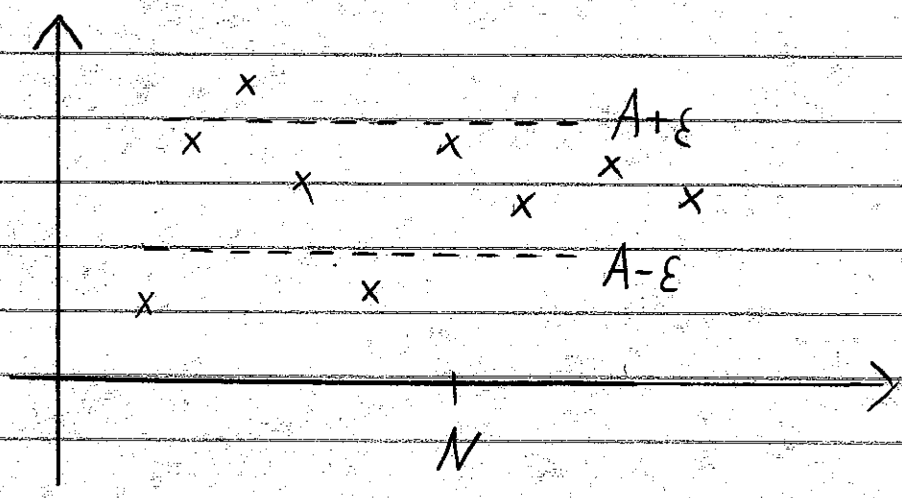
2.1 Gränsvärden för talföljder

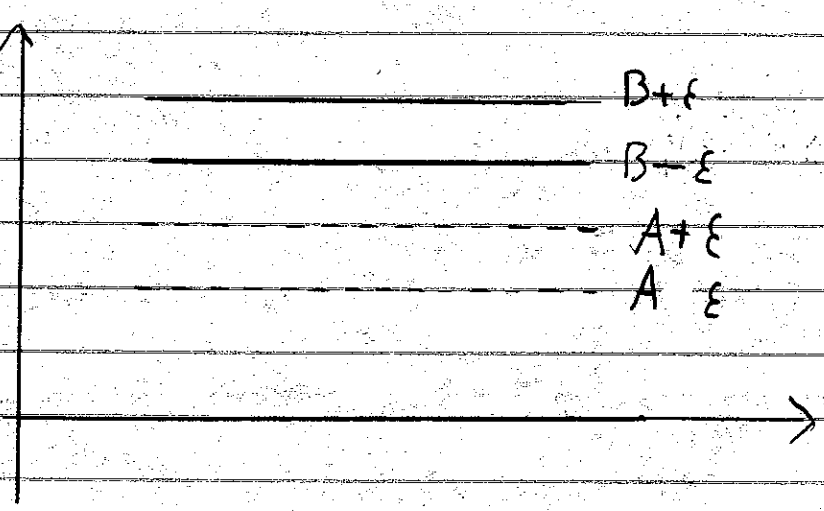


$\lim a_n = A$ om

$n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

Se Definition 2.1.

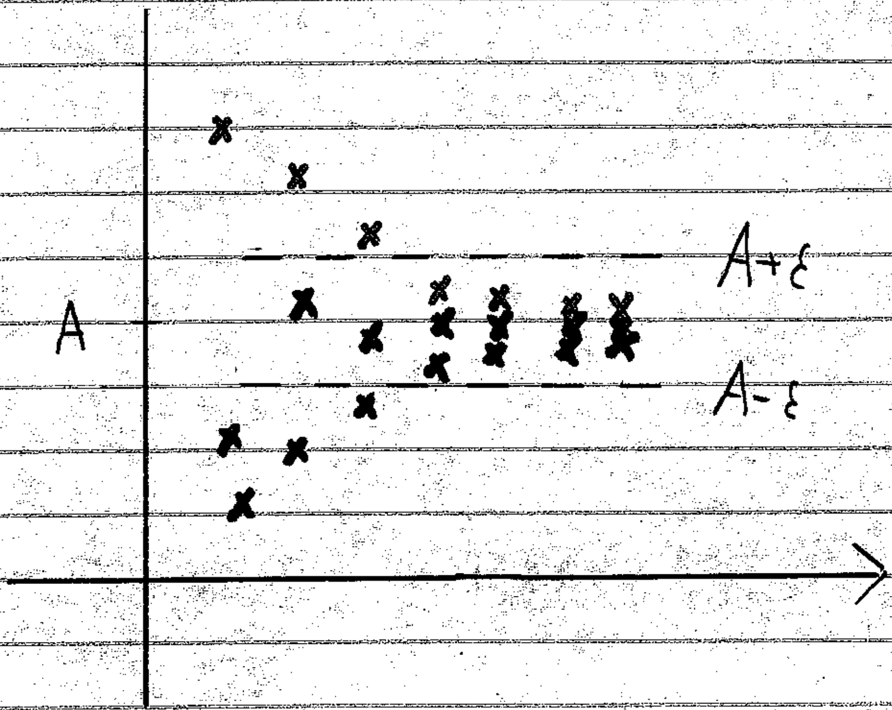
Gränser är unika



$\lim a_n = A$, $\lim a_n = B \Rightarrow$

$A \neq B$ omöjligt

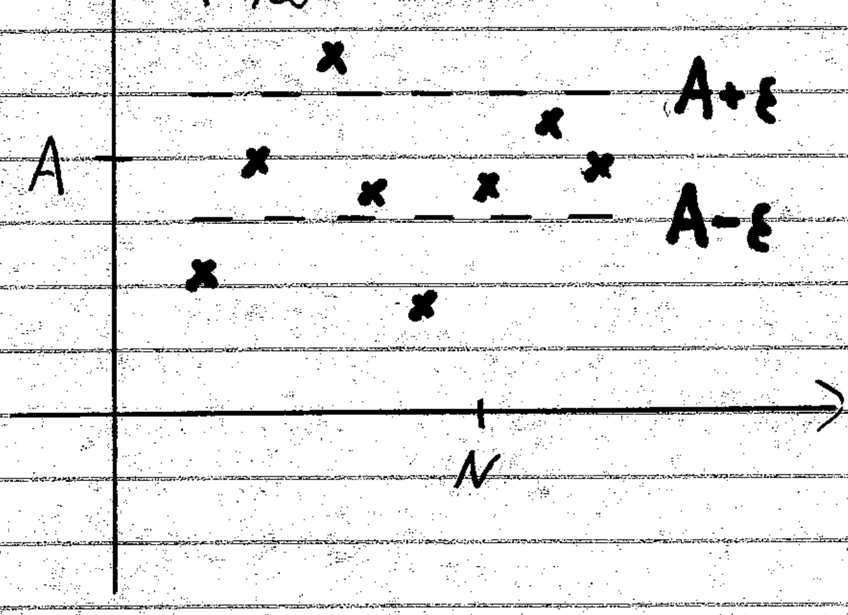
Se Th 2.1.



$a_n \le b_n \le c_n \Rightarrow$ b_n kläms ihop

Se Th2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim a_n = A$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ exist $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ begr.



$a_n \le \max\{a_1, \dots, a_N, A+\varepsilon\}$ för $a_n \ge 0$.

Se Lemma s40. Viktigt.

Th2.3 Tryckfel i e)

e) $\lim a_n/b_n = A/B$

Normerade rum

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{i } X$$

innebär att

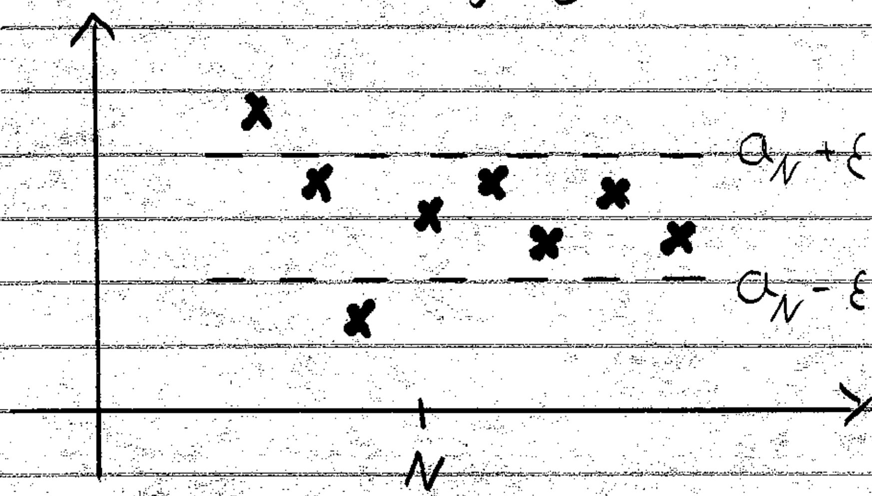
$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_X = 0.$$

Cauchyföljder

Fungerar även för ofullständiga mängder. Gränsen ingår ej i definitionen.

$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$

Vi studerar följdens stabilisering.



$|a_m - a_N| < \varepsilon$ f.a. $m \geq N$, men gränsen A kanske inte ingår i den talmängd vi studerar. Cauchyföljder är begränsade. Se Th 2.4.

Ex. Vi studerar

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

som en följd i $\mathbb{Q}$.

$m, n > N \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right| < \varepsilon$.

Vi har en Cauchyföljd, men gränsvärdet $e \notin \mathbb{Q}$.

Följden konv. inte i $\mathbb{Q}$.

Läs: Kap. 2.1

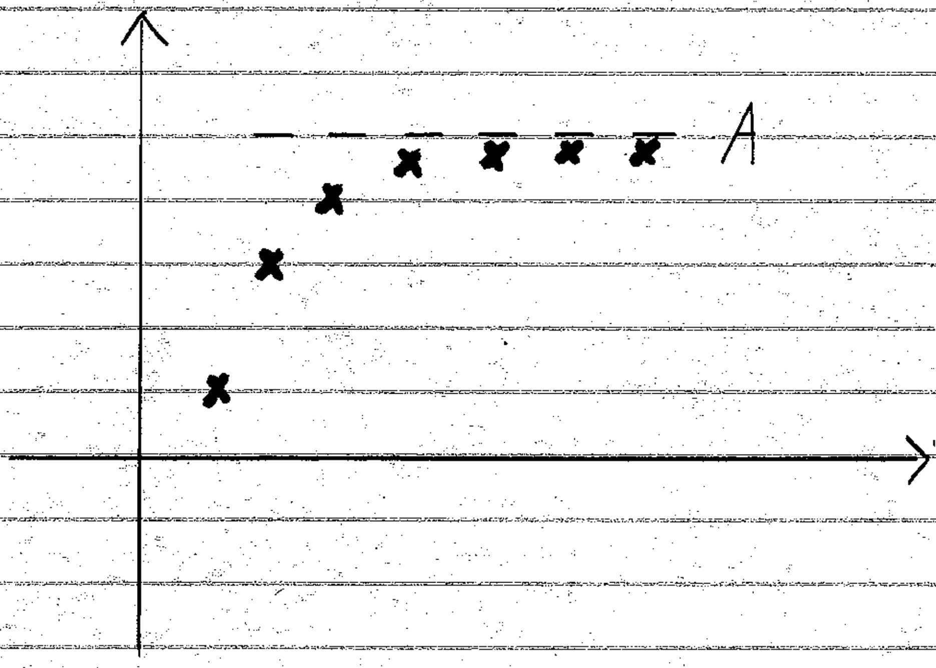
$\Rightarrow$

E,' vattat

2.2 Begränsade följder

Följder som är växande och begränsade konv. enligt axiomet om övre gräns.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in N}\{a_n\} = A$$



Se Th 2.5.

Inkapsling: $I_n = [a_n, b_n]$ går ihop till en punkt A för $n \to \infty$ om $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \ldots$ och $\lim a_n - b_n = 0$

Bevis: $\{a_n\}$ växande och begr (A.gr)

$\Rightarrow \lim a_n = A \leq b_k$ f.a. $k \in N$

$\Rightarrow A \in [a_k, b_k]$ f.a. $k \in N$.

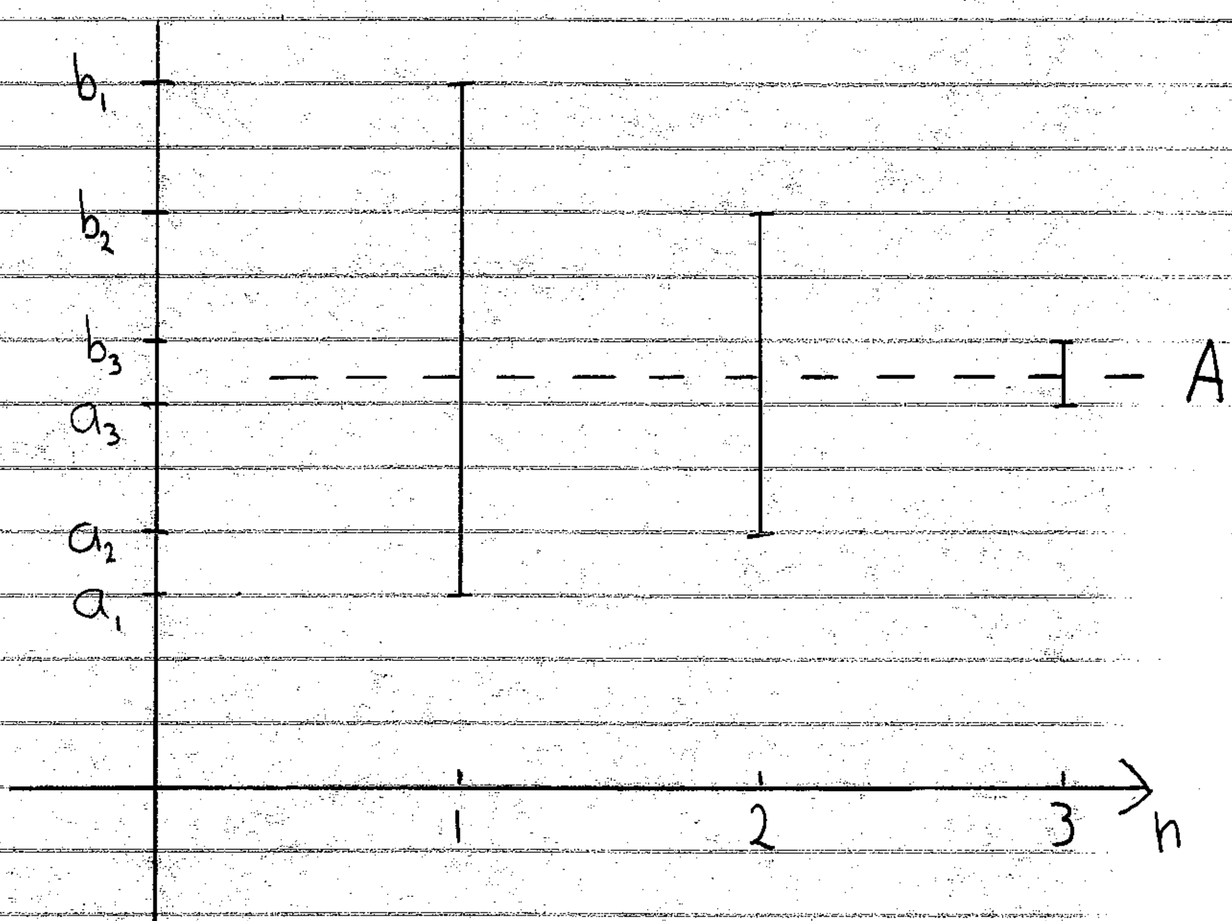
Antag $B \in [a_k, b_k]$ f.a. $k \in N$

$\Rightarrow B - a_k \in [0, b_k - a_k]$ f.a. $k \in N$

$\Rightarrow \lim B - a_k = 0$

$\Rightarrow B = \lim a_k = A$.

$\Rightarrow$ Intervallen $[a_k, b_k]$ har bara en punkt gemensam.



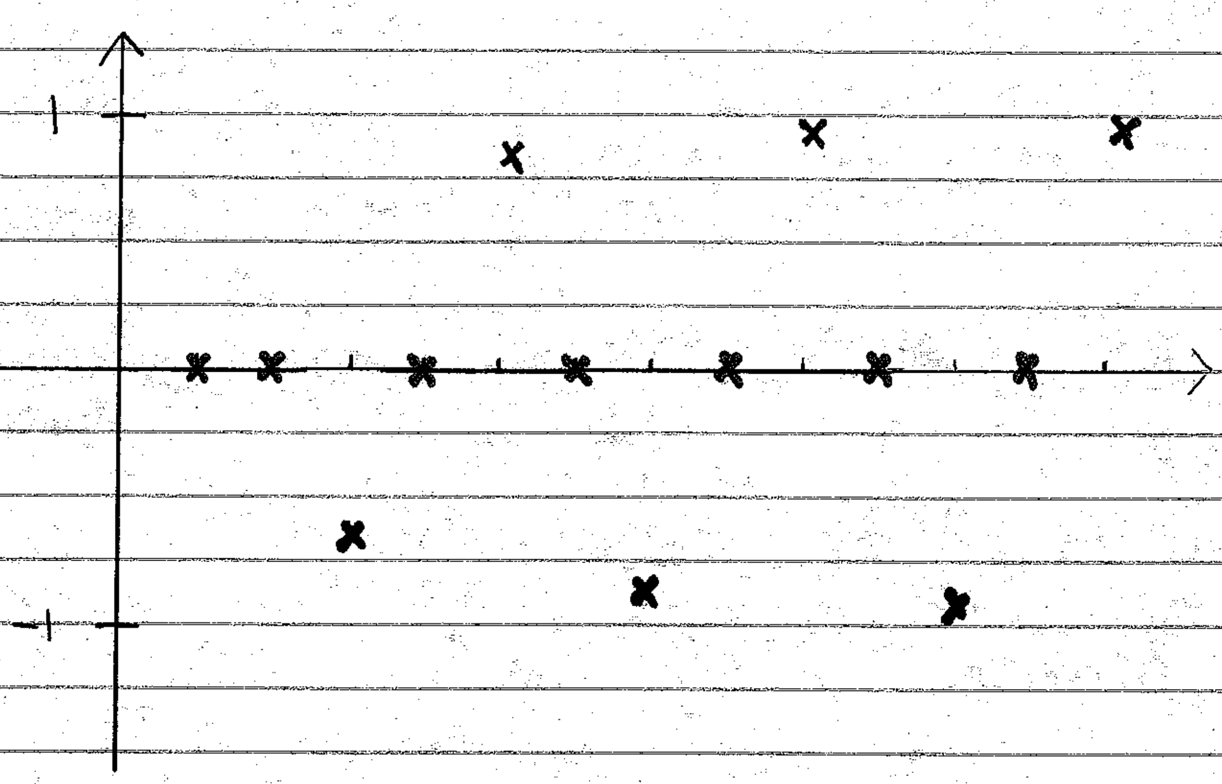
b1
b2
b3
a3
a2
a1
A
1
2
3
n

En delföljd $\{a_{n_k}\}$ till $\{a_n\}$ innehåller vissa av elementen i $\{a_n\}$.

Ordningen ändras ej.

Ex. Vi studerar

$$\{c_n\} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$



Följden divergerar genom oscillation.

Konvergens finns endast i delföljder.

$n_k = 2k$

$$C_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \sin \pi k = 0 .$$

$n_k = 4k-1$

$$C_{4k-1} = \left(1 - \frac{1}{4k-1}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{4k-1}\right) \to -1 .$$

$n_k = 4k+1$

$$C_{4k+1} = \left(1 - \frac{1}{4k+1}\right) \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4k+1} \to 1 .$$

Bolzano-Weierstrass sats

Varje begränsad följd i R har en konvergent delföljd.

Bevis: $\{a_n\}$ begr. $\Leftrightarrow$ $|a_n| \leq M$

Var finns oändligt många a_n?

I $[-M,0]$, $[0,M]$ eller båda.

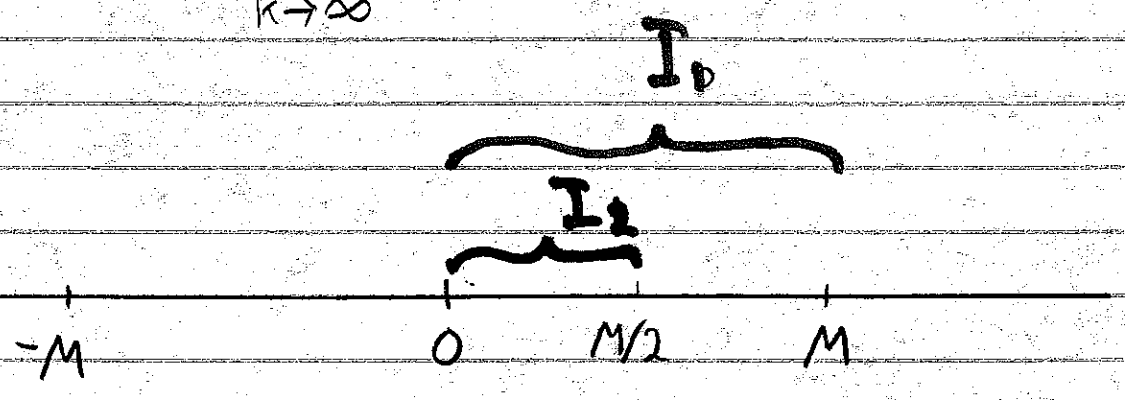
Vi kallar detta intervall I_0.

Oändligt många i ena halvan av I_0.

Kallas I_1.

Inkapsling ger

$$\lim_{k\to\infty} I_k = a.$$



Färglägg

Övning: Vad händer i detta resonemang när olika delföljder går mot olika gränser. Visa gärna m.h.a. figurer.

Visa även i detalj att förutsättningarna är uppfyllda för Th2.6.

Varje Cauchyföljd av reella tal konv.

Bevis: $\{a_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ begr.

$\Rightarrow$ (B-W) exist. konv. delföljd $\{a_{n_k}\}$,

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

Då gäller för nog stort N

$$\left.\begin{array}{l} k>N \Rightarrow |a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2} \\ n,k>N \Rightarrow |a_n-a_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|a_n-A| = |a_n-a_{n_k}+a_{n_k}-A| \leq$$

$$|a_n-a_{n_k}| + |a_{n_k}-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$ V.S.B.

Notera

1) För alla Cauchyföljder $\{a_n\}$ i R finns gränsen $A \in R$ där. R är fullständig.

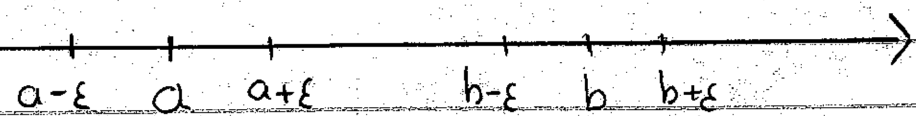
2) $\{a_n\}$ är konvergent

$$\Leftrightarrow$$

alla delföljder $\{a_{n_k}\}$ konvergerar mot en och samma gräns.

Hopningspunkter

Nära varje tal a som är gränsvärde för en konvergent delföljd ligger många tal a_{n_k} ur följden $\{a_n\}$ hopade.



Ex. Hopningspkterna till

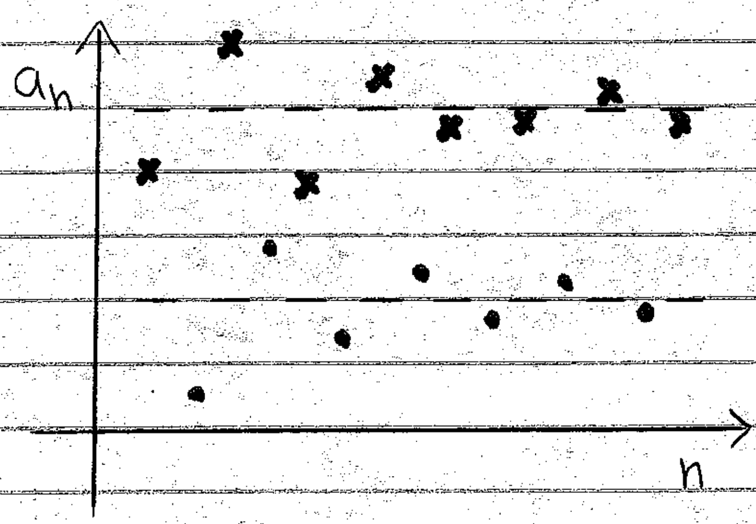
$$\{a_n\} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right\};$$

$\{a_{2k}\}$ hopar sig i 0.

$\{a_{4k-1}\}$ " " i -1.

$\{a_{4k+1}\}$ " " i 1.

$H = \{ \text{hopningspunkter} \}$



$\limsup a_n = \sup H$

$\liminf a_n = \inf H$

Ex. För

$\{a_n\} = \{(1-\frac{1}{n}) \sin \frac{\pi}{2} n$

är hopningspunkterna

$H = \{-1, 0, 1\}$.

$\limsup a_n = \sup H = 1$

$\liminf a_n = \inf H = -1$

Ex. För följden

$\{a_n\} = \{(1-\frac{1}{2})^2, (1-\frac{1}{3})^3, (1-\frac{2}{3})^3, (1-\frac{1}{4})^4, (1-\frac{2}{4})^4,$

$(1-\frac{3}{4})^4, (1-\frac{1}{5})^5, (1-\frac{2}{5})^5, (1-\frac{3}{5})^5, (1-\frac{4}{5})^5, \ldots\}$

är hopningspunkterna

$H = \{e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, \ldots\}.$

$L = \limsup a_n = \sup H = e^{-1},$

$L = \liminf a_n = \inf H = 0.$ Se övn. 219

Notera I: Enligt B-W har varje begränsad följd minst en hopningspkt.

II Alla begrepp i detta avsnitt avser begränsade följder.

För obegränsade uppåt skriver vi

$$\limsup a_n = \infty$$

och nedåt

$$\liminf a_n = -\infty$$

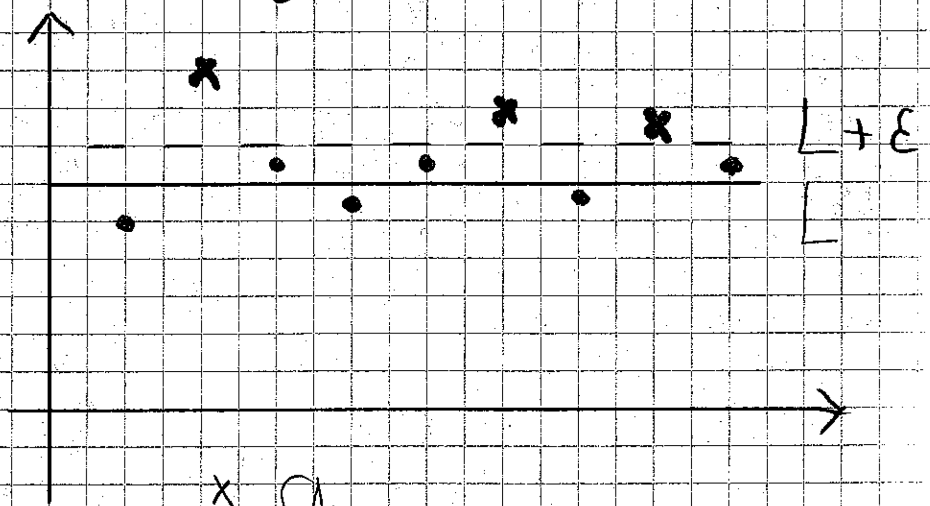
Övning: Fattas det en hopningspkt i H? Vilken i så fall? Se övn 2.19

$\left(\frac{1}{n}\right)^n$

Th 2.9 För $n \geq N$ gäller

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$

Bevis: Motsägelsebevis



$\times$ a_{n_k}

(1) $a_{n_k} > L + \varepsilon$, a_{n_k} begränsad

$\Rightarrow$ (B-W) $\lim a_{n_{k_j}} = b \geq L + \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\limsup a_n \geq b \geq L + \varepsilon > L$

(1) medför motsägelse $\Rightarrow$

$a_n \leq L + \varepsilon$ f.a. $n \geq N$

Övning: Visa $L - \varepsilon \leq a_n$

Cor. $\overline{L} = \limsup a_n = \liminf a_n = \underline{L} = A$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim a_n = A$$

Övn: Visa detta utgående från Th 2.9.