Th 9.11 (Leibniz regel)

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \quad , x \in [a,b$$

om $\frac{\partial}{\partial x} f$ är kont. på $[a,b] \times [c,d]$

Notera: $\partial_x f$ är därför likformigt kont. på $[a,b]\times[c,d]$, vilket utnyttjas i beviset.

Bevis: Vi inför

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy\,;$$

$$\frac{1}{h}\left(g(x+h) - g(x)\right) = \frac{1}{h}\int_c^d f(x+h,y) - f(x,y)\,dy =$$

$$= [\text{M-v-satsen}] = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(t,y)\,dy \rightarrow$$

$$\int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \quad \text{för } h \to 0$$

eftersom $\partial_x f$ är likformigt kont. på $[a,b] \times [c,d]$;

$$\left| \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(t,y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \right| \leq$$

$$\int_c^d \varepsilon\,dy = \varepsilon(d-c) \to 0 \quad \text{för } \varepsilon \to 0$$

$$\therefore \quad g'(x) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

Likformig konvergens för generaliserade integraler

D9.5 $\int_a^\infty f(x,y)\,dy$

konvergerar likformigt mot $g(x)$ på I

om

$$\left|\int_a^r f(x,y)\,dy - g(x)\right| < \varepsilon$$

för alla $r > R(\varepsilon)$

oberoende av $x \in I$.

Th 9.15 (Cauchys kriterium)

Antag f kont. på $I \times [a, \infty)$

Då gäller

$$\left|\int_r^s f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon, \quad r,s > T(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \text{ likf. konv.}$$

Bevis: Nej.

Th 9.16 (M-test)

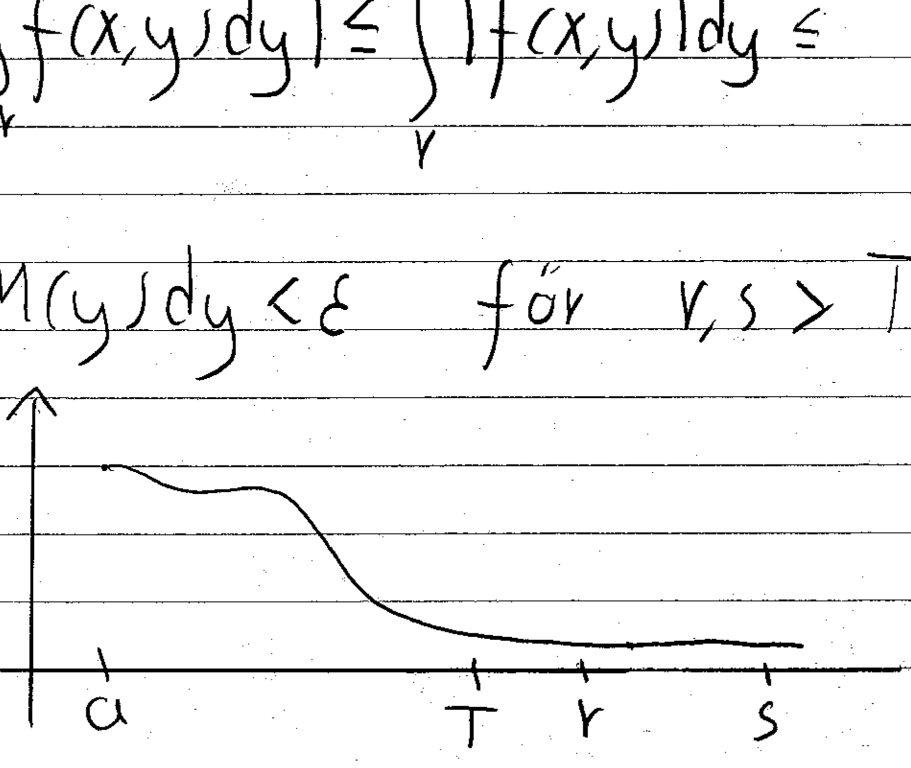
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ kont. på } I \times [a, \infty) \\ |f(x,y)| < M(y) \\ \int_a^\infty M(y)\,dy \text{ konv} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{konv. likf.}$$

Bevis: Vi har

$$\left|\int_r^s f(x,y)\,dy\right| \leq \int_r^s |f(x,y)|\,dy \leq$$

$$\int_r^s M(y)\,dy < \varepsilon \quad \text{för } r, s > T$$



Th 9.17

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ kont. på } [a,b]\times[c,\infty) \\ g(x)=\int_c^\infty f(x,y)\,dy \text{ konv. likf} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$g \text{ kont. på } [a,b]$$

Bevis: Nej.

Th 9.18 $\left.\begin{array}{l} f \text{ kont. på } [a,b] \\ \int_c^{\infty} f(x,y)\,dy \text{ konv. likf} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\int_c^{\infty}\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$$

Bevis: Nej.

Th 9.19 $\left.\begin{array}{l} f, \frac{\partial}{\partial x} f \text{ kont. på } [a,b] \times [c,\infty) \\ g(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy \text{ konv.} \\ \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \text{ likf. konv.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^\infty f(x,y)\,dy = \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

Bevis: $\left.\begin{array}{l} \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \text{ konv. likf. på } [a,b] \\ \frac{\partial}{\partial x} f \text{ kont. på } [a,b] \times [c,\infty) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ (Th 9.17) $\Rightarrow$

$$F(x) = \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

kont. på $[a,b]$

För $x_0 \in (a,b)$ gäller

$$\int_a^{x_0} F(x)\,dx = \int_a^{x_0}\int_c^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= [\text{Th } 9.18] = \int_c^{\infty}\int_a^{x_0} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_c^{\infty} f(x_0,y) - f(a,y)\,dy =$$

$$g(x_0) - g(a) \Rightarrow$$

$$g'(x_0) = F(x_0) = \int_c^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

f.a. $x_0 \in (a,b)$ V.S.B.