Konjugatregeln och Kvadreringsreglerna

Konjugatregeln och kvadreringsreglerna kan man använda till att både utveckla och faktorisera/förkorta algebraiska uttryck. Materialet som vi går igenom här finns i boken Matematik 3000 på sidorna 208-213.

Exempel 1. Vi ska använda oss av konjugatregeln för att utveckla följande uttryck:

(a) $(x+3)(x-3)$

(b) $(3-2x)(2x+3)$

(c) $(\sqrt{2}x+6)(\sqrt{2}x-6)$

(d) $(ab+xyz)(ab-xyz)$

Vi börjar med (a). Vi har att

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9.$$

Vidare med (b) så gäller att

$$(3-2x)(2x+3) = (3-2x)(3+2x) = 3^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2.$$

Nästa är (c):

$$(\sqrt{2}x+6)(\sqrt{2}x-6) = (\sqrt{2}x)^2 - 6^2 = 2x^2 - 36.$$

Slutligen till (d):

$$(ab+xyz)(ab-xyz) = (ab)^2 - (xyz)^2 = a^2b^2 - x^2y^2z^2.$$

□

Exempel 2. Vi ska använda oss av konjugatregeln för att faktorisera följande uttryck:

(*a*) $9y^2 - 4$

(*b*) $25x^6 - 2$

(*c*) $x^2 - y^2$

I (*a*) så har vi att

$$9y^2 - 4 = (3y)^2 - 2^2 = (3y+2)(3y-2).$$

Vidare med (*b*):

$$25x^6 - 2 = (5x^3)^2 - (\sqrt{2})^2 = (5x^3 - \sqrt{2})(5x^3 + \sqrt{2}).$$

Slutligen till (*c*):

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

□

Exempel 3. Använd kvadreringsreglerna för att utveckla:

(*a*) $(3x+3)^2$

(*b*) $(\sqrt{3}-1)^2$

(*c*) $(2x+y)^2$

(*d*) $(x+1-y)^2$

Vi har i (*a*) att

$$(3x+3)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 3 + 3^2 = 9x^2 + 19x + 9.$$

Vidare i (*b*) så gäller

$$(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 = 3 - 2\sqrt{3} - 1.$$

I (*c*) så gäller att

$$(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2.$$

Slutligen i (*d*) så har vi att

$$(x+1-y)^2 = ((x+1)-y)^2 = (x+1)^2 - 2 \cdot (x+1) \cdot y + y^2 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 2xy - 2y + y^2 = x^2 + 2x - 2xy - 2y + y^2 + 1.$$

□

Exempel 4. Faktorisera:

(a) $16x^2 - 12xy + 2y^2$

(b) $4x^2y + 4xy - 2x - 1$

(c) $x^2 + 2x - 3$

Vi har i (a) att

$$16x^2 - 6xy + 2y^2 = (4x - 2y)(4x - y).$$

Vidare i (b) så gäller att

$$4x^2y + 2xy - 2x - 1 = (2x + 1)(2xy - 1).$$

Slutligen i (c) så gäller att

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1).$$

□

Exempel 5. Faktorisera:

(a) $x^2 + 4x + 4$

(b) $x^2y^2 - 2axy + a^2$

(c) $4x^2 + 4xy + y^2$

För det första i (a) så gäller att

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2.$$

Vidare i (b):

$$x^2y^2 - 2axy + a^2 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot a + a^2 = (xy + a)^2.$$

Slutligen i (c) så gäller att

$$4x^2 + 4xy + y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = (2x + y)^2.$$

□

Exempel 6. Vi ska faktorisera följande uttryck:

(a) $(t+y)a-(t+y)b$

(b) $(x+y+z)^2-(a+b)^2$

(c) $x^{2n}-y^{4n}$

Vi börjar med (a). Vi har att

$$(t+y)a-(t+y)b=(t+y)(a-b).$$

Vidare med (b) så gäller att

$$(x+y+z)^2-(a+b)^2=((x+y+z)+(a+b))((x+y+z)-(a+b)).$$

Nästa är (c):

$$(\sqrt{2}x+6)(\sqrt{2}x-6)=(\sqrt{2}x)^2-6^2=2x^2-36.$$

Slutligen till (d):

$$x^{2n}-y^{4n}=(x^n)^2-(y^{2n})^2=(x^n+y^{2n})(x^n-y^{2n}).$$

□

Exempel 7. Bryt ut största möjliga faktor följande uttryck:

(a) $4x^2y-8xy^2$

(b) $x^{n+1}-x^ny+x^n$

(c) $(2x^2+8)^2$

I (a) så har vi att

$$4x^2y-8xy^2=4xy(x-2y).$$

Vidare med (b):

$$x^{n+1}-x^ny+x^n=x^n(x-y+1).$$

Slutligen till (c):

$$(2x^2+8)^2=(2(x^2+4))^2=2^2(x^2+4)=4(x^2+4).$$

□