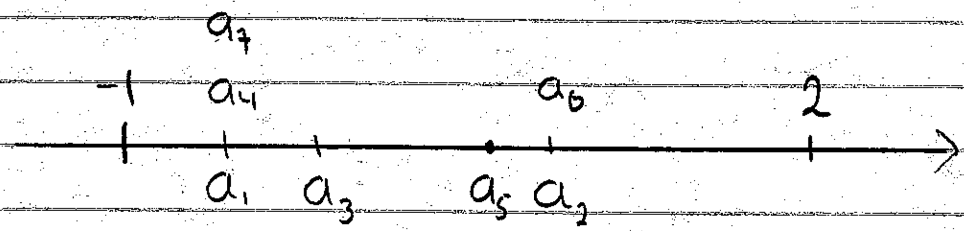
2.3 Mängder av reella tal

Mängd: Avgränsas enbart av vilka element som ingår.

Följd: Snitslad bana genom uppräkneligt många punkter (element) i en mängd som genomlöps i en bestämd ordning. Samma punkt kan passeras flera gånger.



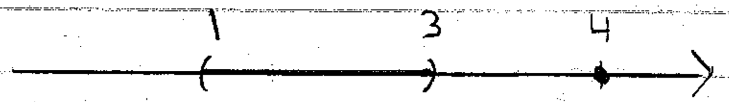
Mängd: $(-1, 2)$

Kontaktpunkt

Gränspunkter: x_0 är en gränspunkt till A om

$N_\varepsilon^*(x_0) \cap A = \{x \in A \mid |x - x_0| < \varepsilon, x \neq x_0\} \neq \emptyset$

d.v.s innehåller något element $x \in A$ oavsett hur litet ε är. Jmf. täthet.

Ex 

$A = (1,3) \cup 4$

- Gränspunkter: Alla $x \in [1,3]$.
- $x=1$ och $x=3$ har grannar i A,

$N_\varepsilon(1) \cap A$ och $N_\varepsilon(3) \cap A$

är icketomma f.a $\varepsilon > 0$, och är därför gränspkter fast $1,3 \notin A$.

Ej gränspkt: $4 \in A$, men ingenting runt 4 tillhör A. Isolerad

Th 2.10.

Bolzano-Weierstrass för mängder.

Varje begränsad mängd $A \subset R$ som innehåller oändligt många element har minst en gränspkt.

Intuitivt: Oändligt många på begränsat område $\Rightarrow$ trångt minst någonstans, kanske överallt.

Ex. $A = \{1 - \frac{1}{n}\}$ har en gränspkt $x = 1$, är infinit och begr., $A \subseteq [0,1]$

Färg

Ex. Q har alla $x \in R$ som gränspunkter eftersom Q är tät i R.

Bevis:

$\{a_n\}$ följd i A, A begränsad

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$ begränsad

$\Rightarrow$ (B-W för följder) $\{a_{n_k}\}$ konv

$\Rightarrow$ $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, $k > N$.

Eftersom $a_{n_k} \in A$ och $a_{n_k} \neq a$ *

innebär detta att a är

gränspunkt till A

* Övning: Visa (se beviset av

B-W för följder) att vi kan

välja $a_{n_k} \neq a$.

Notera: Se s55 för definition

av N_ε och N_ε^*.

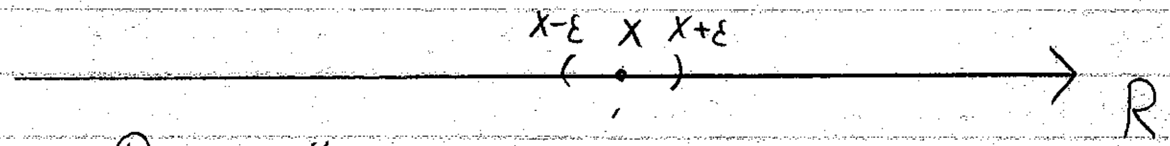
* Varje delintervall vid halveringarna

* kanske stryks

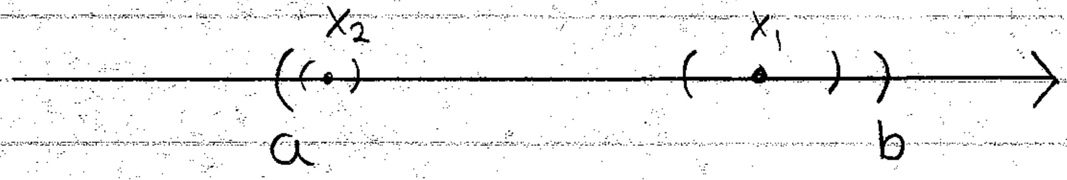
innehåller oändligt många alternativ, $a_n \neq a$.

Öppna mängder

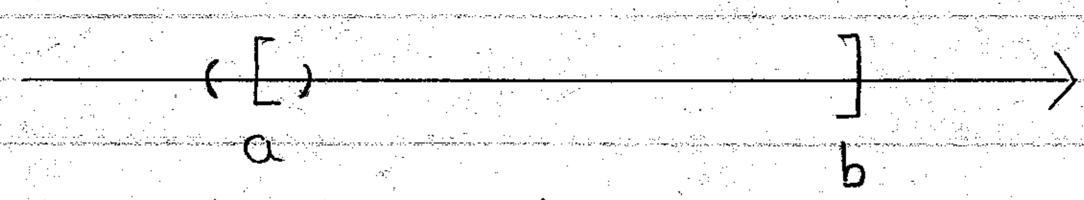
$A \subset R$ är en öppen mängd om det ryms en boll $N_\varepsilon(X)$, $\varepsilon = \varepsilon(X)$, runt varje $X \in A$.

1)


R är öppen.

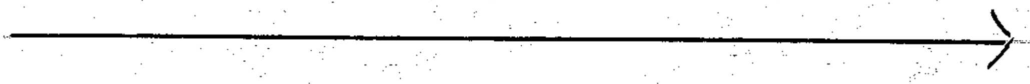
2)


(a,b) är öppen

3)


[a,b] ej öppen. Ingen boll ryms runt $X=a$

4)



Q

Inget intervall (boll) ligger helt i Q. Q är inte en öppen delmängd till R.

∅ räknas som öppen.

Slutna mängder

$A \subset R$ är sluten om

$A' = R - A$ är öppen.

1) $A' = R - R = \emptyset$

$\emptyset$ är tydligen både öppen och sluten.

2) $A' = R - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$

är sluten men inte öppen.

3) $A' = R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

är inte sluten men öppen.

4) $A' = R - Q$

är varken sluten eller öppen.

Detsamma gäller Q;

$Q = (R - Q)'$, $R - Q$ ej öppen.

5) För

$$A = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

får vi

$$A' = [a, b]$$

- som är sluten men ej öppen

- 6) $A = (-\infty, a] \cup [b, \infty) \Rightarrow$

$$A' = (a, b)$$

som ej är sluten men öppen

- Notera I: Öppen och sluten är inte ett motsatspar.

- Notera II: De slutna mängderna (1, 2, 5) innehåller alla sina gränspunkter.

Notera III: $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ är varken öppen eller sluten.

Övning: Är (a,b] eller [a,b) öppna eller slutna?

A är sluten.

$\Longleftrightarrow$

A innehåller alla sina gränspkter (används ofta som definition).

Bevis: ($\Rightarrow$) A' öppen, $a \in A'$

$\Rightarrow$ $N_\varepsilon(a) \subset A'$, ε nog litet

$\Rightarrow$ inget $x \in A$ inom $N_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow$ a ej gränspkt till A.

Övning: Rita figur.

($\Leftarrow$) A innehåller sina gränspkter, $a \in A'$

$\Rightarrow$ a ej gränspunkt till A

$\Rightarrow$ $N_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, ε nog litet

$\Rightarrow$ $N_\varepsilon(a) \subset A'$ $\Rightarrow$ A' öppen

$\Rightarrow$ $A = (A')'$ sluten.

Övertäckningar

Heine-Borels teorem, kompakthet

Kan vi reducera en oändlig övertäckning av ett intervall $[a, b]$ till en ändlig:

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{0}^{\infty} A_n$$

och vi kan välja ut A_{n_k} så

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=0}^{N} A_{n_k} \quad ?$$

För slutna A_n går det inte alltid;

$$A_0 = \{1\}, \qquad A_n = [1 - 2^{-n+1}, 1 - 2^{-n}]$$

$$\Rightarrow \qquad \bigcup_{0}^{\infty} A_n \supseteq [0, 1].$$

Varje ändlig delövertäckning

$$\bigcup_{0}^{N} A_{n_k}$$

missar någon del av $[a, b]$.

$\{A_n\}_0^\infty$ övertäcker $[a,b]$ utan att överlappa (utom i interv. ändp.).

Motsvarande öppna B_n, $n \geq 1$;

$$B_n = (1-2^{-n+1}, 1-2^{-n})$$

$[0,1]$ övertäcks inte av

$$\bigcup_0^\infty B_n,$$

alltså än mindre av någon ändlig delövertäckning.

Öppna övertäckningar måste bestå av överlappande mängder. Många av dem kan vara onödiga.

Heine Borel för R

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ sluten, begr} \\ A \subseteq \bigcup_{a \in A} A_a \text{ , } A_a \text{ öppna} \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{k=0}^{N} A_{a_k}$$

för väl valda A_{a_k}.

Bevis: Senare.

Varje öppen övertäckning av A har en ändlig delövertäckning (kompakthet) $\Rightarrow$

A är sluten och begränsad.

Slutsats (se övn 2.36)

Kompakt $\Leftrightarrow$ sluten och begränsad

Notera I: A behöver inte vara uppräknelig.

Noterall: Ekvivalensen i

Kompakt $\Leftrightarrow$ sluten och begränsad

gäller i R och i andra mängder

av ändlig dimension.

I mängder av oändlig dimension

kan vi endast vara säkra på

att

Kompakt $\Rightarrow$ sluten och begränsad.

Se Th 10.18 s.318

Normerade rum

X är ett linjärt rum och

$\| \ \|_X : X \to R$

- uppfyller f.a. $a, b \in X$
- a) $\|a+b\|_X \le \|a\|_X + \|b\|_X$

b) $\|t \cdot a\|_X = |t| \cdot \|a\|_X$

c) $\|a\|_X = 0 \Leftrightarrow a = 0$

- Kriteriet 2. lyder
- 2'. $\|a_n - a\|_X \to 0$

för ett element $a \in U$.

X är fullständig om $a \in X$.

Notera: $|\cdot|$ är en norm för R.

X

Övning: Låt universalmängden U vara alla funktioner $f: [0,1] \to R$.

1) Visa att

$$X = C[0,1] = \{f \in U \mid f \text{ kont}\}$$

är ett normerat rum för

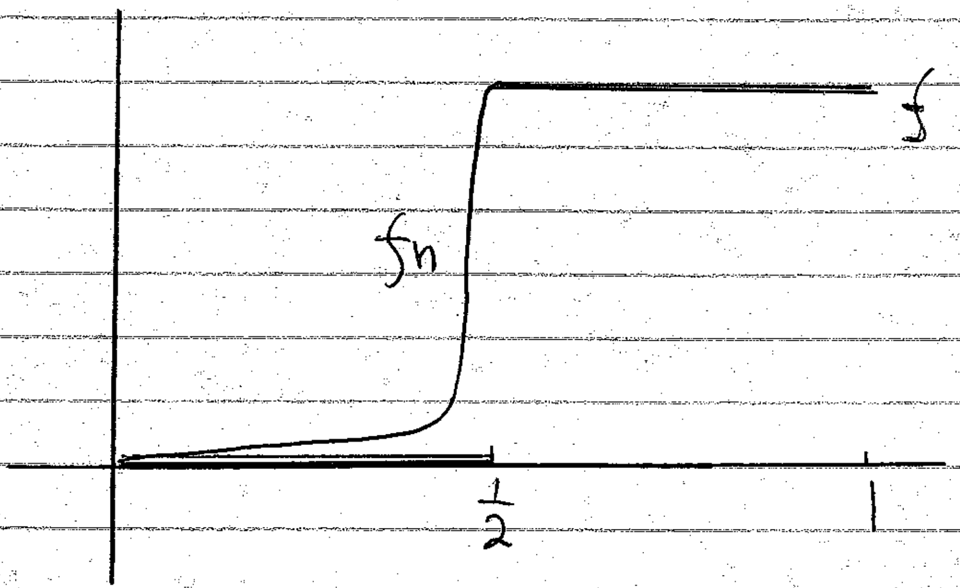
$$\|f\|_X = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1}$$

2)* (Visa med ett exempel att X ej är fullständig. Rita figurer.)

Mer om fullständighet

Vi ger rummet $C[0,1]$ normen

$$\|f\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$



$f_n \in C[0,1]$, $\|f_n - f\|_{L^1(0,1)} \to 0$

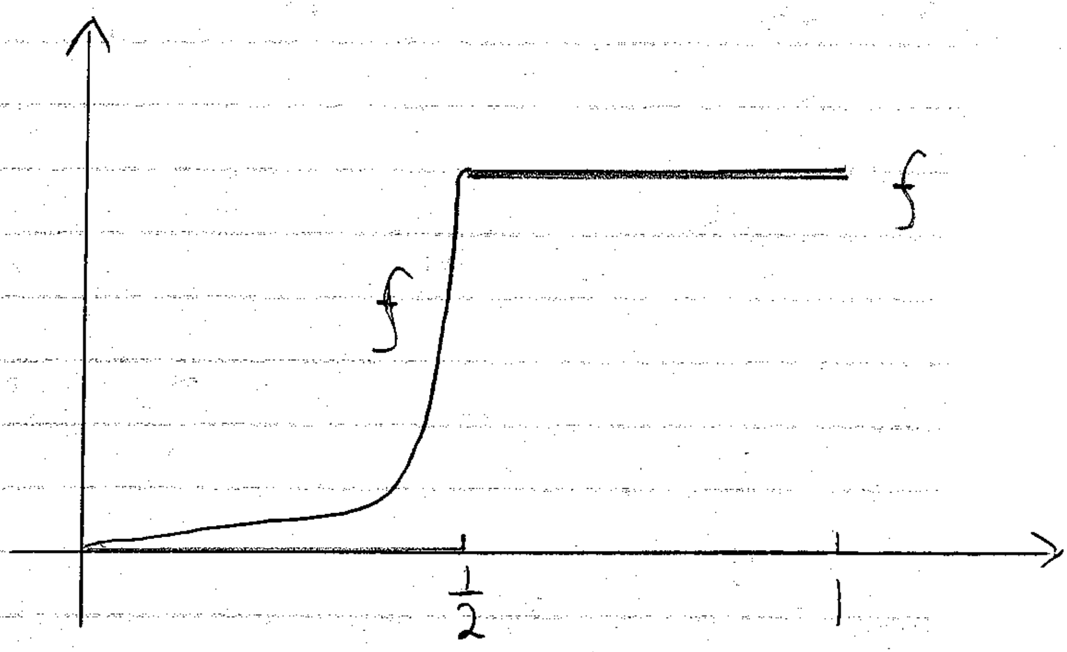
fastän $f \notin C[0,1] \Rightarrow$

$C[0,1]$ är inte fullständigt med den här normen.

Är $C[0,1]$ fullständigt med någon annan strängare norm?

Vi provar med

$$\|f\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{x \in (0,1)} |f(x)| .$$



$$\|f_n - f\|_{L^\infty(0,1)} \to 1 .$$

f_n går inte mot f i denna norm. Vi får inte ett motexempel till fullständighet. Bevis av fullständighet är en annan sak.