

Tenta 2004-01-15

①

$$1a) f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 5 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$b) f(x) = x^{1,3} + \sqrt{x} = x^{1,3} + x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = 1,3 x^{0,3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$c) f(x) = e^{5x} + \frac{1}{x^2} = e^{5x} + x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 5e^{5x} - 2x^{-3} = 5e^{5x} - \frac{2}{x^3}$$

$$2a) 12 - x^5 = 3$$

$\Leftrightarrow$

$$9 = x^5$$

$$\underline{1,55} \approx 9^{1/5} = x$$

$$b) 2e^{3x} = a \Leftrightarrow e^{3x} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \ln e^{3x} = \ln\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$3x = \ln\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{2}\right) = \ln\left(\frac{a}{2}\right)^{1/3} \approx \underline{\underline{0,50}}$$

②

$$2c) \quad \lg 3 + \lg 5 = \lg x^2$$

$$\lg(3 \cdot 5) = \lg x^2$$

$$\Rightarrow$$

$$10^{\lg(3 \cdot 5)} = 10^{\lg x^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$15 = x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{15} \approx \pm \underline{\underline{3.87}}$$

3a) För vilka x-värden får vi värdet 4,
 $x = -2$ och $x = 1$.

$$b) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}} \text{ k } \underline{\underline{x = 0}}$$

$$c) \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ k } x > 0$$

$$4a) \quad y = 2x^2 - x^3 + 1 \Rightarrow y' = 4x - 3x^2$$

Derivata ger alltså tangentens lutning i $x = 2$ är:

$$y'(2) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$$

Enpunktens formel ger alltså

$$y - y(2) = -4(x - 2) \quad (y(2) = 2 \cdot 2^2 - 2^3 + 1 = 1)$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -4x + 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -4x + 9}} \text{ (tangentens ekvation)}$$

(3)

4b) $f(x) = e^{2x} + 3x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 3$

För vilka x gäller att $f'(x) = 7$:

$$2e^{2x} + 3 = 7$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2e^{2x} = 4$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e^{2x} = 2$$

$$\Rightarrow$$

$$2x = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2^{1/2}}}$$

5a) $f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - x^2 - 3x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(2x + 3 + h)}{\cancel{h}} = \underline{\underline{2x + 3}}$$

(4)

5b/ $a_1 = 1,7$, $a_2 = 1,36$, $a_3 = ?$ $a_n = ?$

Vi ska bestämma a_n så att vi har en geometrisk talföljd. En geometrisk talföljd är på formen:

$$a_n = c \cdot r^{n-1} \quad n \geq 1.$$

Detta ger att $a_1 = c \Rightarrow c = 1,7$.

"
 "
 1,7

Vidare så får vi att

$$1,36 = a_2 = 1,7 \cdot r \Leftrightarrow r = 0,8$$

Alltså är den geometriska talföljden given av

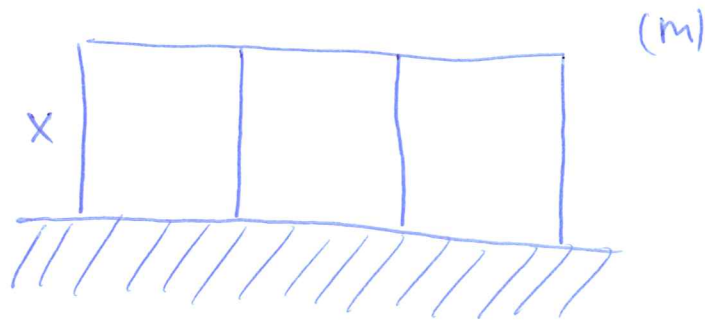
$$a_n = 1,7 \cdot 0,8^{n-1} \quad n \geq 1.$$

Detta ger att

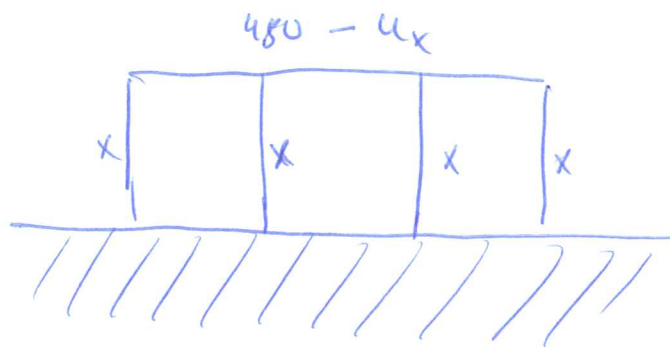
$$a_3 = 1,088$$

$$a_n = \underline{\underline{0,8704.}}$$

Gä!



480 m stängsel. Vars sida ~~88~~ hägnads är x m.



Detta ger att

$$y = (480 - 4x)x = 480x - 4x^2$$

b) $480 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 120$

Alltså definitionsmängden är $0 < x < 120$.

c) Vi deriverar $y' = 480 - 8x$. Kritiska punkten

ges av $y' = 0$, dvs $480 - 8x = 0$

$\Leftrightarrow$

$$x = 60$$

$x = 60$ är en maxpunkt, ty negativ koefficient framför x^2 . Största arean blir därför

$$y(60) = (480 - 4 \cdot 60) \cdot 60 = 240 \cdot 60 = 14400 \text{ m}^2$$

(6)

7/ $f(x) = 0,25x^4 - x^3 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Kritiska punkter ges av

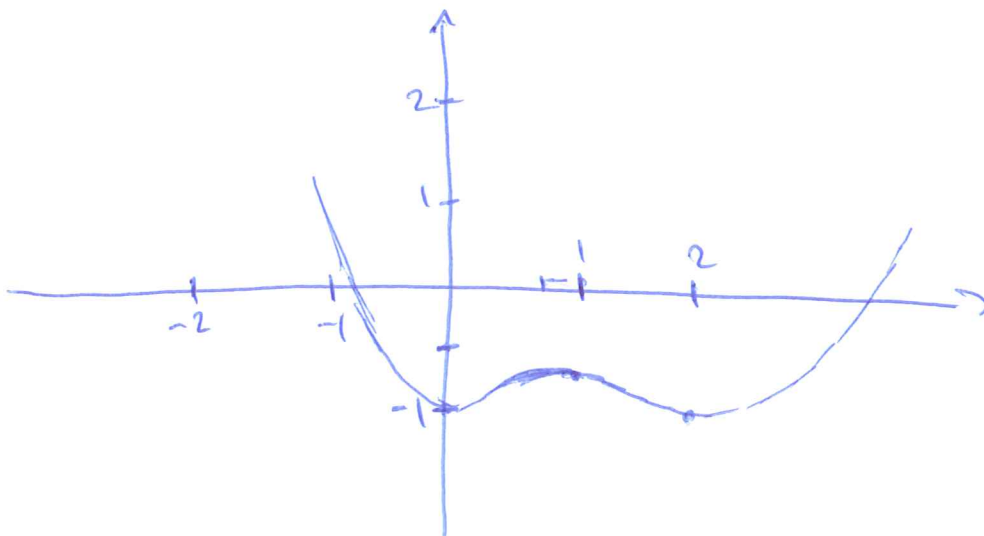
$$0 = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

Alltså är $x=0$, $x=1$ och $x=2$ kritiska punkter.

Teckenschema:

x	0	1	2				
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							
	lokal minpunkt maxpunkt lokal minpunkt.						

Vi har alltså $f(0) = -1$, $f(1) = -0,75$, $f(2) = -1$



8 a). $y = 98900 e^{-0,3t}$

$$y(13) = 98900 e^{-0,3 \cdot 13} \approx 40209,7 \text{ kr}$$

$$\approx \underline{\underline{40210 \text{ kr.}}}$$

b). 

$$\frac{y(t+1) - y(t)}{y(t)} = \frac{98900 e^{-0,3(t+1)} - 98900 e^{-0,3t}}{98900 e^{-0,3t}} =$$

$$= \frac{98900 \cancel{e^{-0,3t}} (e^{-0,3} - 1)}{98900 \cancel{e^{-0,3t}}} \approx -0,26$$

Alltså 26 % minskning av värdet /år.

c) $y'(t) = 98900 \cdot (-0,3) e^{-0,3t} = \cancel{29670}$

$$= -29670 e^{-0,3t}$$

$$y'(5) = -29670 e^{-0,3 \cdot 5} = -29670 e^{-1,5} = \underline{\underline{-6620 \text{ kr.}}}$$

$$a) \quad y = at - 5t^2$$

För att hitta maxpunkten så deriverar vi:

$$y' = a - 10t \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow a - 10t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{a}{10}$$

Alltså för $t = \frac{a}{10}$ så har vi en maxpunkt.

Värdet för denna maxpunkt vill vi att den ska bli 18, dvs

$$18 = y\left(\frac{a}{10}\right) = a \cdot \frac{a}{10} - 5 \cdot \left(\frac{a}{10}\right)^2 = \frac{a^2}{10} - \frac{5a^2}{100} = \frac{5a^2}{100}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{5a^2}{100} = 18 \Leftrightarrow a^2 = 360$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \approx \left(\pm\right) 19.$$

Om $a = 19$ så blir högsta punkten 18m.

10) 33 utbetalningar var tredje år
genererade i 1815 guldmunt.

Första året fick han	x	guldmunt
Tredje året fick han	$x+3$	guldmunt
Sjätte året fick han	$x+6$	guldmunt
$\vdots$		
36:e året fick han	$x+99$	guldmunt.
		1815

dvs

$$x + (x+3) + (x+6) + \dots + (x+99) = 1815$$

$\Leftrightarrow$

$$33x + 3+6+9+\dots+99 = 1815$$

Vi har att $3+6+9+\dots+99$ är en aritmetisk summa
med differens 3, så

$$3+6+\dots+99 = \frac{32(3+99)}{2} = \cancel{1600} = 16 \cdot 99 = 1584$$

Detta ger att

$$33x + 1584 = 1815 \Leftrightarrow 33x = 231 \Leftrightarrow x = 7$$

Alltså är 7 eller böjda utbetalning 99