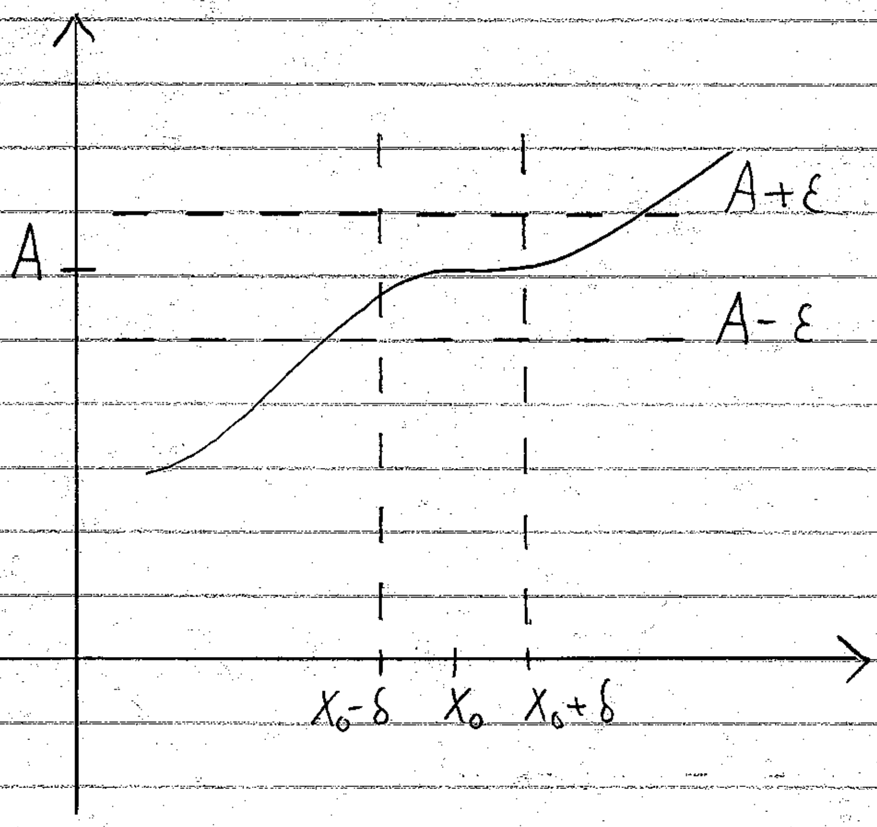
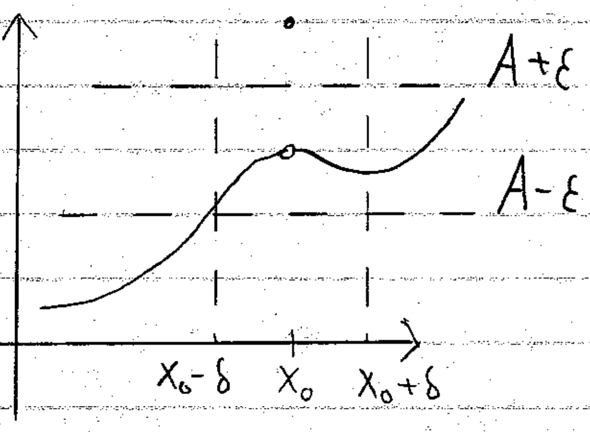
4.1 Kontinuitet



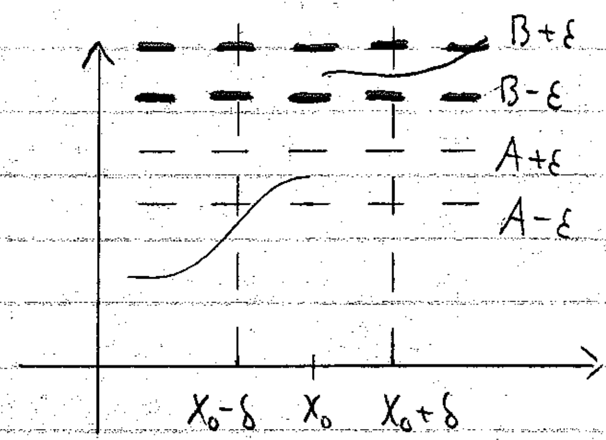
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diskontinuitet av 1:a slaget



$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ exist, $A \neq f(x_0)$

innebär att diskont. är hävbar.



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B$ exist

men $A \neq B$. Hopp

Notera: I båda dessa har f ett

sansat förlopp på ömse sidor om

x_0 men inte i x_0.

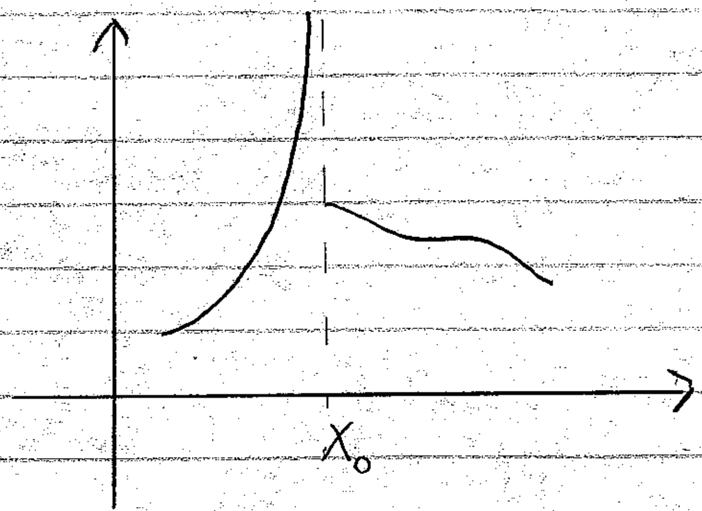
Övriga sorter kallas diskontinuitet av 2:a slaget och vållar ofta större problem.

Ex. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \setminus Q \end{cases}$

Ej deriverbar någonstans

Ej integrerbar på något intervall.

Ex.



Deriverbar utom i x_0

Integrerbarhet kräver särskild undersökning

(generaliserad i x_0 från vänster)

Kontinuitet vs följdkontinuitet

Th4.1 (1) f kont i x_0

$$\Leftrightarrow$$

(2) $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ f.a. $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$.

Jmf Th3.6

Kontinuitet är ekv. med följd kontinuitet i metriska rum (se Maddox, Th11 s51)

$$d(x,y) = |x-y|$$

är en metrik för R

(2) blir då:

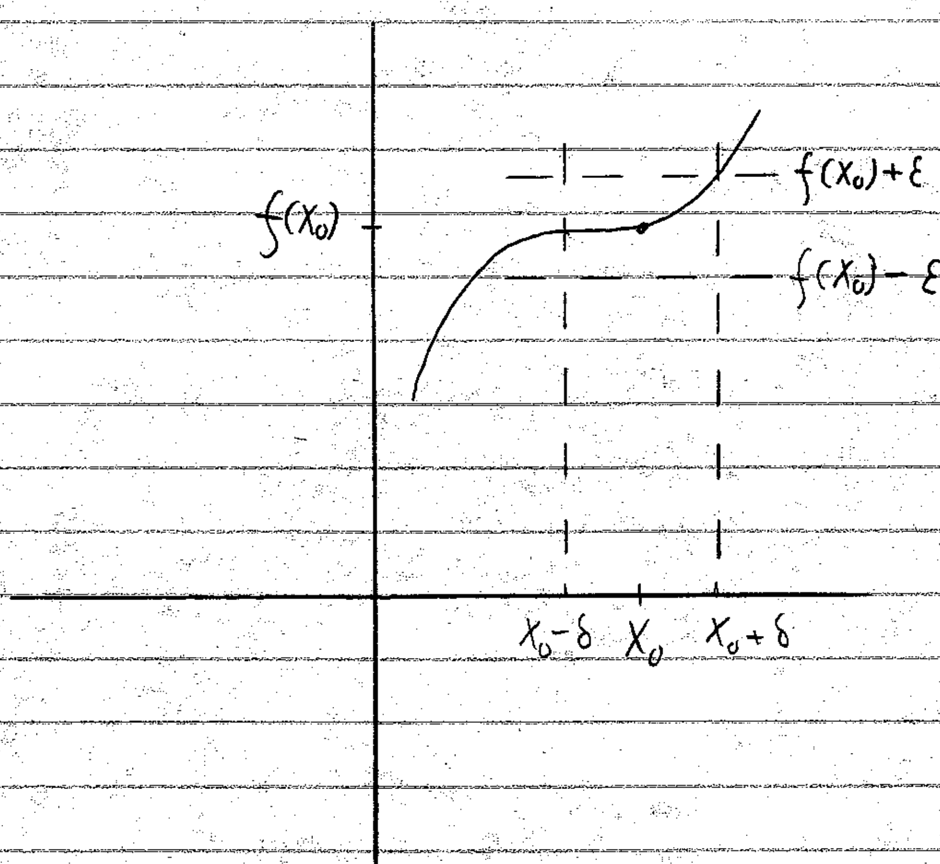
$$d(x_k, x_0) \to 0 \Rightarrow d(f(x_k), f(x_0)) \to 0$$

Jmf kap. 10.

4.2 Kont. funktioners egenskaper

Lemma f kont i x_0 $\Rightarrow$

f begr i x_0



$f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$

f.a. $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Se definition

Th 4.4 $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kont.

$\Rightarrow f$ begränsad på $[a,b]$.

Bevis: Lemma $\Rightarrow f$ begr i alla $x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ (Th 3.2, $[a,b]$ kompakt)

f begränsad på $[a,b]$. Se H-B

Th 4.5 $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kont

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]$ s.a. $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Bevisidé: Om $f(x)$ inte når upp till

$$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

så måste

$$g(x) = 1/(M - f(x))$$

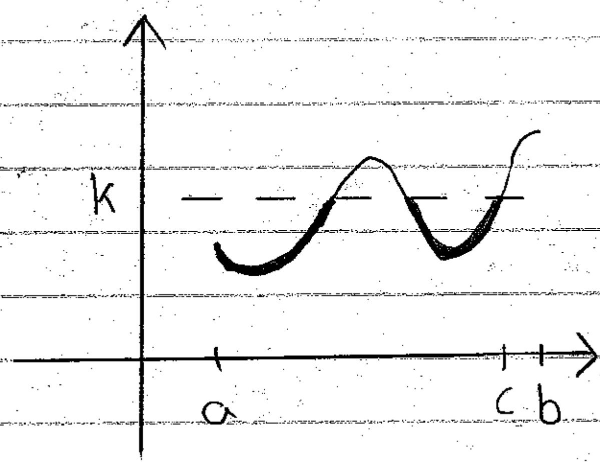
vara begränsad på $[a,b]$ (se Th 4.4).

Detta ger en motsägelse.

Satsen om mellanliggande värde (Th4.6)

f är kont. på $[a,b]$ och k
ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ s.a. $f(c)=k$

- Bevis:



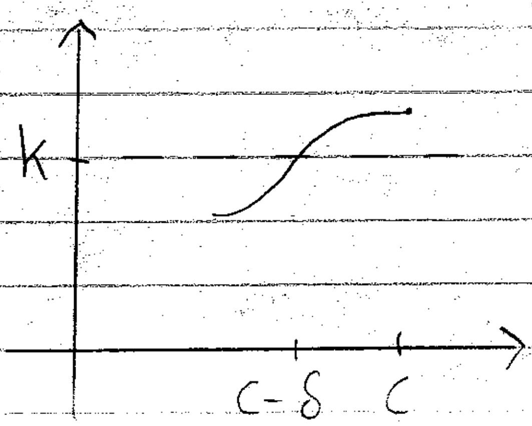
$f(a)<k<f(b)$

färg

$C = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq k\}$

- är uppåt begränsad $\Rightarrow$ (A.ö.gr)
- $\sup C = c$ exist.

1) $f(c)>k \Rightarrow$ (kont) $f(x)>k$ på $[c-\delta, c]$,



$\Rightarrow$ $c-\delta$ är en övre gräns för C

$\Rightarrow$ $\sup C \leq c-\delta \neq c$, motsägelse

Övning: Anta nu att

$$f(c) < k$$

och led in detta i en motsägelse på motsvarande sätt

Vi har då visat att

$$f(c) = k$$

Th4.7 f kont. på $[a,b]$ och $f(x) \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ s.a $f(x_0) = x_0$.

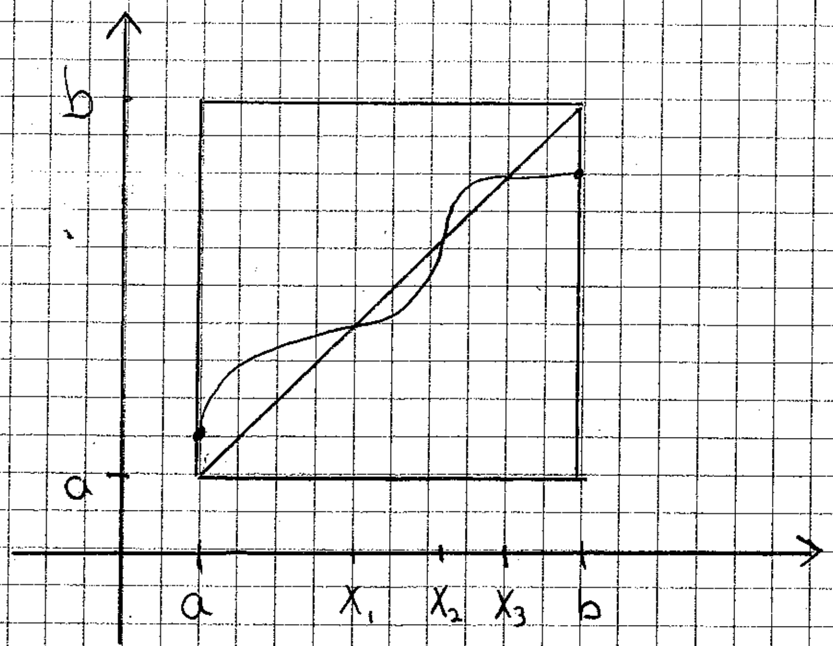
Bevis: $f(a) = a$ eller $f(b) = b \Rightarrow$ klart

$f(a) > a$ och $f(b) < b$: Vi inför

$g(x) = f(x) - x$ f.a. $x \in [a,b]$. Vi får

$g(a) > 0$, $g(b) < 0$, g kont

$\Rightarrow \exists x_0$ s.a. $g(x_0) = 0$, d.v.s. $f(x_0) = x_0$



Th 4.8 f inv. bar och kont. på $[a,b]$

$\Rightarrow f$ str. monoton på $[a,b]$

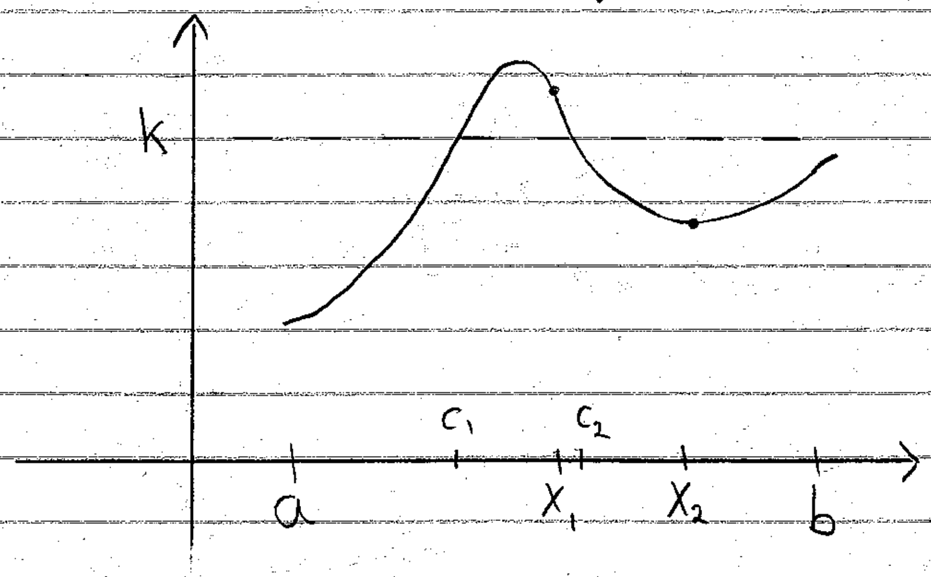
Bevis: f inv bar $\Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Vi antar $f(a) < f(b)$.

- Beviset är ett motsägelsebevis
- Antag f ej str. väx. på $[a,b]$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2$ s.a. $f(x_1) \geq f(x_2)$, $x_1 < x_2$

a)



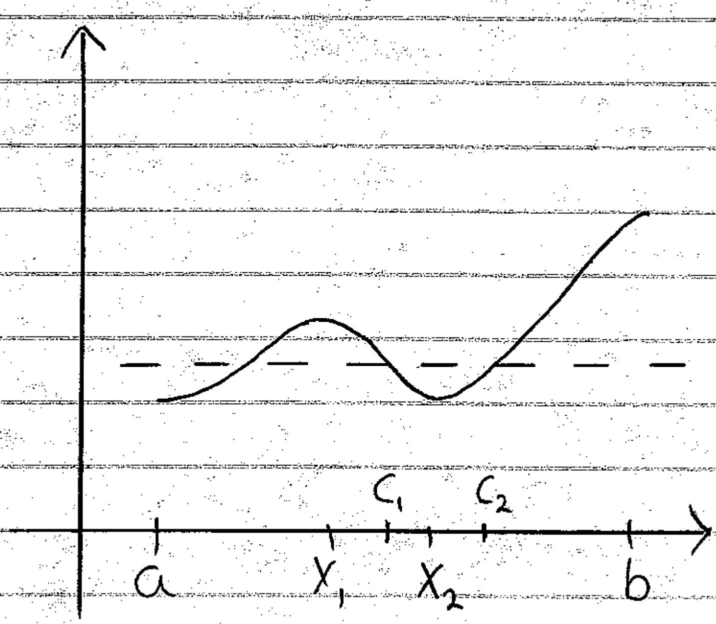
$f(x_1) > f(b)$

Satsen om mellanl. värde (Th 4.6)

på $[a, x_1]$ och $[x_1, x_2] \Rightarrow$

$f(c_1) = f(c_2) = k \in [f(a), f(x_1)] \cap [f(x_1), f(x_2)]$

$\Rightarrow f$ ej inv. bar



$f(x_1) < f(b)$

Satsen om mellanl. värde på $[x_1, x_2], [x_2, b]$

$\Rightarrow \quad f(c_1) = f(c_2) = k \quad \Rightarrow$

ej inverterbar.

Återstår $f(x_1) = f(b)$

vilket också är oförenligt

med inverterbarhet.

Th 4.9 $f : [a, b] \to R$

kontinuerlig och inverterbar

$\Rightarrow f^{-1} : [m, M] \to R$

kontinuerlig.

Bevis: Th 4.8 $\Rightarrow$

$f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$

existerar och är str. monoton

Visa kontinuitet,

$$y_n \to y \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$$

d.v.s

$$y_n \to y \Rightarrow x_n \to x$$

$y_n \to y$ x_n studera

gäller hela tiden Vi leder in motsatsen i en motsats

Färg

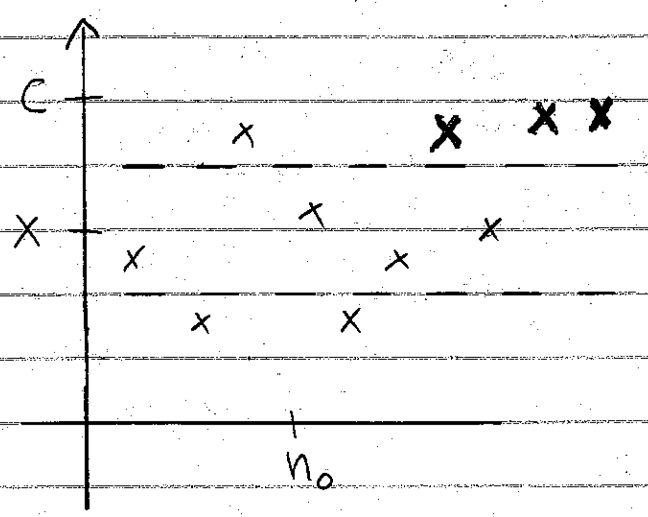


fig1.

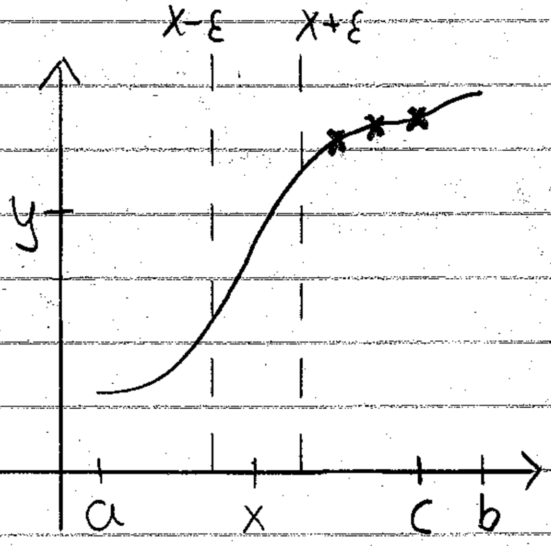


fig2.

f^{-1} diskontinuerlig i $x \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \neq x = f^{-1}(y) \Rightarrow$$

(1) $\exists \{x_{n_j}\}, \quad |x_{n_j} - x| \geq \varepsilon, \quad n_j \geq n_0$.

$$x_n = f^{-1}(y_n) \in [a, b] \Rightarrow$$

(2) $\{x_n\}$ och $\{x_{n_j}\}$ begränsade

(1), (2) och Bolzano Weierstrass $\Rightarrow$

$$\exists \{x_{n_{j_k}}\}, \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_{j_k}} = c, \quad c \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} f(x_{n_{j_k}}) = \lim y_{n_{j_k}} = y = f(x)$, men

$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_{j_k}}) = [f \text{ kont}] = f(c) \neq f(x)$. Mots

Övning: Överför fig. 2 till en graf för f^{-1}. (Kasta om axlarna).

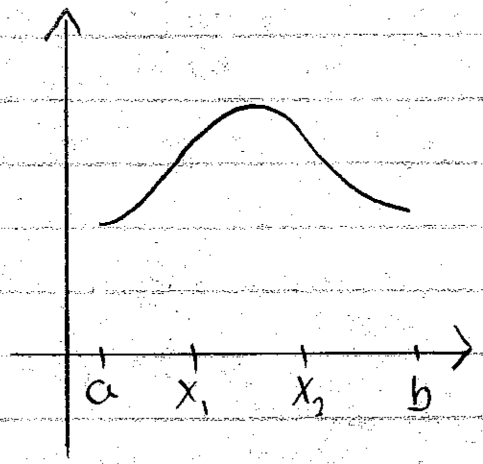
Medelvärdesegenskapen

$f: [a, b] \to R$, $x_1, x_2 \in [a, b]$

$\Rightarrow \exists c \in [x_1, x_2]$ s.a. $f(c) = k$

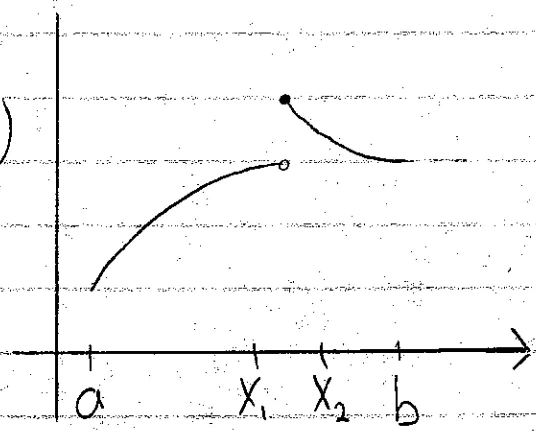
f.a. k mellan $f(x_1)$ och $f(x_2)$.

a)



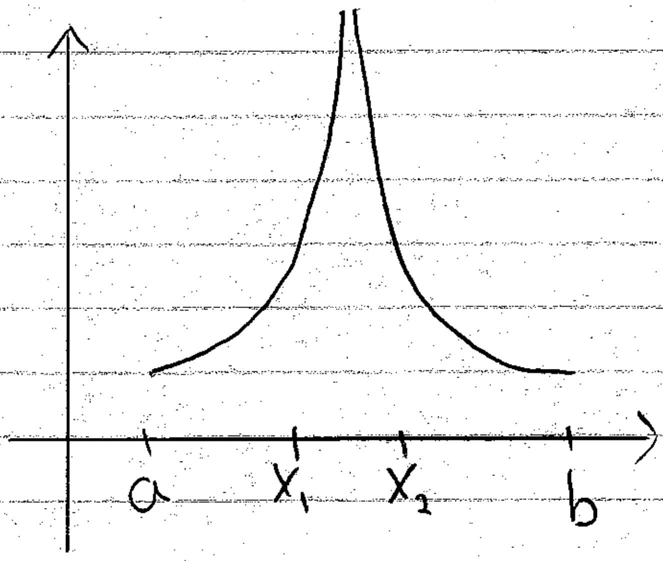
Har

b)



Har ej

c)



Har

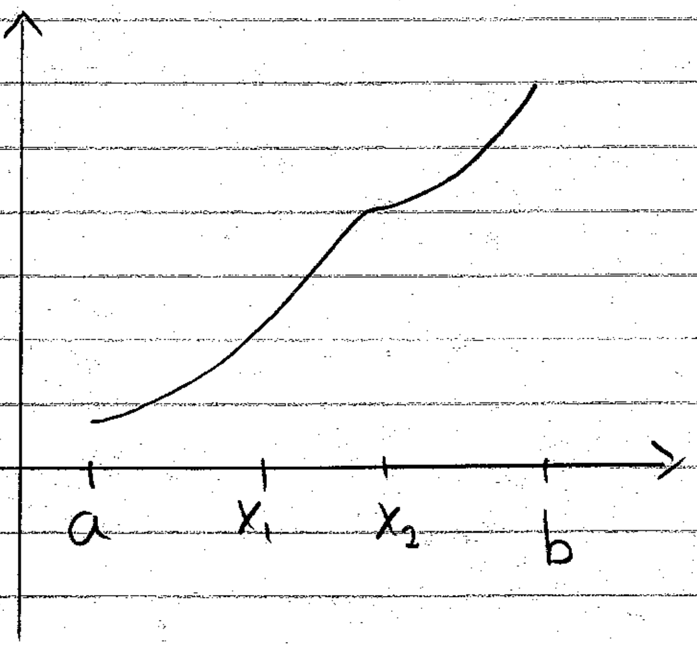
a) Kontinuerliga funktioner har medelvärdesegenskapen.

b) Diskontinuerliga av 1:a slaget har det inte.

c) Diskontinuerlig av 2:a slaget <u>kan</u> ha det.

d) Inverterbara funktioner som har medelvärdesegenskapen måste vara kontinuerliga.

d)



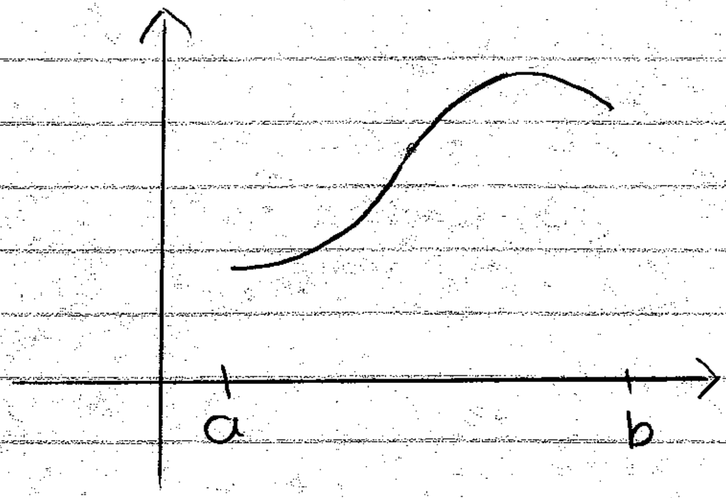
Läs: Definition 4.4, Th 4.10-11.

Likformig kontinuitet

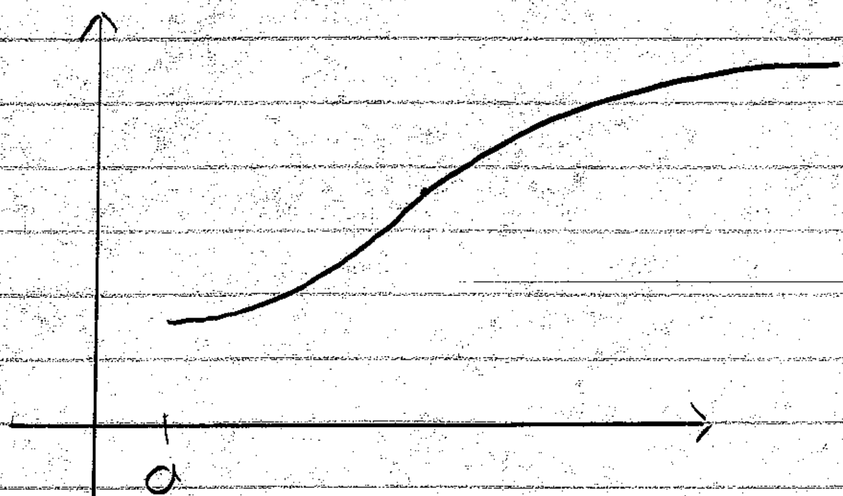
$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Samma $\delta(\varepsilon)$ duger oavsett var
x_1 och x_2 ligger

a)

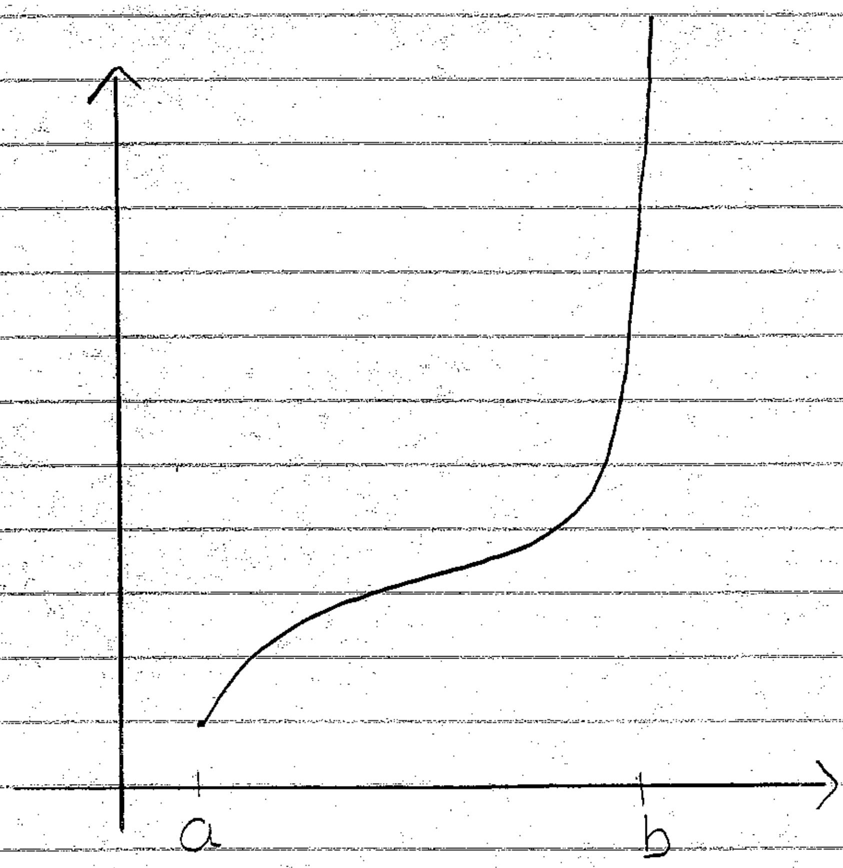


b)

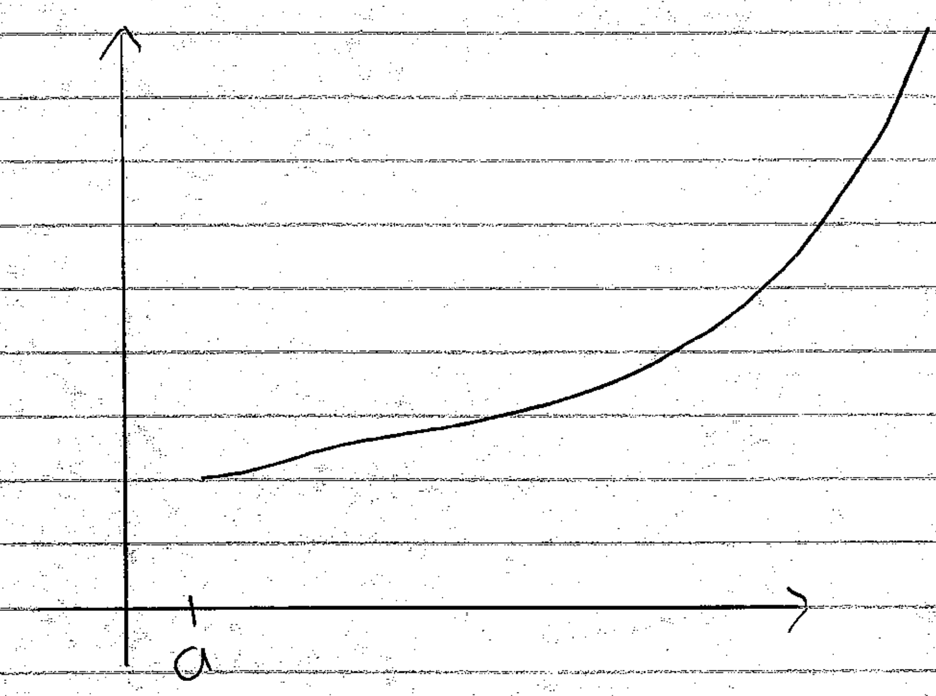


a) och b) är likf. kont.

c)



d)



c) och d) ej likf. kont

a) $f: [a,b] \to R$ Th 4.13

b) $f: [a,\infty) \to R$, Th 4.15

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ exist.

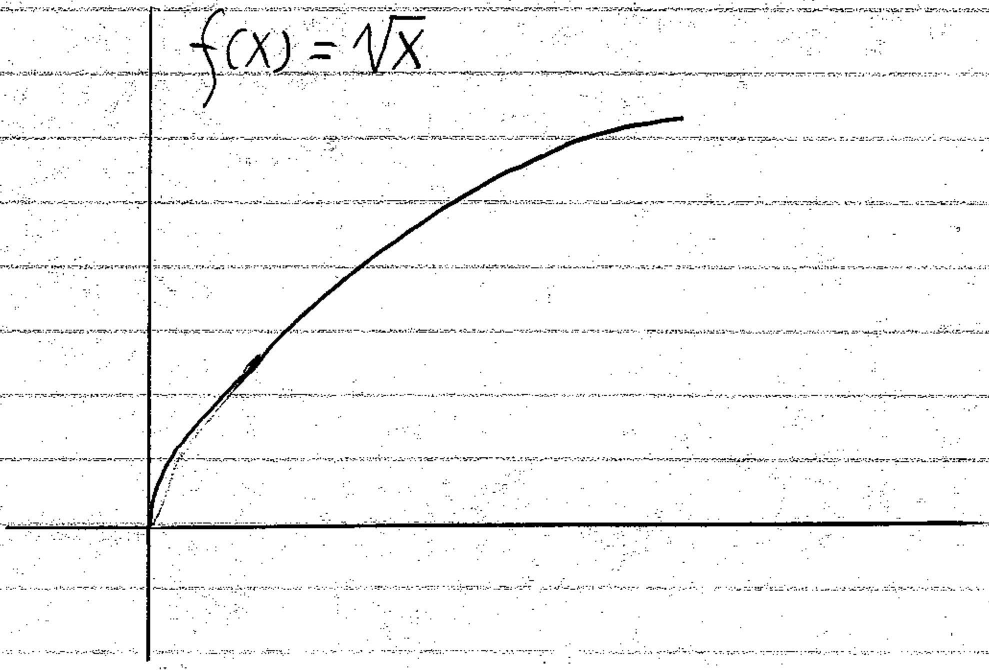
c) $f: (a,b) \to R$ Th 4.14

$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$

d) $f: [a,\infty) \to R$ Th 4.15

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Kan man säga något allmänt i detta fall? Nej, se e) e)



1) $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$

är likformigt kont. fastän

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

2) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

är likformigt. kont. fastän

f:s lutning ökar obegränsat

då $x \to 0^+$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \in [0,1]$$

är likformigt kont. på $[0,1]$
enligt Th 4.13 eftersom
f är kont. på $[0,1]$

Vi visar att

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, \infty[$$

är likformigt kont. på $[1, \infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \quad , \quad x \geq 1 \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

om

$$|x_1 - x_2| < \delta = 2\varepsilon$$

Vi har

$$|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

för $x_1, x_2 \in [0,1]$

och

$$|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

för $x_1, x_2 \in [1, \infty[$.

Vi får

$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

f.a. $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ om

$$\delta(\varepsilon) = \min[\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)]$$

Ex $f(x) = x^2$

är likf. kont. på t.ex:
$[0,1]$ enligt Th 4.13,
$(0,1)$ enligt Th 4.14.
Vi visar även detta med
ε, δ -karaktärisering

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| =$$

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 2|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

om $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

och vi kan inte vara säkra på att f är likf. kont. på exempelvis $(0, \infty)$, se Th 4.15

$|x_1 - x_2| < \delta = \frac{2}{n}$ för t.ex

$x_1 = n + \frac{1}{n}$, $x_2 = n$, men

$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| =$

$|x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| = |2n + \frac{1}{n}| \cdot |n + \frac{1}{n} - n| =$

$|2n + \frac{1}{n}| \cdot |\frac{1}{n}| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon = 2$

fastän

$\delta = \frac{2}{n} \to 0$ för $n \to \infty$

Vi har ej likformig kont.

Th 4.13 Om f är kont. i varje punkt i $[a,b]$ så är f likformigt kont. på $[a,b]$.

Bevis: f kont i $x \in [a,b]$

$$\Leftrightarrow$$

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{om}$$
$$|t-x| < \tfrac{1}{2}\delta_x$$

Vi får olika δ för olika x, men vill ha $\delta(\varepsilon)$ som håller för alla x.

Heine-Borel löser problemet

$$\bigcup_{x\in[a,b]} I(x) = \bigcup_{x\in[a,b]} \left(x-\tfrac{1}{2}\delta_x, x+\tfrac{1}{2}\delta_x\right) \supset [a,b]$$

$$\Rightarrow \bigcup_{x_k} I(x) \supset [a,b], \quad k=1,2,\ldots,n$$

eftersom $[a,b]$ är kompakt

Alla $u \in [a,b]$ hör till något $I(x_k)$

$\Rightarrow \quad |u - x_k| < \frac{1}{2}\delta_{x_k} \Rightarrow |f(u) - f(x_k)| < \varepsilon/2$

Vi väljer nu

$$\delta = \min_{k=1,2,\dots,n} \frac{1}{2}\delta_{x_k}$$

och $v \in [a,b]$ s.a

$$|u - v| < \delta.$$

Vi får

$|v - x_k| = |v - u + u - x_k| \leq$

$|v - u| + |u - x_k| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_k} \leq \delta_{x_k}$

$\Rightarrow \quad |f(v) - f(x_k)| < \varepsilon/2 \quad \Rightarrow$

$|f(u) - f(v)| = |f(u) - f(x_k) + f(x_k) - f(v)| \leq$

$|f(u) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(v)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$

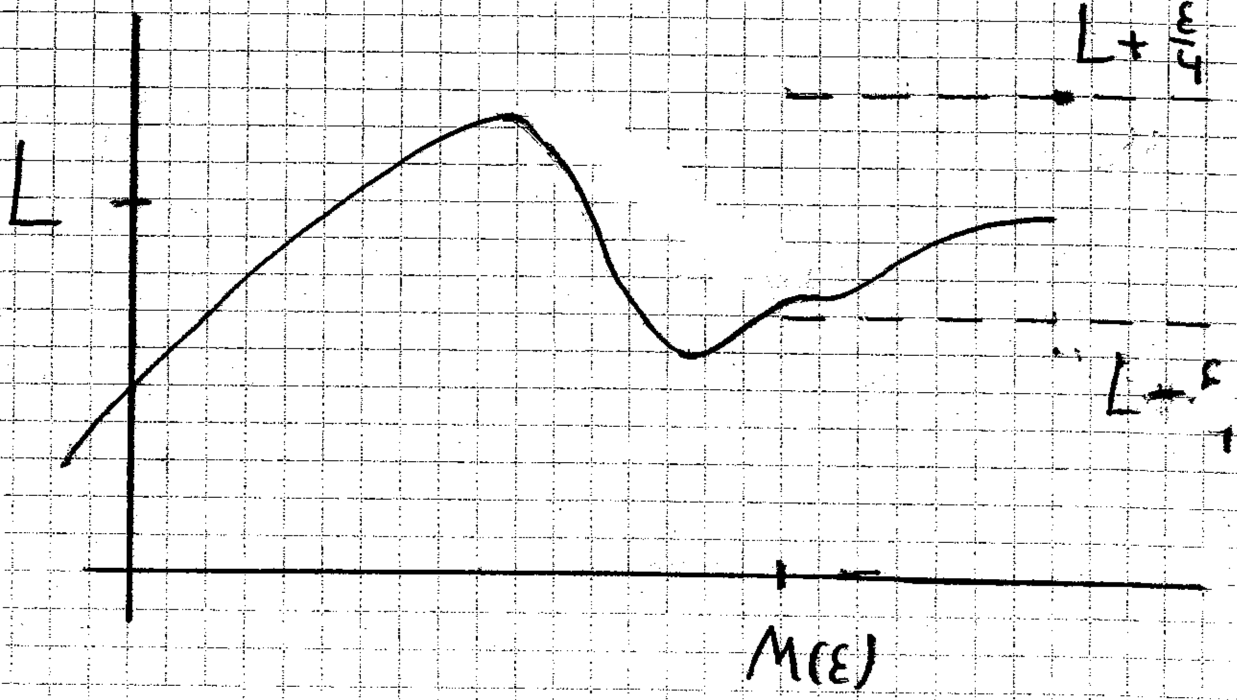
Q.E.D.

Th 4.15 $\left.\begin{array}{l} f \text{ kont. på } [a,\infty) \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow$

f likf. kont. på $[a,\infty)$

Bevis: Vi vill visa att

$|u-v| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$



I $u, v > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$

Märk: Likformighet innebär att ε och inget annat styr hur nära varandra u och v måste ligga

II $u, v \in [a, M]$: Enligt Th 4.13 är f likf. kont på $[a, M]$, d.v.s.

$$|u-v| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

III $u \leq M$, $v > M$:

$$\left.\begin{array}{l} |u-M| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ v > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(v)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|f(u)-f(v)| = |f(u)-f(M)+f(M)-f(v)| \leq$$

$$|f(u)-f(M)| + |f(v)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vi har visat att

$$|u-v| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$$

oavsett var u och v ligger.