# Matematik C

## Exponential- och potensfunktioner

### Definition

En exponentialfunktion är en funktion $f(x) = C \cdot a^x$ där $C$ och $a$ är konstanter och $a > 0$ men $a \neq 1$

Exponentialfunktionen kan man använda i vissa tillväxtproblem.

**Ex:**

En sjö har 2000 fiskar. Antag att tillväxten med antalet fiskar är konstant, dvs samma, varje år. Säg att ökningen med fiskar är 3% per år. När är det 4000 fiskar i sjön?

**Lösningsförslag:**

Förändringsfaktorn varje år är 1,03. (3%).
Så efter

1 år: $2000 \cdot 1{,}02$ fiskar

2 år: $2000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02$ fiskar

$\vdots$

x år: $2000 \cdot 1{,}02^x$ fiskar

Vi frågar oss när $2000 \cdot 1{,}02^x = 4000 \iff 1{,}02^x = 2000$

$\iff x = 383{,}8.$

Så efter ungefär 384 år är det 4000 fiskar i sjön

Hur vi löste ekvationen ska vi snart lära oss.

Svaret är logaritmer!

---

## Potenslagar:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a \neq 0)$
- $a^{1/n}$ = Detta är en rot till $x^n = a$.
- $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$

Ex:

1) $6^{-2} \cdot 6^3 = 6^{-2+3} = 6^1 = 6$

2) $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

3) $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$.

4) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

Ex:

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \left(\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{a^{1/2}}{b^{1/2}}\right)^{1/2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\left(\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right)^{1/2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b^{1/4}}{a^{1/4}}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^{3/4}}{b^{3/4}}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{a^{3/8}}{b^{3/8}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{3/8}$$

Ex:

Arean för en sfär är $4\pi r^2$ medan volymen för en sfär är $\frac{4\pi r^3}{3}$. Bestäm talen k och p så att

$$A = k\cdot V^p$$

$$\iff$$

$$4\pi r^2 = k\cdot\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)^p$$

$$\iff$$

$$4\pi r^2 = k\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\right)^p r^{3p} \quad \Rightarrow \quad 3p = 2 \iff \underline{\underline{p = 2/3}}$$

För $p = 2/3$ så betraktar vi ekvationen

$$4\pi = k\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} \iff \frac{3^{2/3}\cdot 4\pi}{(4\pi)^{2/3}} = k$$

$$\iff (3^2)^{1/3}\cdot(4\pi)^{1/3} = k \iff \underline{\underline{(36\pi)^{1/3} = k}}$$

# Logaritmer:

## Definition:

$a^x = b$ är ekvivalent med att $x = \log_a b$

Vi säger att $x$ är a-logaritmen för b.

---

## Ex:

1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

2) $\log_a a^x = x.$

3) $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$

4) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

---

## Logaritmlagar:

1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^x = x \log_a b.$

---

## Anmärkning:

Då vi pratar om 10-logaritmen så brukar vi skriva lg:

$$\lg a := \log_{10} a.$$

Ex:

1) $\log_{1/3} 3^{2x} = \log_{1/3} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} = -2x$

2) $4^{3x/2} = 8 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \log_4 4^{3x/2} = \log_4 8 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \log_4 8$

logaritmera

$\Leftrightarrow$

$x = \frac{2}{3}\log_4 8$

3) $\log_{15} 75 + \log_{15} 3 = \log_{15}(75 \cdot 3) =$

$= \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = \underline{\underline{2}}.$

4) $2\log_3 12 - 4\log_3 6 = \log_3 12^2 - \log_3 6^4 =$

$= \log_3\left(\frac{12^2}{6^4}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log(3^{-2}) = -2$

Ex:

Lös ekvationen $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$.

Lösningsförslag:

Enligt logaritmlagarna så får vi att

$$\log_4\left(\frac{x+4}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Höj upp med 4:

$$4^{\log_4\left(\frac{x+4}{(x+1)^2}\right)} = 4^{1/2}$$

Vi får att

$$\frac{x+4}{(x+1)^2} = 2.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \quad x+4 = 2(x^2+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = 2x^2+3x-2$$

Dela med 2:

$$0 = x^2 + \frac{3}{2} - 1 = (x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - 1 =$$

$$= (x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{16}{16} = (x+\frac{3}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2 =$$

$$= (x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4})(x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}) =$$

$$= (x+2)(x-\frac{1}{2})$$

Alltså $x=-2$ eller $x=\frac{1}{2}$ är lösningar.

<u>Koll:</u>

$x=-2$: $VL = \log_4(-2+4) - 2\log_4(-2+1) =$

$$= \log_4 2 - \log_4(-1)^2 = \log_4 2 = \log_4 4^{1/2} = \frac{1}{2} = HL$$

(ok)

$x=\frac{1}{2}$, $VL = \log_4(\frac{1}{2}+4) - 2\log_4(\frac{1}{2}+1) =$

$$= \log_4 \frac{9}{2} - \log_4(\frac{3}{2})^2 = \log_4 \frac{9}{2} / \frac{9}{4} = \log_4 2 = \frac{1}{2} = HL.$$

(ok)

<u>Svar:</u> $x=-2$ och $x=1/2$ är lösningar.

Ex:

Folkmängden i ett land ökar exponentiellt med tiden. År 1995 var folkmängden 10,1 miljoner och år 2000 var den 11,8 miljoner. Vilket år blir folkmängden till 15 miljoner.

Lösningsförslag:

Vi ska försöka hitta en funktion $y = C\cdot a^x$ som beskriver tillväxten på folkmängden.

Då vi är på år 1995 så är $x=0$, dvs

$$10,1 = y(0) = C\cdot a^0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$10,1 = C.$$

Kvar att bestämma är $a$. Då $x=5$ så är året 2000, så

$$11,8 = y(5) = 10,1\, a^5$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{11,8}{10,1} = a^5 \Longleftrightarrow \left(\frac{11,8}{10,1}\right)^{1/5} = a \Longleftrightarrow a \approx 1,03.$$

Vi får alltså funktionen $y = 10,1\cdot 1,03^x$. Vi vill hitta $x$ då $y = 15$, dvs lösa ekvationen.

$$15 = 10,1\cdot 1,03^x \Longleftrightarrow \frac{15}{10,1} = 1,03^x$$

$$\overset{\text{logaritmer}}{\Longrightarrow} \lg\left(\frac{15}{10,1}\right) = \lg(1,03^x) \Longleftrightarrow \lg\left(\frac{15}{10,1}\right) = x\lg 1,03$$

$$\Longleftrightarrow x = \lg\left(\frac{15}{10,1}\right)/\lg 1,03 \approx 13,4$$

Svar: 2008 är folkmängden 15 mil

# Förändringshastigheter

**Definition:**

Låt $y$ vara en funktion av $x$. Den genomsnittliga förändringshastigheten är då

$$\frac{\text{förändring över ett intervall för } y}{\text{intervallets längd}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

---

**Ex:**

En cirkulär oljefläck breder ut sig på vattnet. Arean $A$ m$^2$ vid tiden $x$ h följer funktionen

$$A(x) = 3,1 \cdot (60 + 5x)^2$$

Vad är den genomsnittliga förändringshastigheten för oljefläckens area från $x=3$ till $x=5$.

**Lösningsförslag:**

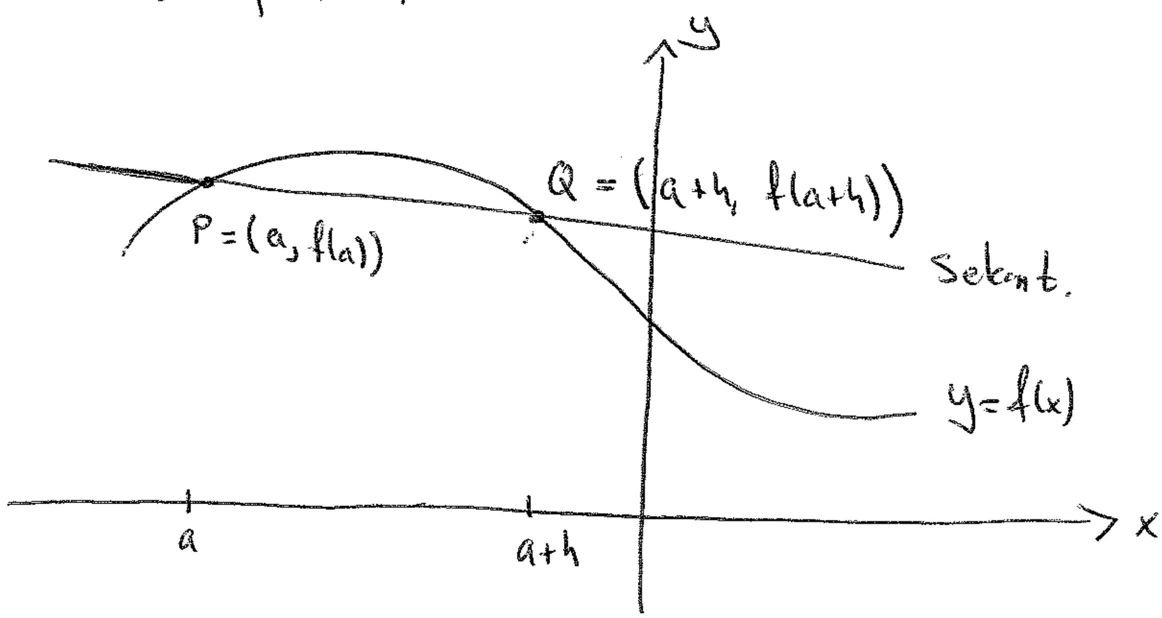
Vi har att

$$\frac{A(5)-A(3)}{5-3} = \frac{3,1 \cdot (60+5\cdot 5)^2 - 3,1 \cdot (60+5\cdot 3)^2}{2} =$$

$$= \frac{3,1\,(85^2 - 75^2)}{2} = \frac{3,1 \cdot 1600}{2} = 3,1 \cdot 800 = 2480\ \text{m}^2/\text{h}.$$

# Kurvors lutning

Vi är intresserad av hur en kurva lutar i en viss punkt.




Sekantens lutning $k_{PQ}$ är

$$k_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vi är intresserad av kurvans $y = f(x)$ lutning i punkten P. Hur får vi reda på linjens lutning som tangerar i punkten P, den så kallade tangentens lutning.

Låt nu $h$ bli mindre och mindre, dvs närma sig 0.

Gör vi detta så kommer punkten Q närma sig P och sekantens lutning går över i tangentens lutning.

Definition:

Kurvans $y=f(x)$ lutning i en punkt P kallar vi för tangentens lutning i P. Man brukar kalla tangentens lutning i en punkt för derivatan i punkten.

---

Ex:

Låt $f(x)=x^2+1$. Vad är tangentens ekvation i $x=1$?

Vi börjar med att hitta tangentens lutning:

$$k_T = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+1 - (1^2+1)}{h} =$$

$$= \frac{1+2h+h^2+1-2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = h+2.$$

Då $h$ närmar sig noll så närmar sig $k_T = 2$.

Alltså är tangentens lutning 2. För att bestämma tangentens ekvation så använder vi enpunktsformeln.

Då $x=1$ så är $y=f(1)=1^2+1=2$.

Enpunktsformeln ger att

$$y-2=2(x-1) \iff y=2x.$$

Alltså är tangentens ekvation i $x=1$: $\underline{\underline{y=2x}}$

Ex:

Låt $f(x) = x^2$. Vi ska bestämma tangenternas ekvationer till $f(x)$ som går genom punkten $(1,-3)$.

Låt $(a, a^2)$ vara en godtycklig punkt på kurvan $y = f(x)$. Tangentens lutning i $x = a$ är

$$k_T = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 2a)}{\cancel{h}} = h + 2a.$$

Då $h$ närmar sig noll så närmar sig $k_T = 2a$.

En linje som går genom $(a, a^2)$ och $(1,-3)$ måste ha lutningen

$$k = \frac{a^2 - (-3)}{a - 1} = \frac{a^2 + 3}{a - 1}$$

För att tangenten ska kunna tangera kurvan och gå igenom $(1,-3)$ så måste $k = k_T$, dvs

$$\frac{a^2 + 3}{a - 1} = 2a \implies a^2 + 3 = 2a^2 - 2a \iff$$

$$0 = a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1)$$

Alltså då $a = 3$ eller då $a = -1$ så går tangenten genom $(1,-3)$ och tangerar $y = f(x)$.

Vi ska bestämma tangentens ekvation i de olika fallen:

$\underline{a=3}$: $k_T = 2\cdot 3 = 6$ Punkt på $y=f(x)$: $(3,9)$

Enpunktsformeln ger att tangentens ekvation är

$$y-9 = 6(x-3) \iff \underline{\underline{y = 6x-9}}.$$

$a=-1$: $k_T = 2\cdot(-1) = -2$ Punkt på $y=f(x)$: $(-1,1)$

Enpunktsformeln ger att tangentens ekvation är

$$y-1 = -2(x-(-1)) \iff \underline{\underline{y=-2x-1}}$$

---

<u>Definition:</u>

Låt $f(x)$ vara en funktion. Gränsvärdet för $f(x)$ då $x$ går mot $a$, skrivet

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

betyder att $f(x)$ kan fås att anta värden hur nära $L$ som helst bara $x$ väljs tillräckligt nära (men inte nödvändigtvis antar) värdet $a$.

Ex:

Vad blir $\lim_{x \to 2} (3x+1)$?

Vi sätter in värden nära $x=2$:

$x = 2{,}01$ : $3 \cdot (2{,}01)+1 = 6{,}03+1 = 7{,}03$
$x = 2{,}001$ : $3 \cdot (2{,}001)+1 = 7{,}003$
$x = 2{,}0001$ : $3 \cdot (2{,}0001)+1 = 7{,}0003$

Alltså desto närmre $x=2$ vi närmar oss så närmar sig $3x+1 = 7$. Alltså

$$\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7.$$

---

Ex:

Låt $f(x) = x^3$. Vad blir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} ?$$

Det vi ska bestämma är alltså tangentens lutning i $x=1$. Vi får att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (3+3h+h^2)$$

Då $h$ närmar sig noll så går $3+3h+h^2$ mot $\underline{\underline{3}}$.

**Definition:**

Låt $f(x)$ vara en funktion. Derivatan för $f$ i punkten $x=a$, skrivet $f'(a)$, är differenskvoten

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Om vi sätter $h = x-a$ så får vi att

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

---

**Ex:**

Vad är $f'(0)$ om $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$.

Vi har att

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 + 4(0+h) + 5 - (2\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \underline{\underline{4.}}$$

Vi har beräknat derivatan för olika polynom i vissa punkter. Men om vi inte sätter in någon punkt $x=a$ så blir derivatan en funktion själv:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Detta betyder att vi först kan beräkna derivatan och sedan sätta in $x=a$.

Vi ska betrakta några enkla polynom:

- $f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1.$$

- $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x.$$

- $f(x) = x^3$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2$$

Vi har alltså:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x$ | $1$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x$. |

Generellt har vi att:

Om $f(x) = x^n$ så är

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

Ex:

Låt $f(x) = a$, där $a$ är en konstant.

Då är

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = 0$$

---

**Deriveringsregler**

Om $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner så gäller att

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

**Notationer:**

$$f'(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx} = D f(x)$$

(d-y-dx)

Ex:

1) $f(x) = 2x^4 \Rightarrow f'(x) = 2\cdot 4x^3 = 8x^3$

2) $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\cdot 5x^4 + 2\cdot 3x^2 =$
$= 15x^4 + 6x^2$

3) $y = x+1 \Rightarrow y'(x) = 1$

4) $y = 3x^2 + 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x + 2.$

5) $f(x) = (2x+1)^2$

Utveckla först:

$f(x) = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 8x + 4.$

---

Anmärkning:

Samma derivata då $x^n$, $n = \frac{m}{k}$, dvs

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} = \frac{m}{k} x^{\frac{m}{k}-1}$$

---

Ex:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} + 3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3.$
$= x^{1/2} + 3x$

2) $f(x) = \frac{1}{x} - x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = (-1)x^{-2} - \frac{3}{2} x^{1/2} =$
$= x^{-1} - x^{3/2}$
$= -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

# Derivatan av exponentialfunktioner.

Låt $f(x) = a^x$ vara en exponentialfunktion

Vi undrar vad $f'(x)$ är?

Vi betraktar differenskvoten

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Frågan är vad som händer med

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \;?$$

Numeriskt så kan vi se att

$$\frac{2^h - 1}{h} \to 0{,}69 \,, \quad \frac{3^h - 1}{h} \to 1{,}10 \,, \quad \frac{10^h - 1}{h} \to 2{,}30.$$

Alltså får vi att

$$f'(x) = k \cdot a^x$$

där $k \approx 0{,}69$ om $a = 2$

$k \approx 1{,}10$ om $a = 3$

$k \approx 2{,}30$ om $a = 10$

Mellan $a=2$ och $a=3$ så borde det finnas ett tal, säg $a=e$, så att

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

För $e$ så har vi att om $f(x)=e^x$ så blir $f'(x)=e^x$.

Definition:

Låt $f(x)=e^x$. Då gäller att $f'(x)=e^x$.
Vidare så definierar vi $\ln x = \log_e x$, dvs $\log_e e = \ln e = 1$. Vi kallar $\ln$ för den naturliga logaritmen.

~~Ex~~ Ex:

Betrakta $f(x)=e^{kx}$. Vad blir då $f'(x)$?
Vi har att

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{kx}e^{kh}-e^{kx}}{h}=e^{kx}\lim_{h\to 0}\frac{e^{kh}-1}{h}\underset{\substack{t=kh\\ h\to 0\Rightarrow t\to 0}}{=}$$

$$=e^{kx}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t/k}=$$

$$=ke^{kx}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=ke^{kx}.$$

Alltså $\boxed{f'(x)=ke^{kx}}$ Viktig regel.

Men vad blir derivatan för $f(x)=a^x$ då $a \neq e$? Vi ha att

$$f(x)=a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Nu kan vi använda att om $f(x)=e^{kx}$ så är $f'(x)=ke^x$. Detta ger att

$$f'(x)=\ln a \, e^{x\ln a} = \ln a \, e^{\ln a^x} =$$

$$=(\ln a)\cdot a^x$$

$$\boxed{\text{Om } f(x)=a^x \text{, då är } f'(x)=(\ln a)\,a^x}$$

Ex:

1) $f(x)=7e^{4x} \Rightarrow f'(x)=7\cdot 4e^{4x}=28e^{4x}$

2) $f(x)=3^x \Rightarrow f'(x)=(\ln 3)\cdot 3^x$

3) $f(x)=3e^{2x}+4^x+x^2 \Rightarrow f'(x)=6e^{2x}+(\ln 4)\,4^x+2x$

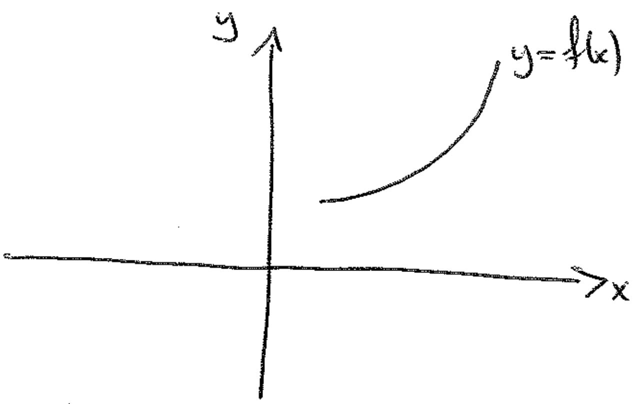
# Derivata och funktioners grafer.

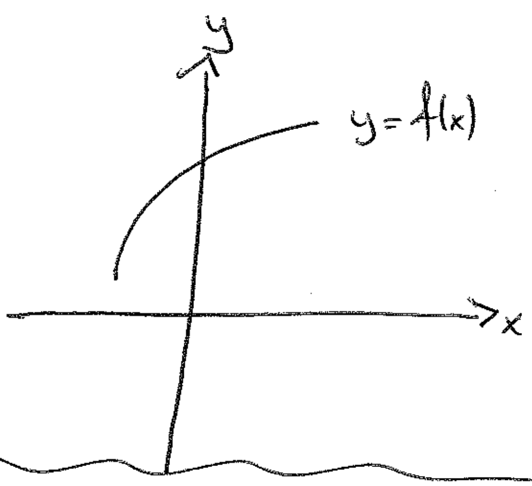
Vi ska använda funktioners derivata för att ta reda på hur funktionen uppför sig.

1) Om $f'(x) > 0$ för $a < x < b$ så växer $f$ för $a < x < b$

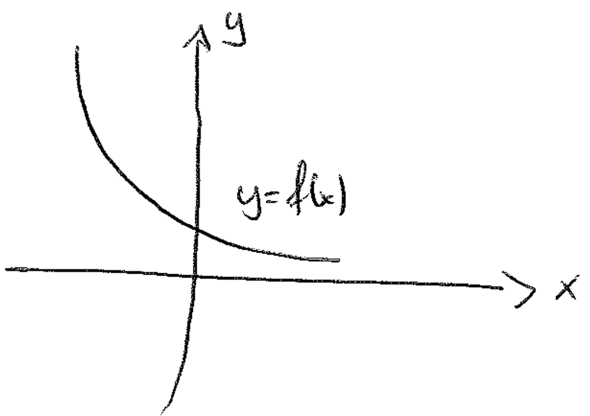
2) Om $f'(x) < 0$ för $a < x < b$ så avtar $f$ för $a < x < b$

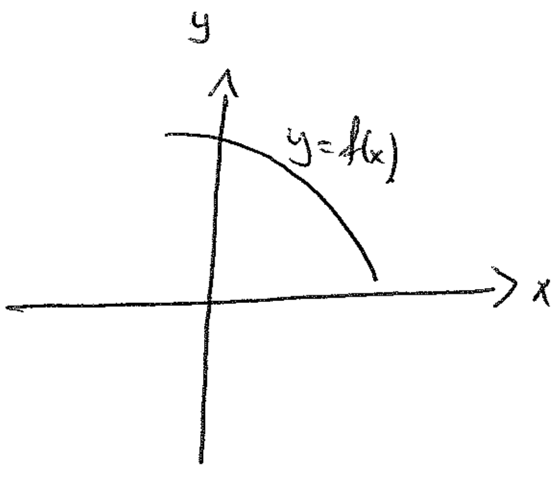
f växer:



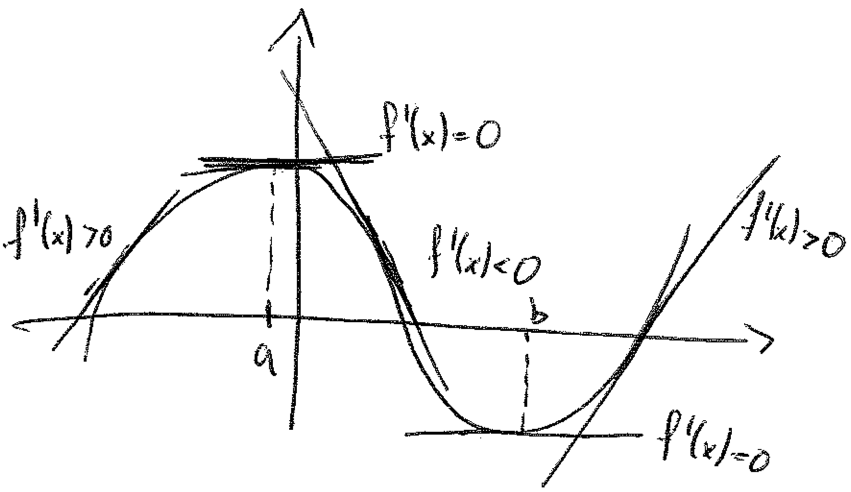




f avtar:



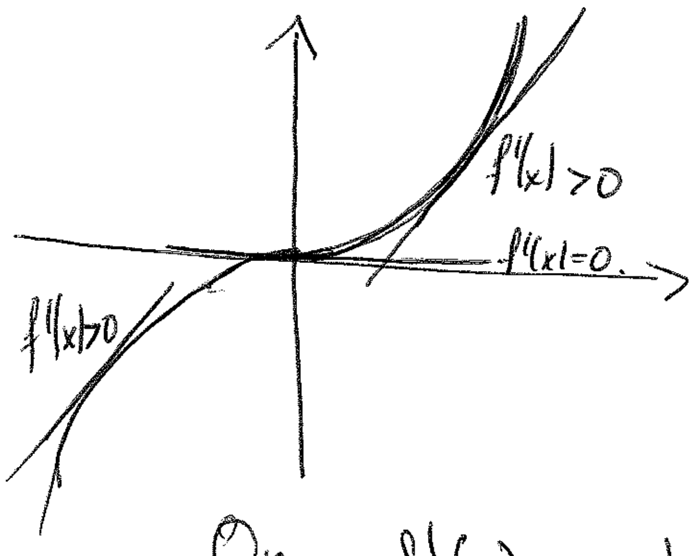



Vad händer då $f(x)=0$?




Som bilden visar så verkar det som derivatan byter tecken på vardera sida om $f(x)=0$

Men detta gäller endast för lokala maxpunkter, dvs där $f'(a)=0$ i bilden, och lokala minpunkter, dvs där $f'(b)=0$ i bilden.




Om $f'(x)>0$ kring båda sidorna om $f'(x)=0$ så får vi något som kallas för en teraspunkt. (På samma sätt om $f'(x)<0$ på båda sidorna om $f'(x)=0$).

# Hur skisserar man grafer?

1). När skär $f(x)$ x-axeln, dvs lös ekvationen $f(x)=0$. Det är inte säkert att $f(x)$ skär x-axeln.

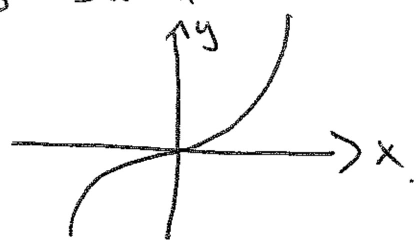
2) Skär $f(x)$ y-axeln? $f$ skär y-axeln om man kan beräkna $f(0)$.

3). Har $f$ kritiska punkter, dvs går det att lösa $f'(x)=0$? Säg att $x=x_0$ är en kritisk punkt.

a) Om $f'(x)>0$ för $x<x_0$ och $f'(x)<0$ för $x>x_0$ så är $x_0$ ett lokalt maximum.


b) Om $f'(x)<0$ för $x<x_0$ och $f'(x)>0$ för $x>x_0$. så är $x_0$ ett lokalt minimum


c) Om $f'(x)>0$ för $x<x_0$ och $x>x_0$ eller om $f'(x)<0$ för $x<x_0$ och $x>x_0$ så är $x_0$ en terasspunkt




4) Beräkna $f(x_0)$.

Ex:

Vi ska skissera $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

Låt oss börja med att undersöka om $f(x)$ skär x-axeln. Vi har att

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$$

Alltså har $f(x)$ inga reella ~~~~ nollställen.

Vidare så är $f(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$, dvs $f$ skär y-axeln i $y = 4$.

Låt oss nu kolla efter lokala max/minpunkter.

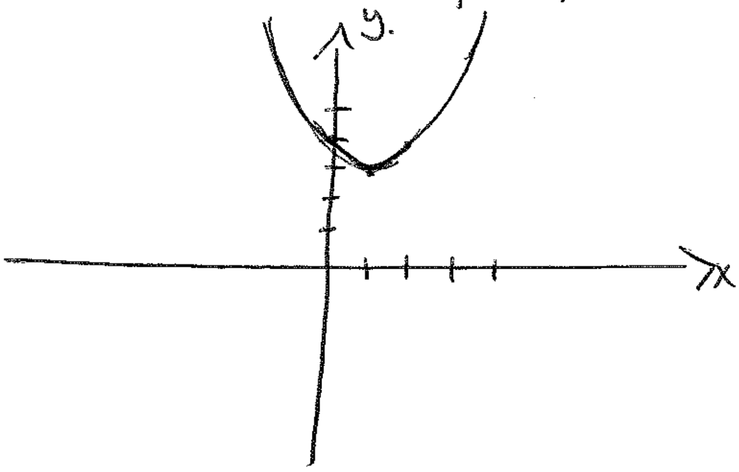
Derivering ger att

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Alltså är $x=1$ en kritisk punkt.

För $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och för $x < 1$ så är $f'(x) < 0$.

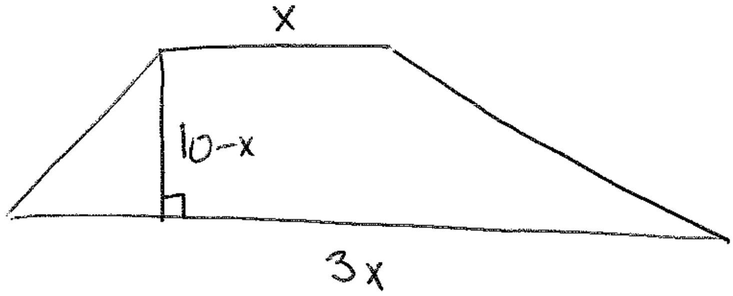
Alltså är $x=1$ en minpunkt, och $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$



Man kan även derivatan för att lösa mer tillämpade problem:

Ex:

Betrakta följande parallelltrapets:




För vilket värde på x har parallelltrapetsen så stor area som möjligt?

Vi måste börja med att ta fram en formel för arean för parallelltrapetsen.

$$A(x) = \frac{h(a+b)}{2} = \frac{(10-x)\cdot(x+3x)}{2} = \frac{4x(10-x)}{2} = 20x - 2x^2$$

För att hitta den största möjliga arean så deriverar vi $A(x)$:

$$A'(x) = 20 - 4x \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

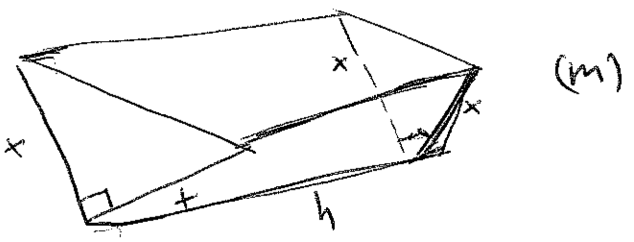
För $x > 5$ så är $A'(x) < 0$ och $x < 5$ gör att $A'(x) > 0$, så $x = 5$ är en maxpunkt.

Svar: Om $x = 5$ så är arean så stor som möjligt. Då är arean $A(5) = 50\ cm^2$

Ex:

I ett öppet tråg är de parallella sidoytorna likbenta, rätvinkliga trianglar. De båda andra sidorna är rektangulära. Trågets totala area är 27 m². Volymen är y m³. Ställ upp en formel för beräkning av y. För vilket värde på x blir volymen så stor som möjligt.

Lösningsförslag:




Arean för sidorna är $\frac{x\cdot x}{2}$ m² vardera.

De båda rektangulära ytorna har arean $(2x\cdot h)$ m²

Vi har att den totala arean blir

$$2\cdot\frac{x^2}{2} + (2x\cdot h) = 27$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2xh = 27$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h = \frac{27-x^2}{2x}$$

Volymen blir därför

$$y = \frac{x^2}{2}\cdot h = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{27-x^2}{2x} = \frac{27x-x^3}{4}$$

För att volymen ska bli så stor som möjligt så deriverar vi y:

$$y' = \frac{27 - 3x^2}{4}.$$

Kritiska punkter har vi då $y'=0$, dvs då

$$27 - 3x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$27 = 3x^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$9 = x^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = \pm 3.$$

Eftersom x är ett avstånd så måste $x=3$.
För $x<3$ så är $y'>0$ och för $x>3$ så är $y'<0$.
Alltså är $x=3$ en maxpunkt.

Svar: Formeln för volymen är $\underline{\underline{y = \frac{27x - x^3}{4}}}$.

Då $\underline{\underline{x=3}}$ så blir volymen som störst, och då blir volymen $y(3) = \frac{27 \cdot 3 - 3^3}{4} = \frac{81 - 27}{4} = \frac{54}{4} = \underline{\underline{13{,}5\ m^3}}$

# Talföljder:

En talföljd är en ändlig eller oändlig följd av tal i en bestämd ordning och enligt en bestämd regel

Ex:

Följden av tal

$$2, 5, 10, 17, 26, \ldots, 101$$

är en ändlig talföljd som är given av formeln:

$$f(n) = n^2 + 1 \quad ; \quad n = 1, \ldots, 10.$$

Vi brukar skriva $a_n = f(n)$, dvs

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 5$$
$$\vdots$$
$$a_{10} = 101.$$

---

Ex:

I bland så definierar vi talföljden rekursivt.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n^2 \\ a_1 = 10 \end{cases}$$

Vi ska ange $a_2, a_3, a_4$. Vi har att

$$a_2 = a_{1+1} = a_1 + 1^2 = 10 + 1 = 11$$
$$a_3 = a_{2+1} = a_2 + 2^2 = 11 + 4 = 15$$
$$a_4 = a_{3+1} = a_3 + 3^2 = 15 + 9 = 24$$

Ex:

Man kan även gå åt andra hållet, dvs vi är givna en talföljd och vi vill hitta en formel för följden:

$$5,\ 8,\ 11,\ 14$$

Vad är det n:te talet..

$$a_n = 2 + 3n.$$

Koll: $a_1 = 2 + 3 = 5$

$a_2 = 2 + 3 \cdot 2 = 8$

$a_3 = 2 + 3 \cdot 3 = 11$

$a_4 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$

# Summor

Hur får man en formel för vissa talföljder? Vi ska börja med något som kallas för en aritmetisk talföljd.

Ex:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,

Här är $a_n = 1 + 3n$. Observera att

$$a_{n+1} - a_n = 1 + 3(n+1) - (1+3n) =$$
$$= 1 + 3n + 3 - 1 - 3n = 3.$$

Detta kallas för differensen för talföljden.

Definition:

En talföljd $a_n$ kallas för aritmetisk om differensen är konstant.

Observation:

För en aritmetisk talföljd gäller att

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

där $d$ är differensen.

# Aritmetisk summa.

Låt $a_n$ vara en aritmetisk talföljd. Säg att vi vill summera dessa termer, dvs

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Eftersom $a_n = a_1 + (n-1)d$ så kan man beräkna vad denna summa blir:

$$a_1 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} .$$

Detta kallar vi för en aritmetisk summa.

Ex.

Beräkna $1+3+5+7+\dots+99$.

Lösningsförslag:

Observera att detta är en aritmetisk summa, ty differensen är 2. Vi får att

$$1+3+\dots+99 = \frac{n(1+99)}{2} .$$

Vi måste bestämma $n$. Vi vet att

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-1)\cdot 2$$

Detta ger att $a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 = 99$, så $n = 50$ ger sista termen.

Vi får alltså att

$$1+3+\dots+99 = \frac{50(1+99)}{2} = 25\cdot 100 = 2500$$

---

## Geometrisk summa:

**Definition:**
Givet en talföljd $a_1, \dots, a_n$ så att

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

där $r$ är en konstant så säger vi att $a_1, \dots, a_n$ är en geometrisk talföljd.

---

Formel för geometrisk talföljd:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Ex:
Betrakta talföljden $5, 15, 45, 135, \dots$
Detta är en geometrisk talföljd ty

$$\frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = 3$$

Vi kan alltså beskriva talföljden som $a_n = 5\cdot 3^{n-1}$

Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara en geometrisk talföljd.

Hur beräknar vi dess summa:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \dfrac{r^n - 1}{r-1} = a_1 \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} \\ \text{där } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ är en geometrisk talföljd} \end{array}}$$

Ex:

Låt $5, 5 \cdot 1{,}08, 5 \cdot 1{,}08^2, \ldots, 5 \cdot 1{,}08^{20}$ vara en geometrisk talföljd. Vad är dess geometriska summa. Vi har att

$$5 + 5 \cdot 1{,}08 + \ldots + 5 \cdot 1{,}08^{20} = 5 \cdot \frac{1{,}08^{21} - 1}{1{,}08 - 1} = 252{,}11 \approx \underline{\underline{252}}.$$