

Tenta 070425

①

$$1a) \quad \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a-1$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{12x^2 - 27y^2}{2x - 3y} &= \frac{3(4x^2 - 9y^2)}{2x - 3y} = \frac{3(2x + 3y)(2x - 3y)}{2x - 3y} = \\ &= 3(2x + 3y) = 6x + 9y \end{aligned}$$

$$2a) \quad f(x) = 2x^3 - 5x + 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 5$$

$$b) \quad g(x) = x^{3,7} + e^x \Rightarrow g'(x) = 3,7 x^{2,7} + e^x$$

$$c) \quad h(x) = \frac{6}{x^2} = 6x^{-2} \Rightarrow h'(x) = -12x^{-3} = -\frac{12}{x^3}$$

$$3a) \quad x^5 = 13 \Rightarrow x = 13^{1/5} \approx 1,670$$

$$b) \quad 5^x = 13 \Rightarrow \ln 5^x = \ln 13 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 13}{\ln 5} \approx 1,594$$

(2)

$$4a/ \quad g(x) = \frac{1}{4} + 3x - x^2 \Rightarrow g'(x) = 3 - 2x$$

Tangentens lutning i $x = \frac{1}{2}$ är

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

Enpunktformeln ger alltså

$$y - \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$y = 2x - 1 + \frac{3}{2} = \underline{\underline{2x + \frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ $y = 2x + 5$ är tangent till $f(x)$ i $x = 3$.

Bestäm $f'(3)$ och $f(3)$.

$f'(3) =$ tangentens lutning, dvs 2.

$$f(3) = y(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11.$$

5a) $x = -1$ och $x = -4$.

b) $x = -3$ och $x = -1$

c) Antag att $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Då bestäms d av
 $d = f(0) = 4$.

6a) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$. Detta är en aritmetisk summa,
 så summan ges av

$$S_{100} = \frac{100(1+100)}{2} = 50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$$

b) $a_1, \dots, a_8$ geometrisk talföljd. $a_1 = 2$ och $a_8 = 156250$.
 Vad blir S_8 ?

$$S_8 = a_1 \cdot \frac{1-c^8}{1-c} = a_1 \cdot \frac{c^8-1}{c-1}$$

där c är kvoten mellan två efterföljande tal i
 talföljden. Eftersom $a_1 = 2$ och $a_8 = 2 \cdot c^7 = 156250$

så blir

$$c^7 = \frac{156250}{2} = 78125$$

$$\Rightarrow$$

$$c = (78125)^{1/7} = 5$$

Detta ger att

$$S_8 = 2 \cdot \frac{5^8-1}{5-1} = 195312$$

7/ 1986/87 12000 kr.

1992/93 34000 kr.

Ull säljs de värde 80000 kr. Vi antar att det
värde exponentiellt.

Ansätt

$$y = C a^x \quad \text{där } x \text{ är antal år från 86/87.}$$

Detta ger att

$$12000 = y(0) = C a^0 = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 12000$$

Vidare så är

$$34000 = y(6) = 12000 a^6$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{34000}{12000} = a^6 \quad \Rightarrow \quad a = \left(\frac{34}{12}\right)^{1/6} \approx 1,19$$

Alltså beläms tillväxten av

$$y = 12000 \cdot 1,19^x \quad (\text{priset höjs med } 19\%/\text{år})$$

Vi vill lösa ekvationen

$$80000 = 12000 \cdot 1,19^x$$

$\Leftrightarrow$

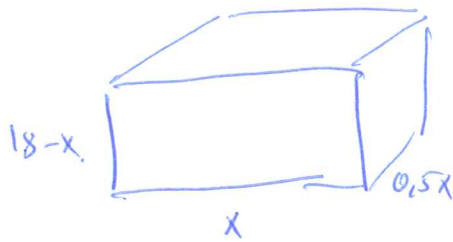
$$\frac{20}{3} = \frac{80000}{12000} = 1,19^x \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{20}{3} = \ln 1,19^x$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{\ln \frac{20}{3}}{\ln 1,19} \approx 10,4$$

Alltså 1997/98 kan han sälja möbelen för 80000

8)



Volymen ges av

$$V(x) = x \cdot 0,5x \cdot (18-x) = 9x^2 - \frac{x^3}{2}$$

Vi derivarer för att hitta kritisk punkt och maxpunkt:

$$V'(x) = 18x - \frac{3x^2}{2}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x - \frac{3x^2}{2} = 0$$

 $\Leftrightarrow$

$$\frac{3x}{2}(12-x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ el. } x=12.$$

Då $x=12$ så blir volymen maximal, och volymen blir

$$V(12) = 9 \cdot 12^2 - \frac{12^3}{2} = \underline{\underline{432 \text{ cm}^3}}$$

(6)

$$a) \begin{cases} \lg(xy) = 4 \\ \lg\left(\frac{x}{y}\right) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + \lg y = 4 & (1) \\ \lg x - \lg y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2): \quad 2\lg x = 12 \Leftrightarrow \lg x = 6 \Leftrightarrow x = 10^6$$

Delta resultat (1):

$$\lg 10^6 + \lg y = 4 \Leftrightarrow 6 + \lg y = 4$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lg y = -2 \Leftrightarrow y = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$\text{Svar: } x = 10^6, y = 10^{-2}.$$

$$10). \quad f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

Kritiska punkter ges av $f'(x) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right) \\ &= 3\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 3\left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \\ &= 3(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Alltså $x = -1$ och $x = 2$ kritiska punkter.

Tecken schema:

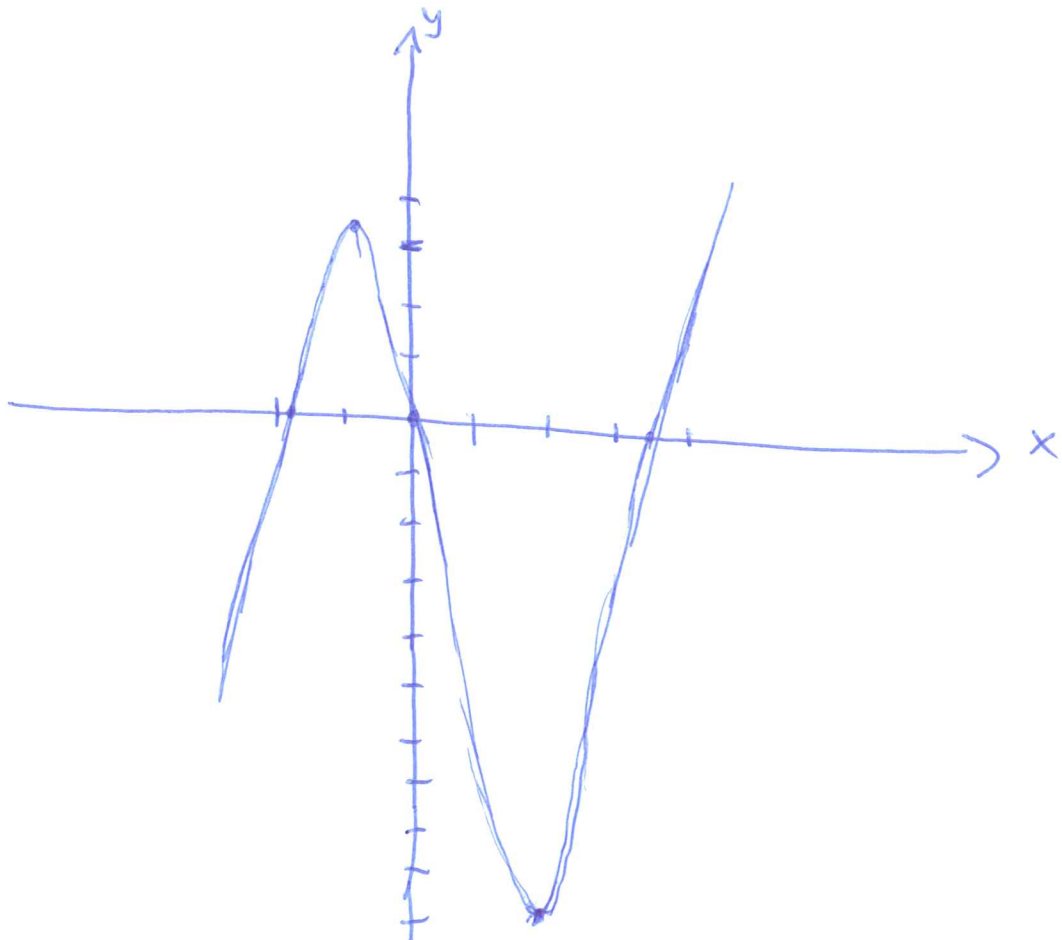
x	-1	2
$f'(x)$	+ 0 -	0 +
$f(x)$	↗ →	↘ → ↗
	↑	↑
	max	min

$$f(-1) = (-1)^3 - \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - 6 \cdot (-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{7}{2}$$

$$f(2) = 2^3 - \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 6 \cdot 2 = -10$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \approx 3,3; x \approx -1,8$$



11) 12 lika stora doser. 1 dos per timme.

23% av injektion bryts ned i kroppen, så

77% av injektionen är kvar.

x	$x \cdot 0,77$	$x \cdot 0,77^2$	...	$x \cdot 0,77^{11}$
↑	↑	↑		↑
0 h	1 h	2 h		11 h
Dos 1	Dos 2	Dos 3		Dos 12

Alltså måste

$$\underbrace{x + x \cdot 0,77 + x \cdot 0,77^2 + \dots + x \cdot 0,77^{11}}_{\text{Geometrisk summa}} = 840$$

Geometrisk summa

$\Leftrightarrow$

$$x \cdot \frac{1 - 0,77^{12}}{1 - 0,77} = 840$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{840 \cdot 0,23}{1 - 0,77^{12}} \approx 202 \text{ mg.}$$

Vare dos måste vara 202 mg.