Matematik B

Vi ska börja med polynom.

Vad är ett polynom?

Ett polynom är en summa av termer.

$$5x^2+10x-3$$

konstantterm

koefficient

koefficient

x - variabel.

Varje polynom har en grad = högsta exponenten i polynomet.

I exemplet ovan så är graden 2.

Ex:

$15x^3 + x^{-1} + 1$ är inget polynom för vi tillåter inga negativa exponenter på variablerna.

Ex:

$3x^5 + 10x^3 + x - 1$.

Detta är ett polynom av grad 5.

Anmärkning:

Vi kan använda oss av vilken bokstav som helst för variabeln, t.ex.

$t^4 - 2t^2 + 1$ — 4:e gradspolynom i t.

$h^3 + 10h^2 + h + 3$ — 3:e gradspolynom i h

$y^2 + 2y$ — 2:a grads polynom i y.

Oftast så betecknar vi ett polynom med en bokstav, säg

$p(x) = x^2 + 2x + 1$ ("p av x")

$s(t) = 3t^3 + 2t - 1$. ("s av t")

Värdet av ett polynom:

Givet ett polynom $p(x)$ vad menar vi med t.ex. $p(2)$. Jo, vi menar p:s värde i $x = 2$.

Ex:

Låt $p(x) = 2x^3 + 4x - 3$. Då är

$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 3 = 2 + 4 - 3 = 3$

$p(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1) - 3 = 2 \cdot (-1) - 4 - 3 = -9$.

$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 3 = 2 \cdot 8 + 8 - 3 = 21$

Ex:

Låt $h(t) = 2t^2 - t + 1$. Då är

$$h(a+b) = 2(a+b)^2 - (a+b) + 1$$

$$h(2x^2) = 2\cdot(2x^2)^2 - 2x^2 + 1 =$$
$$= 2\cdot 4x^4 - 2x^2 + 1 =$$
$$= 8x^4 - 2x^2 + 1.$$

Algebraiska operationer med polynom

Definition:

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

och $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

vara två polynom av grad n. Då är

$$p(x) \pm q(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \dots$$
$$+ (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0).$$

Man lägger ihop/drar ifrån koefficientvis.

Ex:

Låt $p(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 3$ och $q(x) = 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 4$.

Då är

$$p(x) + q(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 3 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 4 =$$
$$= 7x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

$$p(x) - q(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 3 - (4x^4 - 2x^3 + x^2 + 4) =$$
$$= 3x^4 + 2x^2 + x - 3 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 4 =$$

byter tecken

nom parentes

$$= -x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 7.$$

Definition:

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ och

$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$.

Då är

$$p(x) \cdot q(x) = a_n x^n \cdot q(x) + a_{n-1} x^{n-1} \cdot q(x) + \dots + a_1 x \cdot q(x) + a_0 \cdot q(x) =$$

$$= a_n b_m x^{m+n} + a_n b_{m-1} x^{m+n-1} + \dots + a_n b_1 x^{n+1} + a_n b_0 x^n +$$
$$+ a_{n-1} b_m x^{m+n-1} + a_{n-1} b_{m-1} x^{m+n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 x^n + a_{n-1} b_0 x^{n-1} +$$
$$\dots + a_0 b_m x^m + a_0 b_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 b_1 x + a_0 \cdot b_0$$

Ex:

Låt $p(x) = 2x^2+1$ och $q(x) = x-1$. Då är

$$p(x)\cdot q(x) = (2x^2+1)\cdot(x-1) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Distributiv lag.

Ex:

Låt $p(x) = x^3+4x+1$ och $q(x) = 3x^2+x-1$. Då är

$$p(x)\cdot q(x) = (x^3+4x+1)\cdot(3x^2+x-1) =$$

$$= 3x^5 + x^4 - x^3 + 12x^3 + 4x^2 - 4x + 3x^2 + x - 1 =$$

$$= 3x^5 + x^4 + 11x^3 + 7x^2 - 3x - 1.$$

förenkling.

Ex:

"Motsatsen" till att multiplicera polynom är att bryta ut faktorer.

$$2x^3y^2 - x^2y + 4xy^2 = xy(2x^2y - x + 4y)$$

Viktig!

Konjugatregeln:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ex:

$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

Ex:

$(1+x)(x-1) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

Ex:

$(4y + 2xz)(2xz - 4y) = (2xz + 4y)(2xz - 4y) =$

$= (2xz)^2 - (4y)^2 =$

$= 4x^2z^2 - 16y^2.$

Ex:

$(-x-y)(x-y) = (-1)(x+y)(x-y) = (-1)\cdot(x^2 - y^2) =$

$= -x^2 + y^2$

Ex:

$a^2x^2 - 4 = (ax+2)(ax-2)$

$\shortparallel$

$(ax)^2 - 2^2$

Ex:

$$z^2 - 4t^2 = z^2 - (2t)^2 = (z+2t)(z-2t).$$

Viktiga regler!

Kvadreringsreglerna:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ex:

$$(3+x)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot x + x^2 = 9 + 6x + x^2.$$

Ex:

$$(3-x)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot x + x^2 = 9 - 6x + x^2$$

Ex:

$$(2x+4y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x + 4y + (4y)^2 =$$

$$= 4x^2 + 16xy + 16y^2$$

Ex:

$$(-x-1)^2 = ((-1)x+1)^2 = (-1)^2(x+1)^2 = 1\cdot(x^2+2x+1) =$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

Ex:

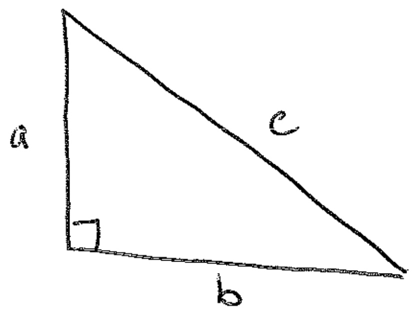
$$(x+1-y)^2 = ((x+1)-y)^2 = (x+1)^2 - 2(x+1)y + y^2 =$$

$$= x^2 + 2x + 1 - 2xy - 2y + y^2$$

Geometri

Vi börjar med att komma ihåg

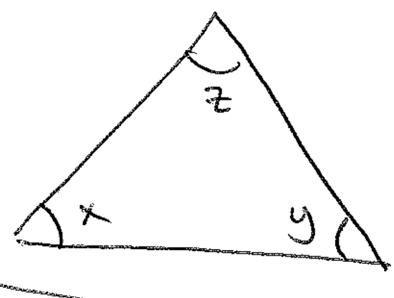
- Pythagoras sats:



$$a^2+b^2=c^2$$

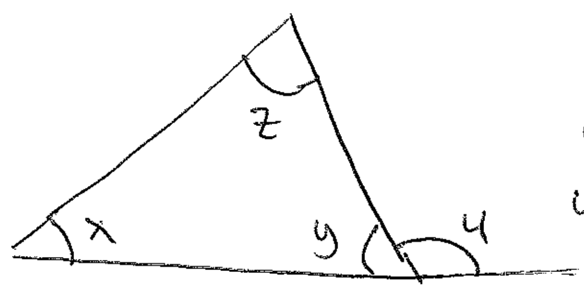
Viktigt att det är en rätvinklig triangel, dvs att en vinkel är 90°.

- Vinkelsumman i en triangel är 180°.



$$x+y+z=180$$

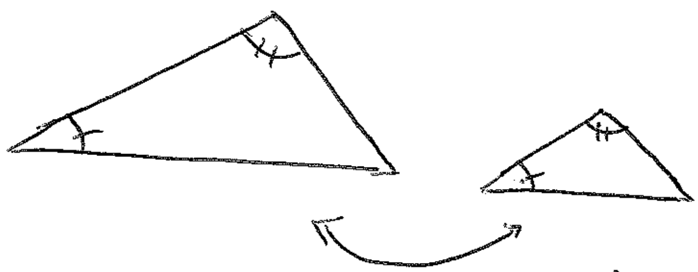
- Yttervinkelsatsen: Summan av två vinklar i en triangel är lika med yttervinkeln vid det tredje hörnet



$$u=x+z$$
$$u+y=180$$

- Likformiga trianglar:

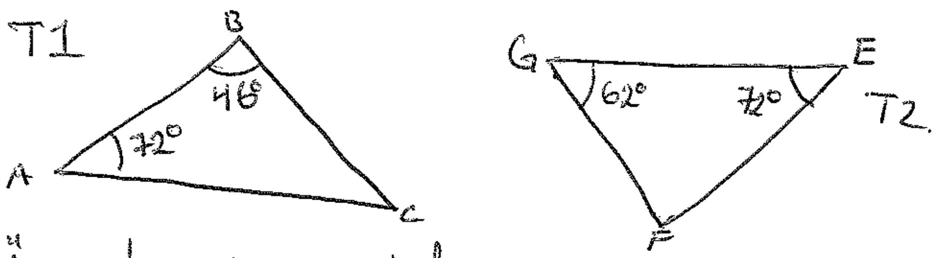
Om två vinklar i en triangel är lika med motsvarande vinklar i en annan triangel, så är trianglarna likformiga.



Likformiga, eftersom två vinklar gemensamma.

Ex:

Betrakta trianglarna



Är trianglarna likformiga?

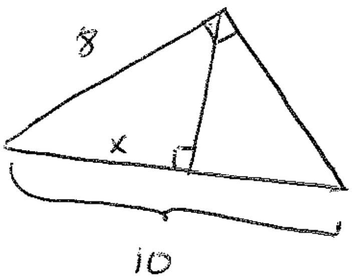
Vi kan bestämma den tredje vinkeln i T1.

$$\angle C = 180° - 46° - 72° = 62°$$

Alltså delar ABC och EFG minst två vinklar, dvs de är likformiga.

Ex:

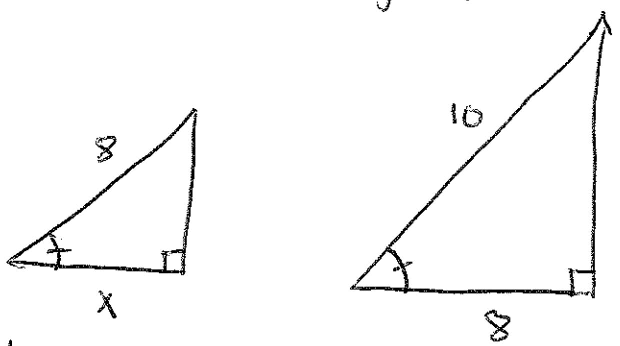
Bestäm x i figuren



(cm)

Lösningsförslag:

Vi "byter" ut trianglarna



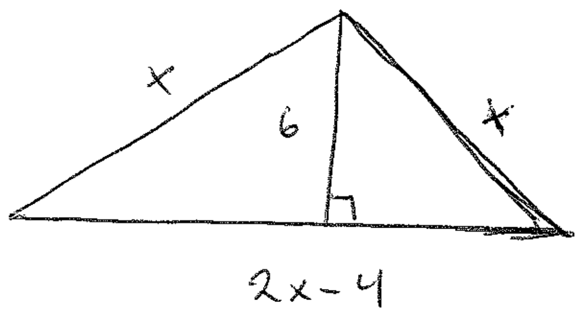
Likformighet ger att

$$\frac{x}{8} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 8}{10} = \frac{64}{10} = \underline{\underline{6,4 \text{ cm}}}$$

Ex:

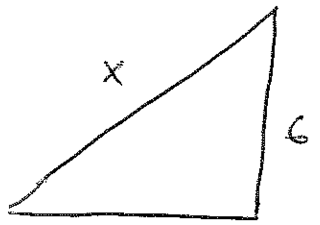
Hur stor är triangelns area?
Beräkna x.

(cm)



Lösningsförslag:

Eftersom triangeln är likbent så måste



$$\frac{2x-4}{2} = x-2$$

Pythagoras sats ger nu att

$$(x-2)^2 + 6^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 4 + 36 = \cancel{x^2}$$

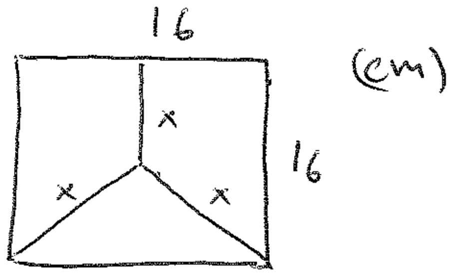
$$\Leftrightarrow \quad 40 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 10}}\text{ cm}$$

Detta ger att arean blir

$$A = \frac{(2\cdot 10-4)\cdot 6}{2} = \frac{16\cdot 6}{2} = \underline{\underline{48 \text{ cm}^2}}$$

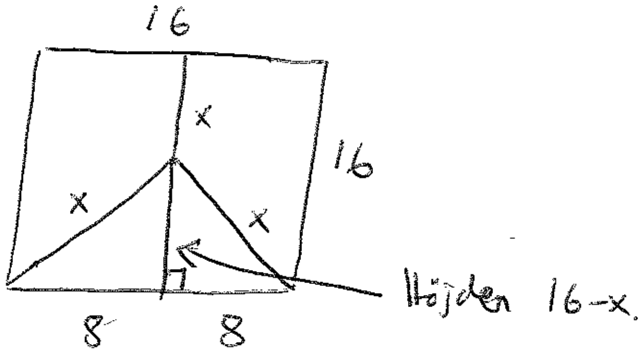
Ex:

Bestäm x i figuren

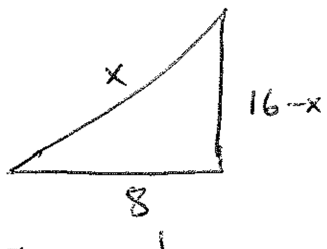


Lösningsförslag:

Eftersom vi har en likbent triangel så delar höjden basen i två lika stora delar.



Vi kollar närmare på en rätvinklig triangel.



Pythagoras sats ger att

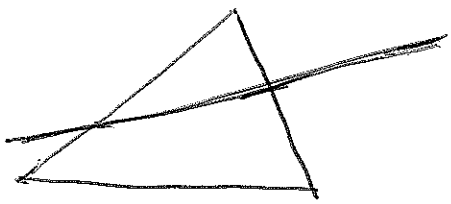
$$8^2 + (16-x)^2 = x^2 \iff 64 + 256 - 32x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2}$$

$$\iff$$

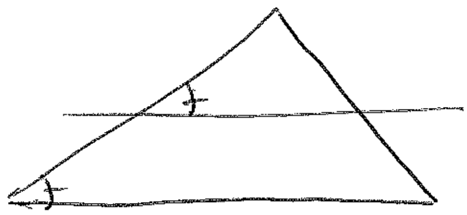
$$320 = 32x \iff \underline{\underline{x = 10 \text{ cm}}}$$

Definition:

En __transversal__ är en rät linje som skär två sidor i en triangel. Om transversalen är parallell med triangelns tredje sida kallas den för en __parallelltransversal__



Transversal



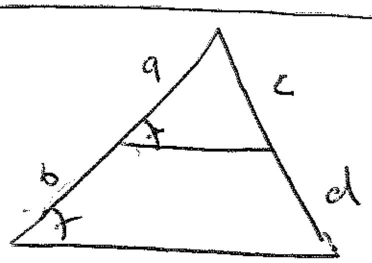
Parallelltransversal

Topptriangelsatsen:

En parallelltransversal avskär en topptriangel som är likformig med hela triangeln.

Transversalsatsen:

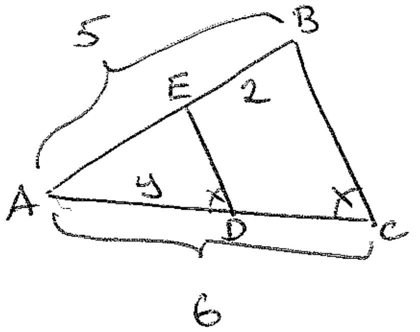
En parallelltransversal delar två sidor i en triangel i samma förhållande



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ex:

Bestäm y i figuren.



(cm)

Lösningsförslag:

Observera att DE är en parallell transversal.

Eftersom BE = 2 cm så är AE = 5 − 2 = 3 cm.

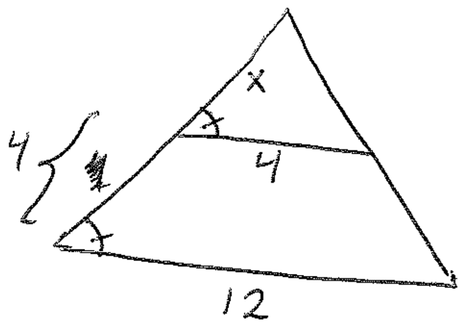
Nu ger Transversalsatsen att

$$\frac{y}{6-y} = \frac{3}{2} \iff 2y = 18 - 3y \iff 5y = 18 \iff y = 3{,}6 \text{ cm}$$

DC

Ex:

Bestäm x i figuren.



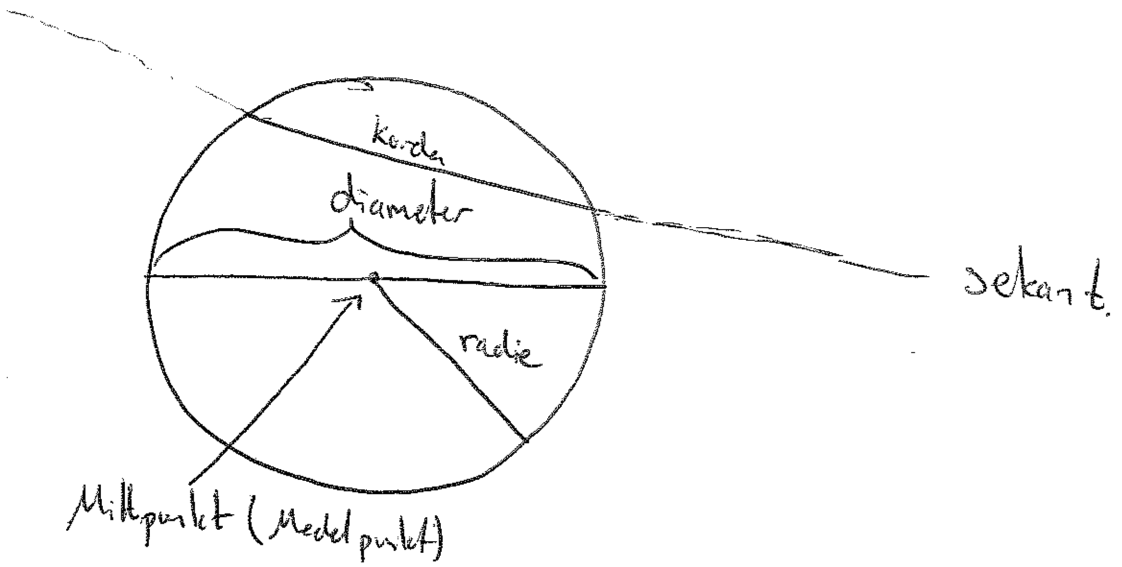
(cm)

Lösningsförslag:

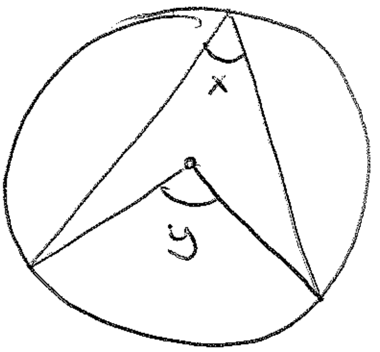
Enligt topptriangelsatsen så har vi att

$$\frac{4+x}{x} = \frac{12}{4} \iff 16 + 4x = 12x \iff 16 = 8x \iff \underline{\underline{x = 2 \text{ cm}}}$$

Terminologi



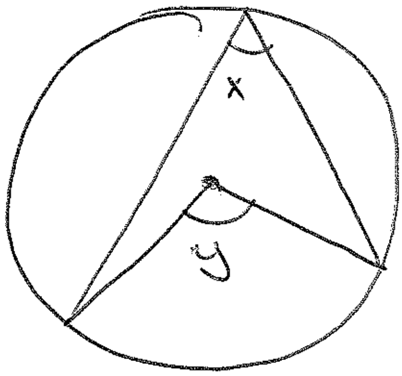
- Radien är sträckan från cirkelns mittpunkt till cirkeln
- Sekanten är en linje genom två punkter på cirkeln.
- Kordan är den sträcka mellan två punkter på cirkeln.
- Diametern är en korda genom mittpunkten.



- x = randvinkel (bågvinkel)
  y = medelpunktsvinkel.

Randvinkelsatsen:

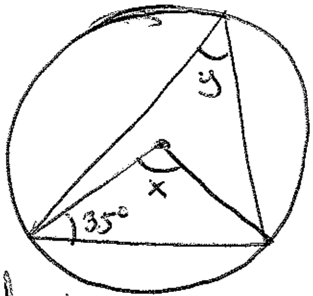
Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som randvinkeln på samma cirkelbåge.



$y = 2x$

Ex:

Bestäm x och y i figuren.



Lösningsförslag:

Eftersom sidorna i triangeln är radien i cirkeln så är triangeln likbent. Därför är

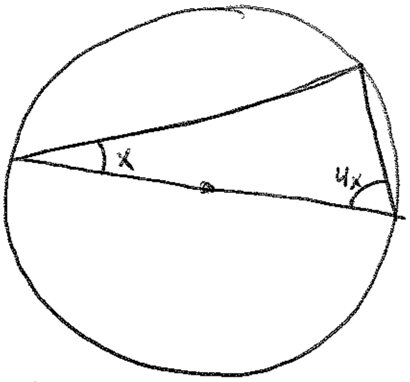
$$x = 180° - 35° - 35° = \underline{\underline{110°}}.$$

Använd nu randvinkelsatsen som ger att

$$x = 2y \Rightarrow 110° = 2y \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 55°}}$$

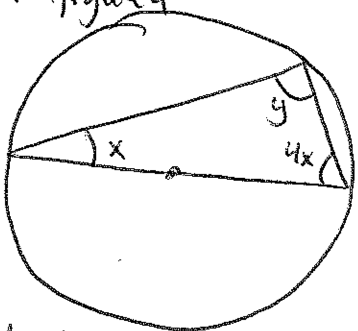
Ex:

Bestäm x i figuren.



Lösningsförslag:

För in y i figuren



Randvinkelsatsen ger att $180 = 2y \Leftrightarrow y = 90°$.

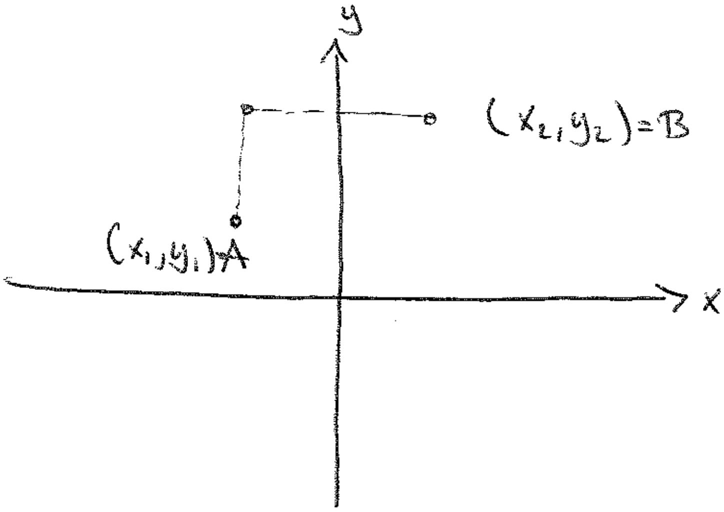
Vinkelsumman i en triangel ger att

$$90° + x + 4x = 180°$$

$$\Leftrightarrow$$

$$5x = 90° \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 18}}$$

Avståndsformeln



Vi vill beräkna avståndet mellan $A=(x_1,y_1)$ och $(x_2,y_2)=B$.

Vi skapar en punkt $C=(x_1,y_2)$ varvid vi ser att vi har en triangel ABC.

Längden $AC = y_2-y_1$ och längden $BC = x_2-x_1$

Pythagoras sats ger att

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Mittpunktsformeln

Om M är mittpunkt på sträckan AB där $A = (x_1, y_1)$ och $B = (x_2, y_2)$, då har M koordinaterna

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ex:

Låt $A=(0,0)$, $B=(0,3)$, $C=(3,3)$ och $D=(3,0)$ vara hörnen i en kvadrat. Om man sätter en punkt M mitt i kvadraten så är detta mittpunkten på diagonalen i kvadraten. Beräkna arean av triangeln AMD.

Lösningsförslag:

Vi kan använda mittpunktsformeln på sträckan AC:

$$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Triangeln har höjd $\frac{3}{2}$ och bas 3, så arean blir

$$A = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9}{4} \text{ areaenheter.}$$

Funktioner

Definition:

En regel som till varje tillåtet x-värde ger exakt ett y-värde kallas en funktion.
Vi säger då att y är en funktion av x.

Hur kan man avgöra om grafen är en funktion eller inte?

Svar: Om varje vertikal linje skär grafen i exakt en punkt då är grafen en funktion.

Ex:
Betrakta $y = x^2+1$. Detta är en funktion.
Ibland så skriver vi $y(x) = x^2+1$ för att betona att y är en funktion av x.
Vi gör en tabell:

Tabell:

x	0	1	-1	2	-2
$y(x)$	1	2	2	5	5

$y(0) = 0^2 + 1 = \underline{1}$

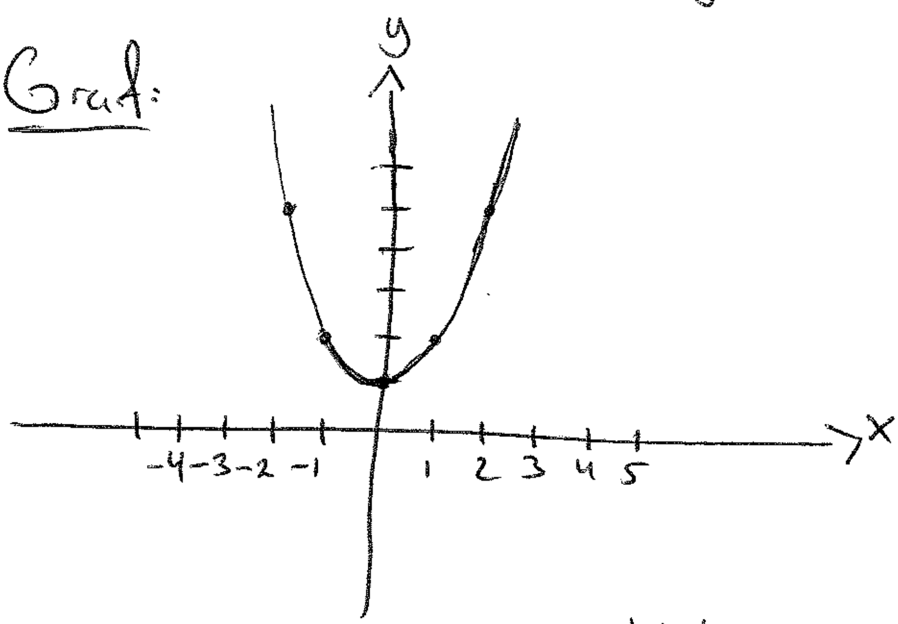
$y(1) = 1^2 + 1 = 2$

$y(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$y(2) = 2^2 + 1 = 5$

$y(-2) = (-2)^2 + 1 = 5.$

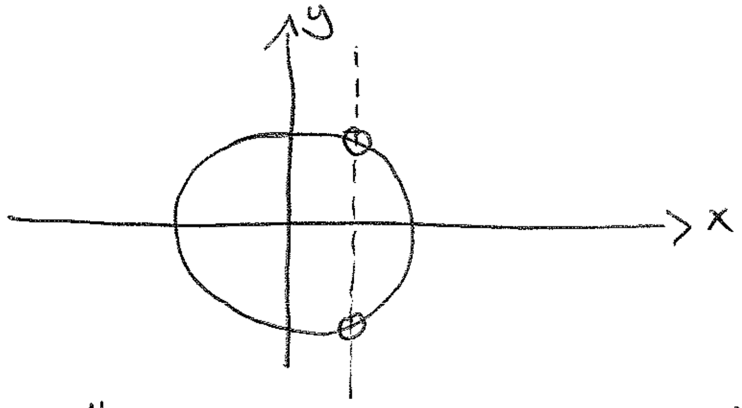
Graf:



Observera att varje vertikal linje skär grafen precis en gång.

Ex:

Betrakta följande graf.



Säg att detta är en cirkel med radie 1.
Detta är inte grafen av en funktion, ty varje vertikal linje skär cirkeln i två punkter.
Däremot så ~~består~~ består grafen av två funktioner

$$y_1 = \sqrt{1-x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{1-x^2}$$

Här är y_1 övre halvcirkeln och y_2 den undre halvcirkeln.

Definition:

Låt y(x) vara en funktion. Då är y(x):s **definitionsmängd** alla de x som man får stoppa in i y. Vidare så är y(x):s **värdemängd** de y-värden vi kan få.

Ex:

Låt $y(x) = x^2+1$. Här är y:s definitionsmängd alla reella tal. Vidare så är y:s värdemängd alla $y \geq 1$, dvs vi kan inte få andra y-värden än $y=1$. (Se grafen från exemplet på sidan 21-22.)

Tex så kan vi inte få $y=0$, ty vi kan **inte** lösa ekvationen $x^2+1=0$. med reella tal

Ex:

Låt $y(x)=\sqrt{x-1}$. Eftersom "roten ur" inte är definierad för negativa tal så är y:s definitionsmängd de $x \geq 1$. Vidare så kan man inte få negativa tal med "roten ur", så värdemängden $y \geq 0$.

Definition:

Om $y(x)$ är en funktion så betecknar vi ibland denna funktion med $y=f(x)$.

Ex:

Låt $f(x)=x^3+2x+1$. För säga hur vi ska rita denna i ett koordinatsystem så skriver vi ibland $y=f(x)=x^3+2x+1$.

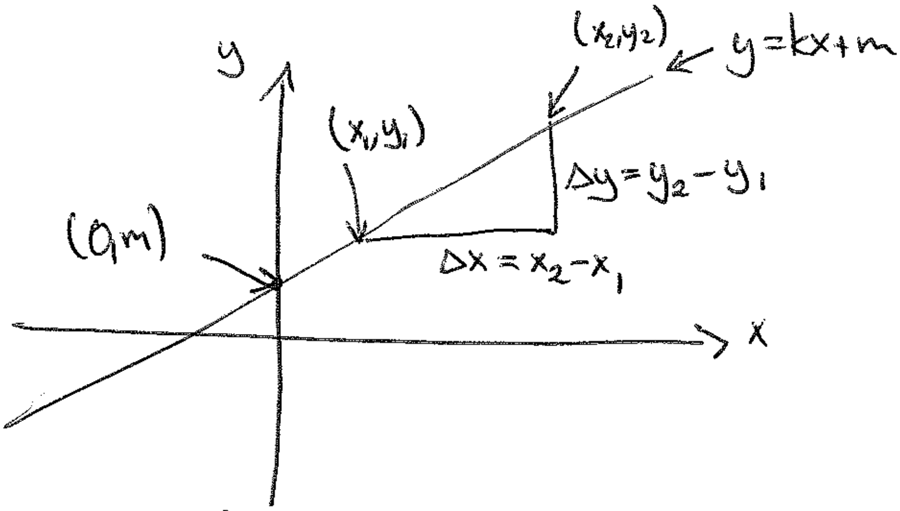
Definition:

Linjen $y=kx+m$ har lutningen k och skär y-axeln i punkten $(0,m)$.

En linjes lutning

Man brukar benämna en linjes lutning med bokstaven k. Vad är då k? Man kan beräkna k genom

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

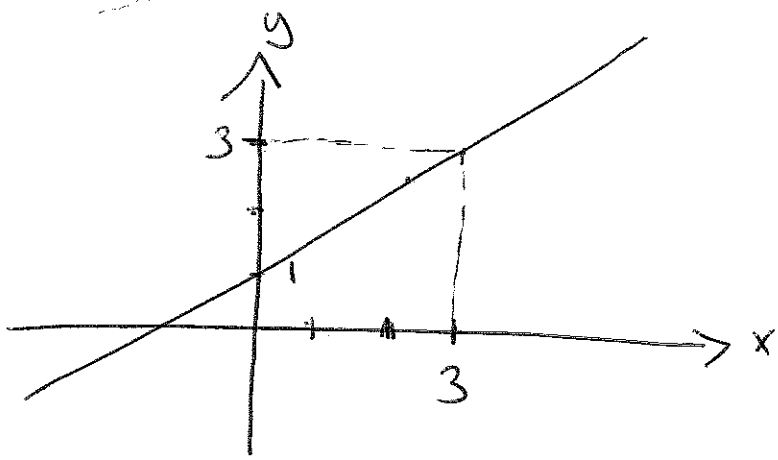


Vi kallar k för linjens riktningskoefficient. Ibland pratar vi bara om k-värdet.

Anmärkning:

En linjes k-värde berättar hur många y-steg linjen ~~[illegible]~~ ska ta för varje x-steg.

Ex:



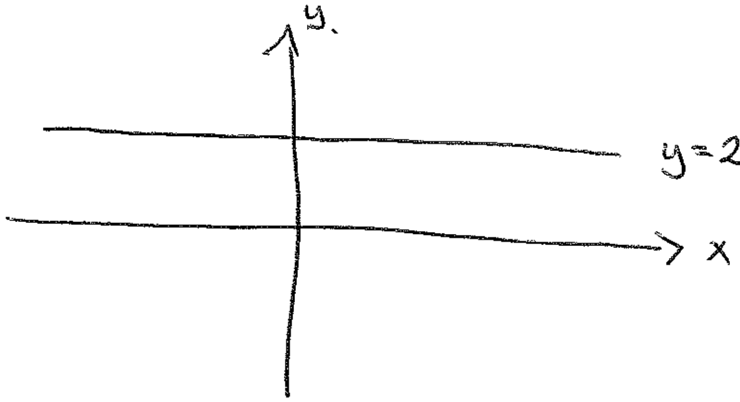
Här kan vi utläsa m-värdet direkt: $m = 1$.
Vidare så är k-värdet

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Alltså är linjens ekvation

$$y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Ex:



Här har funktionen k-värde lika med 0, ty

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

för alla val av x-värden x_1 och x_2.
Detta kallas för en konstant funktion.

Definition:

Låt $y_1 = k_1 x + m_1$ och $y_2 = k_2 x + m_2$ vara två linjer. Vi säger att

a) y_1 och y_2 är parallella om $k_1 = k_2$, dvs har samma lutning.

b) y_1 och y_2 är vinkelräta om $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Ex:

Låt $y = 4x + 3$. Vi ska hitta en linje som är parallell med y och en linje som är vinkelrät med y.

Parallell:

Det räcker att de har samma riktningskoefficient, så varje linje $y_p = 4x + m$, där m är vilket tal som helst, är parallell med $y = 4x + 3$.

Vinkelrät:

Eftersom k-värdet för $y = 4x + 3$ är $k_1 = 4$ så måste vi hitta k_2 så att $k_1 \cdot k_2 = -1$, dvs

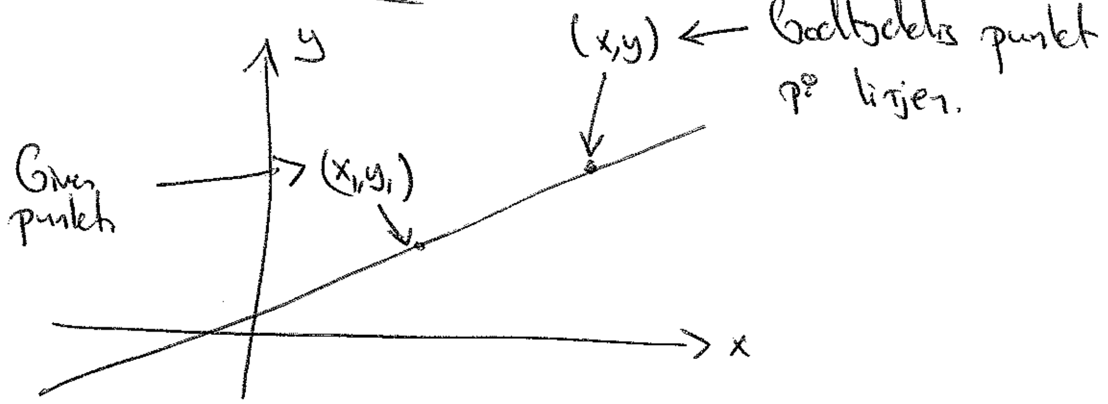
$$4k_2 = -1 \iff k_2 = -1/4.$$

I övrigt så kan vi välja vilket m-värde som helst.
Så $y_v = -\frac{x}{4} + m$ är vinkelrät med $y = 4x + 3$

Fakta om en rät linje:

- En linje bestäms av två punkter.
- En linje bestäms av dess lutning och en punkt.

Enpunktsformeln:



Vi bestämmer k-värdet:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{k(x-x_1) = y-y_1}$$ Enpunktsformeln.

Ex:

Ange den räta linjens ekvation som går genom (4,5) och har k=2.

Med enpunktsformeln så får vi att

$$y-5=2(x-4)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y=2x-8+5$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{y=2x-3}}$$

Med y=kx+m så vill vi bestämma m i y=2x+m.
Vi använder att y(4)=5, dvs att

$$5=2\cdot 4+m \Leftrightarrow m=-3$$

Alltså är linjen $\underline{\underline{y=2x-3}}$

Ex:

Vi ska bestämma den räta linjens ekvation som går genom punkterna $(5,7)$ och $(-3,-1)$.

Vi börjar med k-värdet:

$$k = \frac{7-(-1)}{5-(-3)} = \frac{7+1}{5+3} = \frac{8}{8} = 1.$$

Nu ger enpunktsformeln att

$$y-7 = 1(x-5)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y-7 = x-5$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{y = x+2}}$$

Definition:

Vi har följande representationer för en rät linje

- k-form: $y = kx+m$
- Enpunktsform: $y-y_1 = k(x-x_1)$
- Horisontell linje: $y = b$
- Vertikal linje: $x = a$
- allmän form: $ax+by+c=0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Olikheter:

- $<$ mindre än
- $\leq$ mindre än eller lika med
- $>$ större än
- $\geq$ större än eller lika med

Man använder dessa tecken för att jämföra uttryck.

Ex:

Lös olikheten $5x+1 < 21+x$.

Lösningsförslag:

$$5x+1 < 21+x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$5x-x < 21-1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{4x}{4} < \frac{20}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x < 5.$$

Alltså olikheten gäller för $x<5$, dvs alla tal mindre än 5.

Ex:

Lös olikheten $-3x \leq 9$

Lösningsförslag:

Man får inte dividera med -3 ty detta bevarar inte olikheten.

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{9}{-3}$$

$x \leq -3$. (Detta är alltså fel).

Varför blir det fel? Tag ett $x \leq -3$, säg $x = -4$. Då ska detta x uppfylla olikheten $-3x \leq 9$, men

$$-3 \cdot (-4) = 12 \not\leq 9.$$

Då man multiplicerar/dividerar med negativa tal så måste vi byta håll på olikheten.

Vi har alltså

$$-3x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{9}{-3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x \geq -3.}}$$

Linjära Ekvationssystem.

Ett linjärt ekvationssystem kan vara på formen

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

Här söker vi x och y så både ekvation (1) och (2) är uppfyllda.

Detta kan man göra på två sätt.

1) Grafiskt.

2) Algebraiskt.

Hur löser vi ekvationssystemet grafiskt?

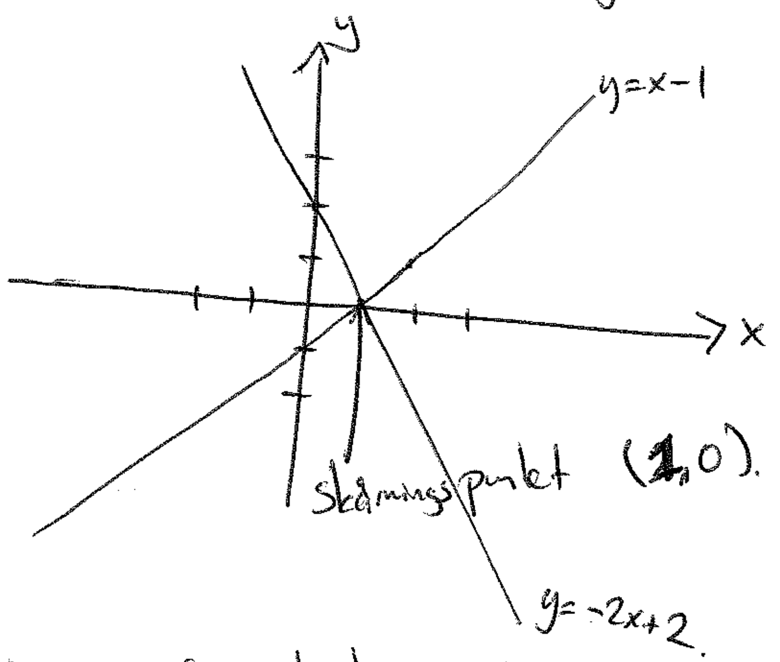
Jo, vi ritar $ax+by=c$ och $dx+ey=f$ i samma koordinatsystem. Om linjerna skär varandra så har vi en lösning. Om linjerna <u>inte</u> skär varandra så har vi ingen lösning till ekvationssystemet. Detta betyder att linjerna är parallella.

Ex.

Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Vi löser ekvationssystemet grafiskt.



Lösningen på ekvationssystemet är $x=1$, $y=0$.

Algebraiska lösningar:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

Vi skriver om (1): $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Sätt in detta i (2):

$$dx + e\left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right) = f$$

$$\left(d-\frac{ae}{b}\right)x+\frac{ec}{b}=f.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(d-\frac{ae}{b}\right)x=f-\frac{ec}{b}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x=\frac{f-\frac{ec}{b}}{d-\frac{ae}{b}}.$$

För detta x så sätter vi in i $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. Då får vi att

$$y=-\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{f-\frac{ec}{b}}{d-\frac{ae}{b}}\right)+\frac{c}{b}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y=\frac{\frac{ace}{b}-af}{bd-\frac{a\cancel{b}e}{\cancel{b}}}+\frac{c}{b}$$

Ex:

$$\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ 2x + y = 2. & (2). \end{cases}$$

Vi ska lösa detta ekvationssystemet algebraiskt.

Från (1) så får vi att $y = x-1$. Sätt in detta i (2):

$$2x + (x-1) = 2$$
$$\iff$$
$$3x - 1 = 2$$
$$\iff$$
$$3x = 3$$
$$\iff$$
$$x = 1.$$

För $x=1$ så får vi att $y = 1-1 = 0$.

Alltså är lösningen $x=1$ och $y=0$.

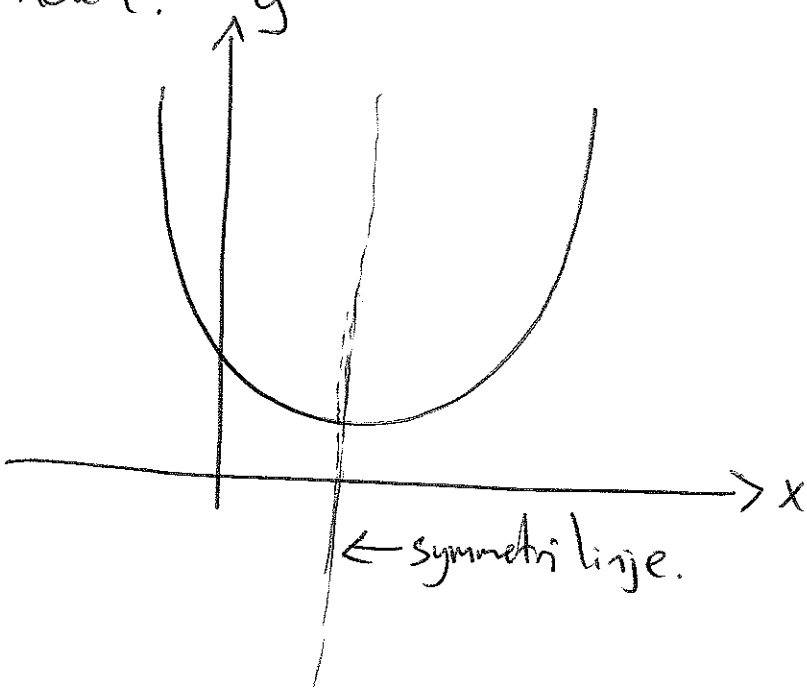
Andragradsfunktioner:

En generell andragradsfunktion är på formen

$$y = ax^2 + bx + c.$$

- Om $a > 0$ så är y konkav uppåt $\cup$ (Minpunkt)
- Om $a < 0$ så är y konkav nedåt $\cap$ (Maxpunkt).

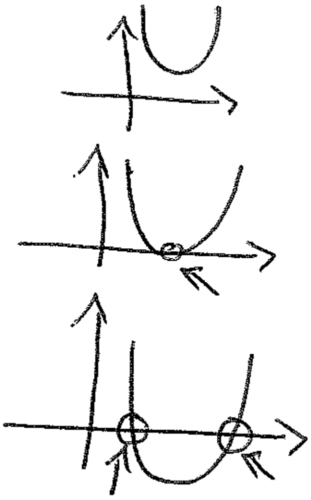
En andragradsfunktion är symmetrisk kring sin max eller minpunkt, den så kallade vertexpunkten.



För att kunna skissera andragradsfunktioner så behöver man ibland ~~kunna~~ behöva ta fram skärningen med x-axeln.

Man har tre fall.

- Ingen skärningspunkt
- En skärningspunkt
- Två skärningspunkter.



Detta handlar om att lösa $ax^2+bx+c=0$.

För att göra detta så har vi några metoder.

$$0 = ax^2+bx+c = (dx-?)(ex-??)$$

där $de=a$.

Detta betyder att $(dx-?)=0$ eller $(ex-??)=0$.

Frågan är hur man hittar ? och ??.

Detta kan vara svårt!

2) Kvadrat komplettering:

Dela med a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$

Vi gör så här:

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{1/2}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{1/2}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{1/2}\right)$$

Konjugatregeln

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Detta ger att lösningarna är

$$x = -\frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{1/2}$$

eller

$$x = -\frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{1/2}$$

3). Lösningsformel:

Dela med a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Låt $p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$. Då får vi

$$x^2 + px + q = 0.$$

Lösningarna är då

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ex:

$$2x^2 = 72 \iff \frac{2x^2}{2} = \frac{72}{2} \iff x^2 = 36.$$

$$\iff$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$\iff$$

$$\underline{\underline{x = \pm 6}}$$

Ex:

$$(x+1)(x-8) = 0$$

Denna ekvation har lösningarna $x = -1$ och $x = 8$.

Ex:

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

Vi använder oss av kvadratkomplettering.

$$0 = x^2 - 8x + 7 = \left(x - 8/2\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 7 =$$

$$= (x-4)^2 - 4^2 + 7 = (x-4)^2 - 16 + 7 =$$

$$= (x-4)^2 - 9 = (x-4)^2 - (9^{1/2})^2 =$$

$$= (x-4)^2 - 3^2 = (x-4+3)(x-4-3) =$$

$$= (x-1)(x-7).$$

Alltså har ekvationen lösningarna $x=1$ och $x=7$.

Ex:

Vi ska lösa ekvationen $(2x+1)^2 = 16x-7$.
Vi börjar med att utveckla VL:

$$4x^2 + 4x + 1 = 16x - 7$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$4x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Dela med 4:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Vi använder oss av lösningsformeln:

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = \frac{4}{2} = 2}} \text{ el. } \underline{\underline{x = \frac{2}{2} = 1}}$$

Statistik

Vilka lägesmått har vi?

1) Medelvärdet, dvs $\frac{\text{summan av talen}}{\text{antalet tal}}$

2) Medianen, dvs "mittpunkten" i datamängden

3) Typvärdet, dvs det "vanligaste" värdet.

Ex:

Betrakta talen 1, 3, 4, 1, 2, 1, 4, 7, 9, 12, 1, 2, 3, 4.

Vi ska beräkna alla typerna av lägesmått:

Medelvärdet: $\frac{1+3+4+1+2+1+4+7+9+12+1+2+3+4}{14} \approx \underline{\underline{3,86}}$

Medianen: Vi ordnar talen:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 7, 9, 12

$\frac{3+3}{2} = \underline{\underline{3}}$ är medianen.

Typvärdet: $\underline{\underline{1}}$ förekommer flest gånger.