Kompakta mängder

Flera viktiga resultat för kont. eller begr. funktioner

$$f: A \to R$$

bevisas med en gemensam taktik:

A täcks över med ett stort antal öppna mängder A_a som är utformade så att f har en önskad egenskap lokalt på varje enskilt A_a.

Vi visar sedan att motsvarande gäller för hela A.

Om t.ex

$$|f(x)| \leq a^2 \quad \text{på } A_a$$

så är f begr. på A_a,
men om vi använt

$$A_a, \ a = 1, 2, 3, \ldots$$

för att täcka över A så
får vi ingen gemensam
gräns för $|f|$ på hela A.
Om det däremot räcker
med t.ex

$$A_1, A_3, A_4 \text{ och } A_7$$

för att täcka över A så har vi

$$|f(x)| \leq 49, \ x \in A.$$

Jmf Th 3.2.

Vi säger att en mängd A
är kompakt om varje
övertäckning med oändligt
många öppna mängder överlappar
så mycket att det räcker
med ändligt många av dem
för att fortfarande täcka
hela A (jmf löv på gräsmatta:
om den är helt täckt av
oändligt många löv så kan
vi kratta upp alla utom ändligt
många lämpligt placerade och
ändå ha gräsmattan täckt).

Vi kan visa att en kont. fkn

$$f : A \to R$$

alltid är likformigt kont. om A är kompakt med liknande resonemang:

Om f är kont. i $x \in A$ så får vi

$$|f(u) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

om

$$d(u,x) < \delta_x(\varepsilon)$$

Olika δ för olika x innebär att vi inte visat likf. kont.

Steg 1 Vi täcker över A med bollar $N_{\frac{1}{2}\delta_x(\varepsilon)}(x)$. För $u \in N_{\frac{1}{2}\delta_x(\varepsilon)}(x)$ får vi

$$d(u,x) < \tfrac{1}{2}\delta_x(\varepsilon) < \delta_x(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$|f(u) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Vi har fortfarande kvar δ:s beroende av x.

Steg 2 A är kompakt och då kan vi plocka ut N st bollar $N_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}(\varepsilon)}(x_k)$, $k = 1, \ldots, N$ s.a

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} N_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}(\varepsilon)}(x_k)$$

För varje ε får vi

$$\delta(\varepsilon) = \min_{k=1..N.} \tfrac{1}{2}\delta_{x_k}(\varepsilon)$$

och får

$d(u, x_k) < \delta \Rightarrow |f(u) - f(x_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (1)

för alla bollarna.

Samma δ duger f.a. x_k, $k = 1, \ldots, N$ och de N bollarna täcker tillsammans hela A. Vi har utnyttjat kompaktheten och är på god väg att visa likformighet. Återstår för oss att visa att vi kan ersätta x_k med ett godtyckligt v och få

$$d(u,v) < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon \quad (2)$$

Steg 3 För u, v som uppfyller

$$d(u,v) < \delta$$

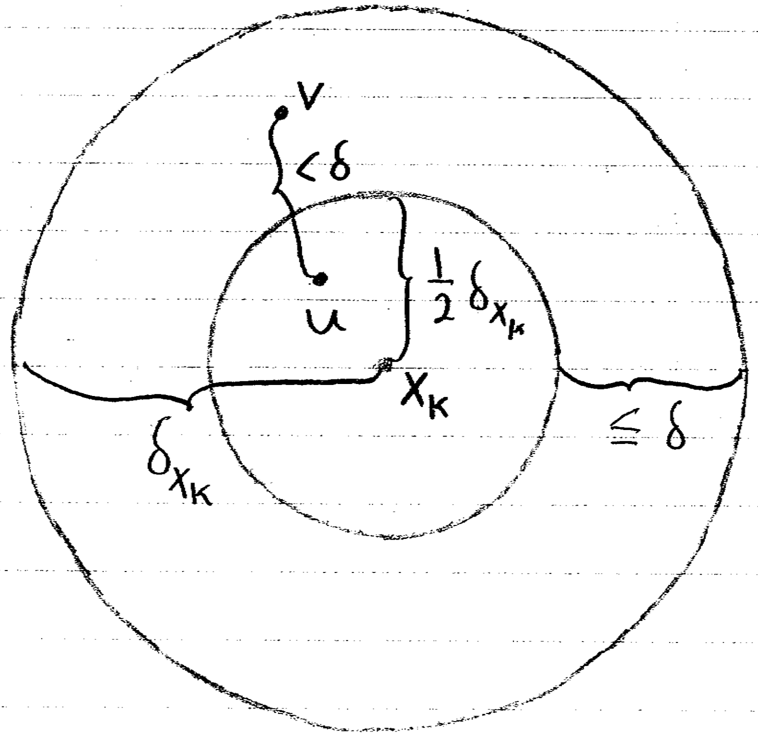
har vi

$$d(u, x_k) < \delta,$$

där x_k är centrum i den boll $N_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}(\varepsilon)}(x_k)$ som u tillhör och

för v gäller

$$d(v, x_k) \leq d(v,u) + d(u, x_k) < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k} \leq \delta_{x_k}$$



Vi får nu

$$|f(u)-f(v)| \leq |f(u)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(v)|$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vi har visat att

$$|u-v| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$$

oavsett var i A u och v ligger.

Kompakt vs sluten och begränsad:

I Th3.2 antas att A är kompakt, men i Th4.13 att A är sluten och begränsad. Båda bevisen bygger dock på kompakthet.

Är kompakt detsamma som sluten och begränsad?

Th 10.18 A är kompakt $\Rightarrow$ A är sluten och begränsad.

Bevis: Motsägelsebevis

I A ej sluten $\Rightarrow \exists x_0 \notin A$ som är gränspunkt till A $\Rightarrow$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A - N_{\frac{1}{n}}(x_0)) = A,$$

men ingen ändlig delövertäckning

$$\bigcup_{n=1}^{N}(A - N_{\frac{1}{n}}(x_0))$$

täcker hela A. x_0 är ju en gränspunkt till A och då innehåller även $N_{\frac{1}{N}}(x_0)$ punkter ur A.

A ej sluten $\Rightarrow$ A ej kompakt

är detsamma som

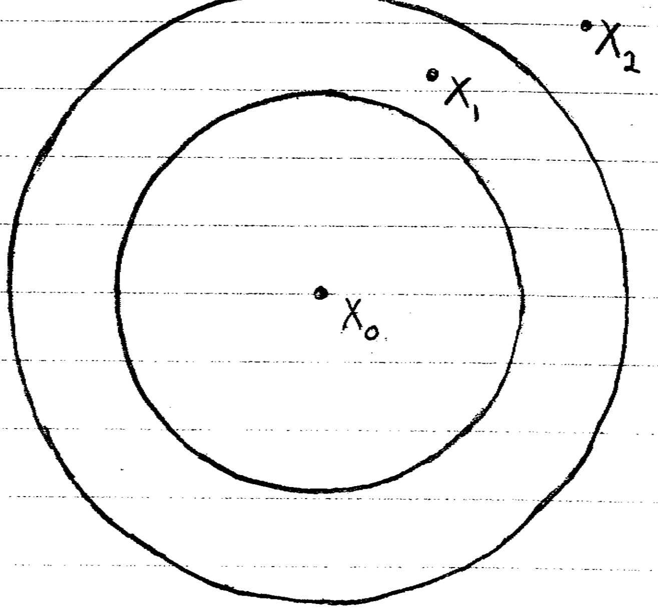
A kompakt $\Rightarrow$ A sluten   V.S.B

II Vi har alltid

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(x_0) \, , \quad x_0 \in A$$

men om A är obegränsad ryms den inte i någon given boll $N_N(x_0)$ och således inte i någon delövertäckning

$$\bigcup_{n=1}^{N} N_n(x_0)$$



$\Rightarrow$ A ej kompakt.

Kompakthet inbegriper alltså slutenhet och begränsning, men är det samma sak?

I rymder av ändlig dimension (t.ex $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^n$) är svaret ja.

Th2.12 **Heine-Borels teorem**

$\left.\begin{array}{l}A \text{ sluten och begränsad i } (S,d) \\ (S,d) \text{ av ändlig dimension}\end{array}\right\} \Rightarrow$

A är kompakt.

Bevis: Bevisidéen är att anta att det finns övertäckningar $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ som inte går att reducera till $\{G_i\}_{i=1}^{N}$ och leda in detta i en motsägelse

Vi antar att $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ täcker över F, men att ingen delövertäckning $\{G_i\}_{i=1}^{N}$ klarar detta

F begränsad $\Rightarrow F \subset [-M, M]$
$\Rightarrow$ (minst) ett av $[-M, 0] \cap F$
$[0, M] \cap F$ behöver oändligt många mängder ur $\{G_i\}$ för att övertäckas. Vi kallar den halvan av $[-M, M]$ för I_0. Om

$$I_0 = [-M, 0]$$

måste minst ett av

$$[-M, -\tfrac{1}{2}M] \cap F \text{ och } [-\tfrac{1}{2}M, 0] \cap F$$

behöva oändligt många G_i för att övertäckas.

Vi kallar den halvan av $[-M, 0]$ I_1. Om

$$I_1 = [-\tfrac{1}{2}M, 0]$$

kan denna mängd delas

in i två halvor, varav minst

den ena kräver oändlig

övertäckning av F o.s.v.

Vi får

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \ldots$$

och (se Th2.6)

$$\lim_{N\to\infty} \bigcap_{n=1}^{N} I_n = X_0, \quad X_0 \text{ unikt.}$$

$I_n \cap F$ innehåller oändligt

många punkter ur F

$\Rightarrow$ X_0 gränspunkt till F.

F sluten $\Rightarrow$ $x_0 \in F$.

Vi visar nu att detta leder till att det finns en ändlig övertäckning av något I_m och vi får en motsägelse:

Om $x_0 \in F$ måste $x_0 \in G_{i_0}$ för något i_0.

G_{i_0} öppen $\Rightarrow$ $N_r(x_0) \subset G_{i_0}$, $r > r_0$

Vi får

$$I_m \subseteq N_r(x_0), \quad m > m_0$$

och vi har övertäckt I_m med <u>en</u> mängd G_{i_0}.

Motsägelsen är ett faktum.

Skiss — Vi antar att F täcks av $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, men inte av $\bigcup_{i=1}^{N} G_i$.

I — F begr. $\Rightarrow F \subseteq [-M, M]$

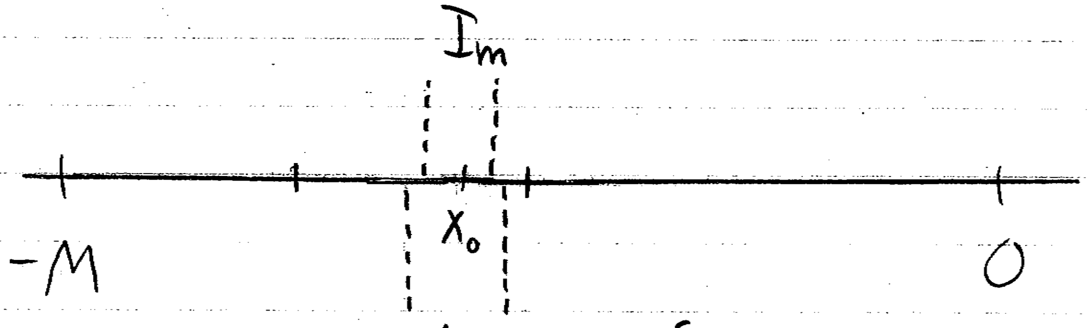
Successiva halvering ger att

$I_0 \cap F \supset I_1 \cap F \supset I_2 \cap F \supset \ldots$

inte heller täcks av $\bigcup_{i=1}^{N} G_i$

Th2.6 — $\left.\begin{array}{l} \lim I_n = x_0 \\ I_n \cap F \text{ oändlig} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0$ gränspkt.

II — F sluten $\Rightarrow x_0 \in F \Rightarrow$



$N_r(x_0) \subset G_{i_0}$

G_{i_0} öppen $\Rightarrow x_0 \in N_r(x_0) \subset G_{i_0} \Rightarrow$ Mots.

Notera: Beviset av Heine-Borel är väldigt likt beviset av Bolzano-Weierstrass. Vi skapar t.ex en konvergent följd av element ur F. Faktum är att det finns flera olika, men ekvivalenta, typer av kompakthet. Vi har t.ex:

F är kompakt (övertäckning)

$$\Longleftrightarrow$$

Varje följd i F har en konvergent delföljd (följdkompakt).

Vi bevisar detta senare.

Se Th 10.21, 24.

För mängder F i rymder
(S,d) av ändlig dim har vi nu

F sluten och begr. $\Rightarrow$ F kompakt

Vi vet redan att

F kompakt $\Rightarrow$ F sluten och begr

oavsett ändlig eller oändlig dim.

För (S,d) av ändlig dim
har vi alltså

F kompakt

$\Leftrightarrow$

F sluten och begränsad

Gäller ekvivalensen allmänt?

Nej, för rymder av oändlig dim kan vi inte lita på att

Sluten och begr $\Rightarrow$ kompakt

Ex. För R^∞ med metriken

$$d(u,v) = \sup_{k=1,\dots} |u^{(k)} - v^{(k)}|.$$

är enhetsbollen sluten och begränsad, men inte kompakt. Vi visar att $N_1(0)$ är sluten (begr. uppenbar)

Vi antar $\{x_n\}$ tillhör $N_1(0)$ och att

$$x_n \to x \quad (d(x_n, x) \to 0).$$

Då har vi

$d(x,0) \leq d(x_n,0) + d(x,x_n) \leq$

$1 + d(x,x_n) < 1 + \varepsilon$ f.a $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow d(x,0) \leq 1 \Rightarrow x \in N_1(0)$

$\Rightarrow N_1(0)$ är sluten.

Vi bildar nu följden $\{x_n\}$ med

$x_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

$x_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots)$

$x_3 = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \ldots)$

o.s.v. Vi ser att

$d(x_n, x_m) = \frac{1}{2}$ f.a $n \neq m$

Ingen delföljd kan vara en Cauchyföljd fastän $\{x_n\}$ ligger helt inne i $N_1(0)$.

$N_1(0)$ är alltså inte följdkompakt
fastän den är sluten och begr.
och således inte heller kompakt
i övertäckningsmening.

Kompakta mängder och rymder

D10.10 En mängd F i (S,d) är kompakt om vi ur varje övertäckning $\mathcal{G}$ av F kan välja $G_i \in \mathcal{G}$, $i=1,\ldots,n$ så att $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} G_i$.

D10.10' En rymd (S,d) är kompakt om S är kompakt.

Notera Om F tillhör (S,d) och är kompakt så är (F,d) kompakt. Självklart?

Inte viktigt, men nästan.

S innehåller fler öppna

mängder som kan vara med och övertäcka $F \subset S$ än vad F själv gör, men de öppna mängderna i (F,d) är alltid av typen $G \cap F$ för något G ur (S,d).

Vi kan alltså göra precis samma övertäckningar som i (S,d) och skala bort allt som inte hör till F.

Kompakt
vs
fullständig

Kompakt vs fullständig

Cor s322 Kompakta rymder är alltid fullständiga

Bevis: En rymd (S,d) är fullständig om alla Cauchyföljder $\{x_n\}$ i S konvergerar mot ett $x \in S$.

$\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ samlar ihop sig

(S,d) är kompakt $\Rightarrow$ $x_{n_j} \to x \in S$

$\Rightarrow$ $x_n \to x \in S$,

d.v.s (S,d) är fullständig

Däremot är inte alla fullständiga rymder kompakta

Ex. Vi vet (Ex 10.10) att

$$(B[0,1], d)$$

med

$$d(u,v) = \sup_{x \in [0,1]} |u(x) - v(x)|$$

är fullständig.

Eftersom

$$C[0,1] \subset B[0,1]$$

är sluten är (Ex 10.11, s310-11)

$$(C[0,1], d)$$

en fullständig metrisk rymd.

$C[0,1]$ är däremot inte kompakt eftersom den inte är begränsad:

$u \in C[0,1] \Rightarrow a \cdot u \in C[0,1]$

$\Rightarrow d(au, 0) \overset{*}{=} |a|\, d(u, 0)$ f.a $a \in R$.

$C[0,1]$ ryms inte i någon boll $N_r(0)$ och är alltså inte begränsad.

Om F är en kompakt mängd i (S,d) så är (F,d) en kompakt metrisk rymd och därmed fullständig oberoende av S.

* Gäller inte för alla metriker men för denna.

Om F är sluten i (S,d) måste vi luta oss mot att (S,d) är fullständig för att (F,d) säkert ska vara fullständig. Kompakthet tycks vara en "självständigare" egenskap än fullständighet.

Kompakt $\Rightarrow$ fullständig, men inte tvärtom.

Vad fattas för att en fullständig rymd ska vara kompakt? Förmodligen någon slags begränsning!

10.22

Total begränsning (prekompakthet.

D10.12 Om vi alltid kan täcka över S med ändligt många bollar $N_\varepsilon(x_i)$, $i=1,2,\ldots,N(\varepsilon)$, $x_i \in S$, f.a. $\varepsilon>0$ så är (S,d) totalt begränsad.

Enligt Th10.22 har alla följder $\{x_n\}$ i en tot. begr rymd (S,d) en delföljd som är Cauchy,

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad j,k > N(\varepsilon).$$

Det som fattas för att $\{x_{n_j}\}$ ska konvergera (= följdkompakthet) är att det x $\{x_{n_j}\}$ hoppar sig kring tillhör S.

Fullständighet hos (S,d) löser detta.

Vi har

(S,d) fullständigt och tot. begr

$\Rightarrow$ (S,d) kompakt

Notera: Enligt Th 10.22 är ovanstående en ekvivalens

Med fullständighet och total begränsning har vi hittat motsvarigheter till slutenhet och begränsning som duger även i rum av oändlig dim. Vi hittat ett tredje sätt att beskriva kompakthet.

Kompakthet i tre ekvivalenta former

(S,d) är ett metriskt rum
och $A \subseteq S$.

1) $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{1}^{N} A_n$

$$\Longleftrightarrow$$

2) $x_k \in A \Rightarrow \lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x \in A$

$$\Longleftrightarrow$$

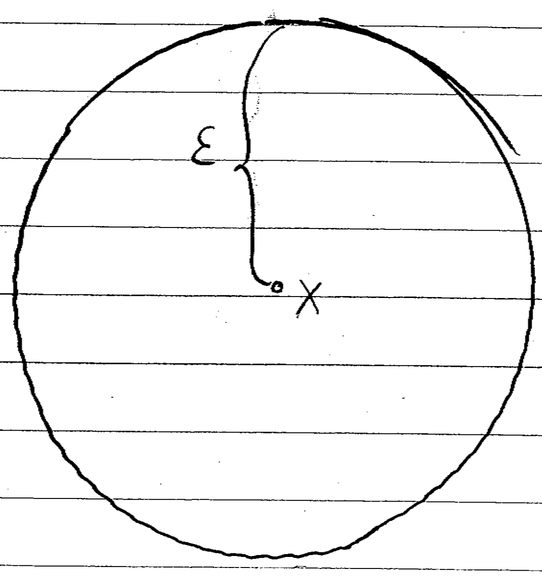
3) $\begin{cases} (A,d) \text{ fullständig} \\ A \subseteq \bigcup_{1}^{N(\varepsilon)} N_\varepsilon(x_n) \quad \text{f.a. } \varepsilon > 0. \end{cases}$

1) Övertäckningskompakt
2) Följdkompakt
3) Prekompakt + fullständighet

Förberedelse till bevis

$\{X_k\}$ har en hopningspunkt $\Rightarrow$
en delföljd stabiliserar sig
med oändligt många element
nära ett element X $\Rightarrow$
$N_\varepsilon(X)$ innehåller oändligt
många element ur $\{X_k\}$

Om inte, ingen konvergens
av delföljd mot X.



$1) \Rightarrow 2)$

$\{x_k\}$ saknar hopningspunkt $\Rightarrow$

$\exists \varepsilon(x) > 0$ s.a. $N_{\varepsilon(x)}(x) \cap A$

innehåller ändligt många element

ur $\{x_k\}$ f.a $x \in A$.

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} N_{\varepsilon(x)}(x) \Rightarrow [1)]$$

$$A \subseteq \bigcup_{1}^{N} N_{\varepsilon(x_r)}(x_r)$$

som är en ändlig union av

mängder som var och en

innehåller ändligt många

element ur $\{x_k\}$ $\Rightarrow$

$\{x_k\}$ ändlig (motsägelse)

2) $\Rightarrow$ 3)

a) $\begin{cases} \{x_k\} \text{ Cauchy} \\ \{x_k\} \text{ har hopningspkt} \end{cases} \Rightarrow$

$$x_k \to x \in A \quad \Rightarrow$$

(A,d) fullständig.

b) Ingen N_ε-övertäckning till A $\Rightarrow$

$\exists x_k \in A$ s.a. $x_{k+1} \in A - \bigcup_{i}^{k} N_\varepsilon(x_i)$ $\Rightarrow$

$\{x_k\}$ saknar hopningspunkt i A

(slingrar sig ur varje ε-boll)

1,2,3) A kompakt $\Rightarrow$

4) A sluten och begränsad

men inte tvärtom generellt

(dock i t.ex R^n, Heine-Borel)

Bevis: A ej sluten $\Rightarrow \exists x_0 \in \bar{A} - A \Rightarrow$

$$A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} S - N_{\frac{1}{n}}(x_0)$$

men

$$\bigcup_{1}^{N} S - N_{\frac{1}{n}}(x_0)$$

täcker ej A $\Rightarrow$

A ej kompakt

$$\left\{\begin{array}{l}A \text{ ej begränsad} \\ x_0 \in S \text{ godtycklig}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} N_n(x_0) \quad \text{men}$$

$$\bigcup_{1}^{N} N_n(x_0) \quad \text{täcker inte } A$$

om A är obegränsad $\Rightarrow$

A ej kompakt.

Vi sammanfattar

Ändlig dimension

Kompakt

$\Longleftrightarrow$

Sluten och begränsad

Allmänt

Kompakt $\Longrightarrow$

sluten och begränsad

Varför kompakthet?

Vi behöver något mer

för att få de bra egenskaper

som slutna och begränsade

mängder har i ändligt dim även allmänt

Övertäckningskompakt.

$\Longleftrightarrow$

Följdkompakt.

$\Longleftrightarrow$

Totalt begränsad om (S,d) är fullständigt.

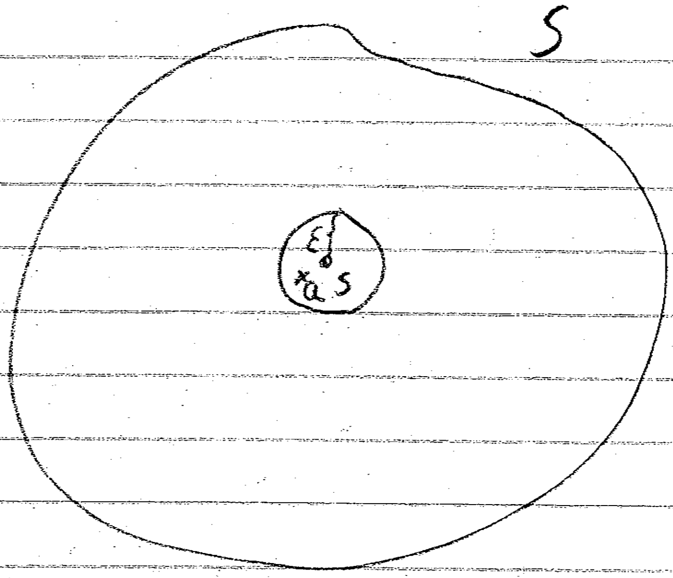
F kompakt i (S,d) $\Rightarrow$ (F,d) kompakt oavsett (S,d):s egenskaper.

Täthet

A är tät i (S,d) om det

för alla $s \in S$ och $\varepsilon > 0$ finns

$a \in A$ s.a. $d(a,s) < \varepsilon$



Alt $\lim_{k \to \infty} d(a_k, s) = 0, \quad a_k \in A$

1) $Q \times Q$ är tät i $(R^2, |\cdot|)$

2) $S = C[a,b]$

A: alla polynom $p : [a,b] \to R$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

A är tät i (S,d), d.v.s

$\exists p_k \in A$ s.a.

$$\lim_{k \to \infty} d(p_k, f) = 0$$

f.a. $f \in C[a,b]$ (se s 311)