Övn): Visa att d är en metrik samt avgör om det tillkommer någon god egenskap hos just metriker som tillkommit på detta sätt.

Topologi

En förteckning över alla öppna mängder.

$\emptyset$ och universalmängden S räknas alltid som öppna

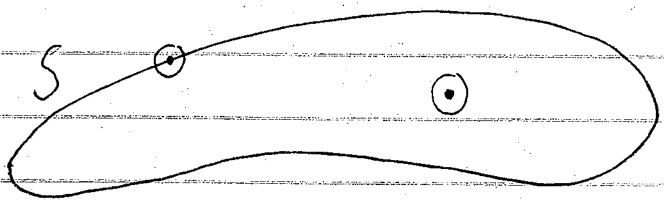
Topologi genom metrik

Vi inför

$$N_r(x_0) = \{x \in S \mid d(x, x_0) < r\}$$

$G \subseteq S$ är öppen om det finns $r = r(x_0)$ s.a.

$$N_r(x_0) \subseteq G$$



Randen ingår ej.

Unioner och snitt av öppna mängder

Alla sorters unioner av öppna mängder är öppna;

$G_\alpha, \alpha \in \Gamma$ öppna $\Rightarrow$

$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ är öppen

Ändliga snitt av öppna mängder är öppna

$G_i, \; i = 1, \ldots n \Rightarrow$

$\bigcap_{i}^{n} G_i$ är öppna

Övn: Jämför med övn 2.28-29.

Notera: Varje öppen mängd i (S,d) är en union av öppna sfärer:

G öppen, $x \in G \Rightarrow N_{r_x}(x) \subseteq G$

$$\Rightarrow \bigcup_{x \in G} N_{r_x}(x) \subseteq G$$

Eftersom

$$G \subseteq \bigcup_{x \in G} N_{r_x}(x)$$

har vi

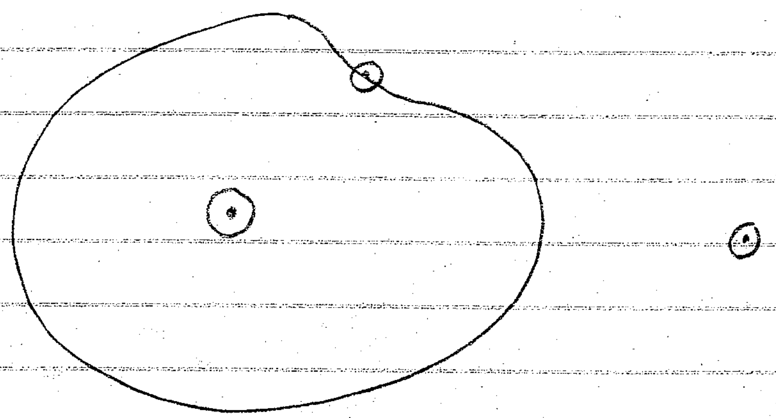
$$G = \bigcup_{x \in G} N_{r_x}(x).$$

Gränspunkter och slutenhet.

Gränspunkt

x_0 är en gränspunkt till $A \subseteq S$ om

$$N_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset \text{ f.a. } \varepsilon > 0$$



Isolerade punkter är inte gränspunkter

Slutenhet

En mängd A i (S,d) är sluten om A innehåller alla sina gränspunkter i univ.mgden S

Notera: Vi kommer att visa att detta är ekvivalent med att A är komplement till en öppen mgd.

För

$$S = R[a,b]$$

inför vi metrikerna

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

och

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

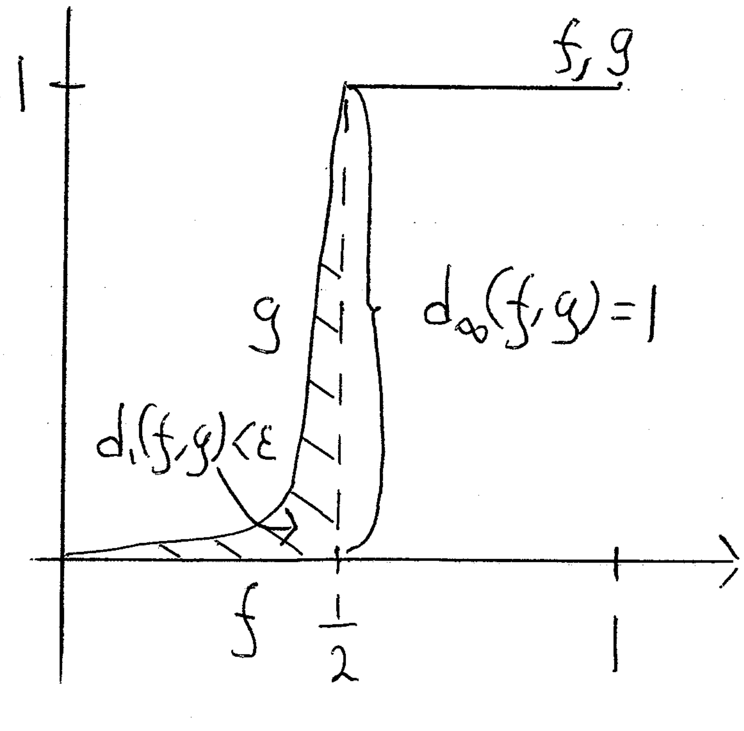
För

$$A = C[0,1]$$

kan vi se att

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}, \quad f \in R[0,1]$$

är en gränspunkt till A för metriken d_1 fastän $f \notin C[0,1]$.
Däremot är f inte gränspunkt till A för metriken d_∞



Den skarpare metriken d_∞
tar bort den diskontinuerliga
funktionen f som gränspunkt
till $A = C[0,1]$.

Alternativet är att ta bort alla
diskontinuerliga funktioner
ur universalmängden och införa

$$S = C[0,1].$$

Då är A sluten både för d_1 och d_2.

Allmänt: S är alltid en sluten
delmängd till (S,d). Dessutom
är $S = (\emptyset)'$ och därför sluten
eftersom den är komplement till $\emptyset$
som är öppen per definition.

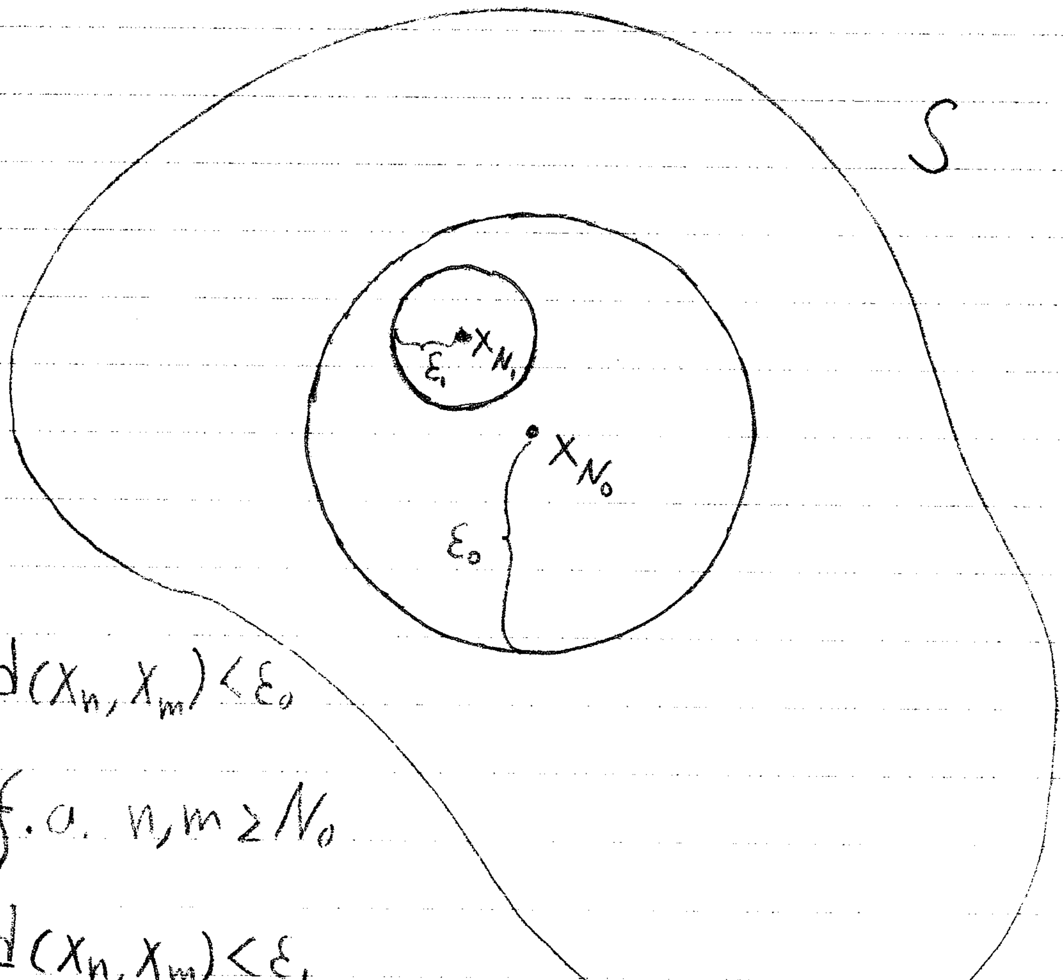
Vad som krävs för att en mängd A i en metrisk rymd (S,d) ska vara sluten beror på S: vilka element finns tillgängliga som möjliga gränspunkter? d: vad menar vi med avstånd?

Det blir lättare för A att vara sluten om S innehåller färre element och d ställer stora krav för att element ska anses ligga nära varandra.

Cauchyföljder

D10.6 En följd $\{x_n\}$ är en Cauchyföljd om

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad n,m \geq N$$



$d(x_n, x_m) < \varepsilon_0$

f.o. $n,m \geq N_0$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon_1$

f.o. $n,m \geq N_1$

Gränspunkter och Cauchyföljder:

För varje gränspunkt a till A finns en Cauchyföljd $\{x_k\}$ i A så att

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

Om a stryks ur S har vi kvar Cauchyföljden ur A, men behöver inte bekymra oss om huruvida $a \in A$.

Mängden A kan "skylla på" att a saknas i universalmängden.

Slutenhet i relation till öppenhet

Th10.3 A är sluten i (S,d)

$$\Longleftrightarrow$$

$S-A$ är öppen

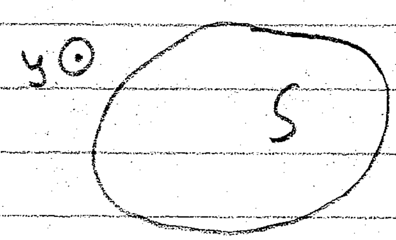
(Se definition 2.5 och Th2.11)

Bevis: $(\Rightarrow)$ $\begin{cases} A \text{ sluten} \\ y \in S-A \end{cases} \Rightarrow$

(y ej gränspkt $\Rightarrow$ tomt runt y)

$\Rightarrow \exists r>0$ s.a. $N_r(y) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow N_r(y) \subset S-A \Rightarrow S-A$ öppen



$(\Leftarrow)$ $\begin{cases} S-A \text{ öppen} \\ y \in S-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-A \text{ öppen} \\ y \notin A \end{cases}$

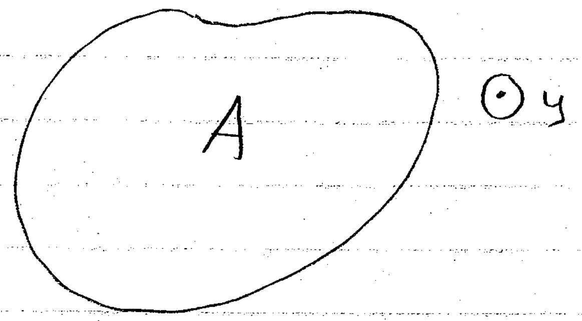
$\exists r>0$ s.a. $N_r(y) \subset S-A \Rightarrow$

y ej gränspunkt till A

(isolerad i en boll i $S-A$) $\Rightarrow$

inga gränspunkter till A

ligger i $S-A \Rightarrow A$ sluten



Övn: Vi har inte behandlat

fallet $A=S$. Vad händer då?

Visa även Th 10.4.

För

$$A = S$$

gäller

$$N_\varepsilon(x) \cap S \subseteq A = S$$

f.a. $x \in A = S$, d.v.s

S innehåller alla sina gränspunkter eftersom S är universalmängden (= hela världen).

$\therefore$ S är sluten

$$S - A = S - S = \emptyset$$

och $\emptyset$ är öppen per definition.

$\therefore$ Komplementet till S är öppet.

$\bar{A}$ är sluten

Självklart? Nej tänk om $\bar{A}$ har gränspunkter som inte är gränspunkter till A

Bevis: $y \in S - \bar{A} \Rightarrow y \notin A$

$\Rightarrow y \notin A$ och y ej gränspkt

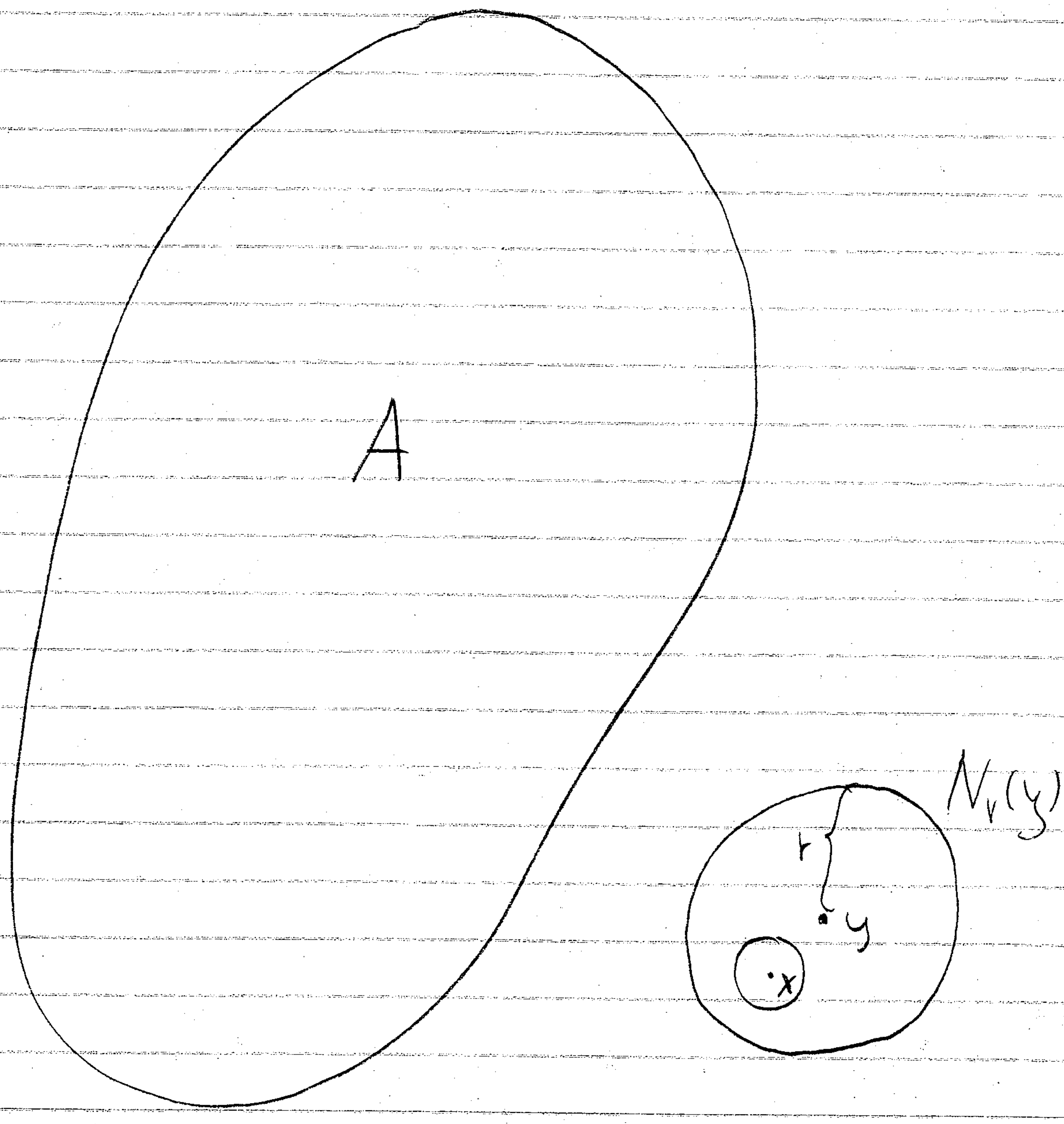
$\Rightarrow y$ isolerad från A

$\Rightarrow \exists r > 0$ s.a. $N_r(y) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow$ [$N_r(y)$ är öppen]

$\Rightarrow$ alla $x \in N_r(y)$ är isolerade från A $\Rightarrow N_r(y) \cap \bar{A} = \emptyset$

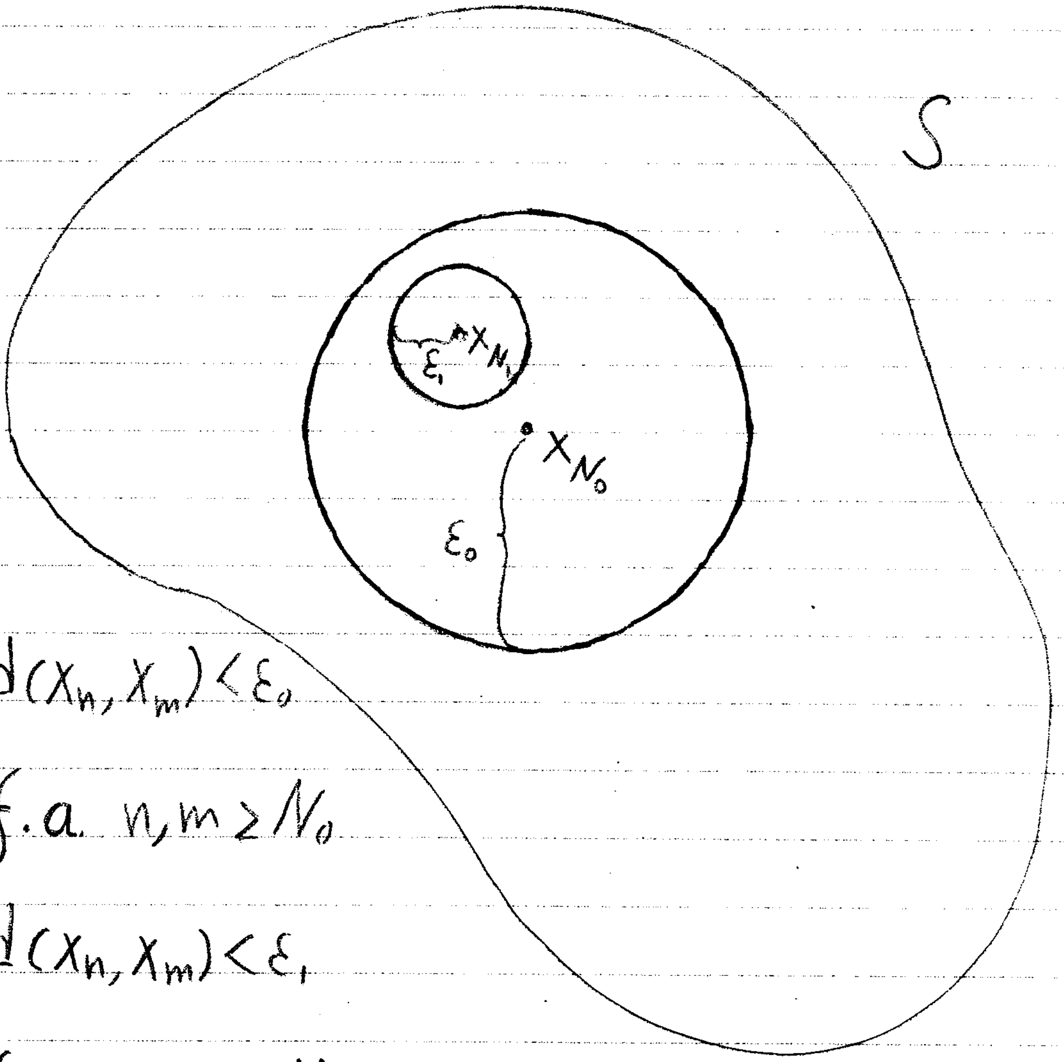
$\Rightarrow N_r(y) \subseteq S - \bar{A} \Rightarrow S - \bar{A}$ öppen


A
$N_r(y)$
r
y
x

Cauchyföljder

D10.6 En följd $\{x_n\}$ är en Cauchyföljd om

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon , \quad n, m \geq N$$



$d(x_n, x_m) < \varepsilon_0$

f.a. $n, m \geq N_0$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon_1$

f.a. $n, m \geq N_1$

En Cauchyföljd stabiliserar sig inuti mindre och mindre bollar

$$N_{\varepsilon_0}(X_{N_0}) \supset N_{\varepsilon_1}(X_{N_1}) \supset N_{\varepsilon_2}(X_{N_2}) \supset \dots$$

Om "mittpunkten" alltid finns där, d.v.s. om

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \lim \bigcap_{,}^{N} N_{\varepsilon_N}(X_N) = X \in S$$

så säger vi att (S, d) är en <u>fullständig metrisk rymd</u>.

Fullständighet liknar slutenhet.
Vad är skillnaden?

Kring en gränspunkt x_0 till en mängd A i en metrisk vymd (S,d) finns alltid en Cauchyföljd $\{x_n\}$ ur A som samlar sig kring x_0.
Om x_0 ligger utanför A så är A inte sluten, men det finns ett kryphål:
Om x_0 inte finns med i universalmängden S kan vi inte begära att x_0 ska finnas med i A. I en sluten mängd A kan alltså en Cauchyföljd

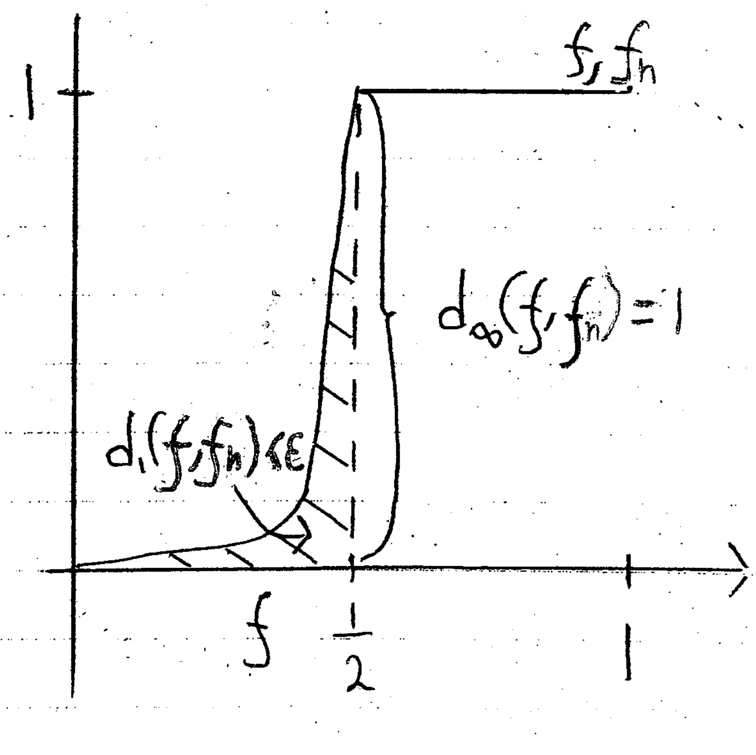
samla sig runt $x_0 \notin A$ om x_0
inte finns med i S.
Detta duger däremot inte om
A ska starta egen fullständig
metrisk rymd (A,d).
Om (A,d) ska vara fullständig
måste alltid det element en
Cauchyföljd samlar sig kring
finnas med i A

D10.7 I en fullständig metrisk rymd
(S,d) måste Cauchyföljder
alltid konvergera mot ett element
som ingår i S.

Ex. Vi har sett att $C[0,1]$ är en sluten mängd i den metriska rymden $(C[0,1], d_1)$.

Däremot är $(C[0,1], d_1)$ inte fullständig. Cauchyföljden $\{f_n\}$ behöver $f \notin C[0,1]$ för att kunna konvergera.

Med metriken d_∞ blir $\{f_n\}$ ingen Cauchyföljd (rita fig.)



Th 10.10 Vi antar att (S,d) är fullständig och att $A \subseteq S$ är icketom.

a) Om A är sluten så blir den metriska rymden (A,d) fullständig.

b) Om (A,d) är fullständig så måste A vara sluten.

Notera: Det a) säger är att inga gränspunkter kan vara "legalt försvunna" i en sluten mängd. Eftersom (S,d) är fullständig tillhandahålls alla behövliga gränspunkter.

Bevis av a, i Th10.10

$$\left.\begin{array}{c}(S,d) \text{ fullständig} \\ A \subseteq S \text{ sluten} \\ \{x_n\} \text{ Cauchy i } (A,d)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\{x_n\}$ Cauchy i (S,d) $\Rightarrow$

$$x_n \to x \in S$$

$\Rightarrow \; x \in \bar{A} \;\Rightarrow\; (A \text{ sluten}) \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow$ alla Cauchyföljder i (A,d) har sin gräns i (A,d)

$\Rightarrow$ (A,d) är fullständig

Vi har

$$\left.\begin{array}{l}(S,d) \text{ fullständig} \\ A \subseteq S \text{ sluten}\end{array}\right\} \Rightarrow (A,d) \text{ fullständig}$$

Bevis av b) i Th 10.10

$$\left.\begin{array}{r}(A,d) \text{ fullständigt} \\ x_0 \in \bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

F.a. $r>0$ har vi $N_r(x_0) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\exists y_n \in N_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A \Rightarrow \{y_n\}$ Cauchy

$\Rightarrow \quad y_n \to x_0$ och $x_0 \in A$

eftersom (A,d) är fullständigt

$\Rightarrow \quad A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ är sluten

Vi har

(A,d) fullständig $\Rightarrow A$ sluten

Mängden A är sluten i universalmgden S m.a.p metriken d: Alla gränspkter i S till A ska finnas med. Det som inte ingår i S vållar ej problem.

Rymden (A,d) är fullständig: Det en Cauchyföljd verkar samla ihop sig kring måste finnas med. Att $A \subset S$ för något S som saknar vissa punkter ursäktar inget.