Testtentamen i Analys I

Datum: ????-??-??
Lärare: Andreas Lind
Hjälpmedel: Penna, linjal, samt miniräknare (inte symbolhanterande)

För att få minst betyget E på tentan så måste du ha uppfyllt lärandemålen i kursen.

Kom ihåg att motivera dina lösningar med bilder och text och avsluta uppgiften med ett tydligt svar. Skriv endast på en sida av bladet.

1. Beräkna följande gränsväden
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x+7)^{1/3}-2}$ (Ledning: Använd att $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ i nämnaren).
   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{|3x+2|}$
   (c) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$.

2. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$ för $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Visa att f har en invers f^{-1} och bestäm inversens definitionsmängd och rita dess graf. Bestäm även ekvationen för tangenten till $y = f^{-1}(x)$ i $x = 3$.

3. En parallelltrapets ABCD är inskrivet i en halvcirkel med radie R, så att AB är diametern och CD är parallell med AB. Bestäm den största möjliga omkretsen av parallelltrapetsen.

4. Låt $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} - \arctan(x)$. Undersök denna funktion med avseende på växande, avtagande, lokala max/min-punkter, konkavitet och asymptoter. Rita sedan $y = f(x)$.

5. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen f definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx & x \leq 1 \\ \frac{2}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

   blir deriverbar i $x = 1$. Skissera sedan kurvan.

6. Beräkna cos(arctan(2)+arctan(3)) exakt. Vad är alltså arctan(2)+arctan(3)? Motivera!

7. En triangel har ett hörn i punkten $(2a, 0)$, $a > 0$. De två andra hörnen är skärningspunkterna (utanför origo) mellan linjen $y = kx$, $k > 0$, och kurvan $y = x^2(2a - x)$. Skissera båda kurvorna. Vilka positiva värden kan k ha om man ska få en triangel? Bestäm talet k så att triangeln får maximal area och ange även denna maximala area.

8. Använd medelvärdessatsen för att visa följande påstående: Om $f'(x) = 0$ på ett intervall I, då är f konstant på intervallet I.

Lycka till!

Andreas Lind