Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Testtentamen i Baskurs C i Matematik, 7,5 hp

MA002X

Datum: ????-??-??
Skrivtid: 5 timmar
Lärare: Andreas Lind (070-6890822)
NAT
Hjälpmedel: Formelsamling (Gymnasieformelsamling, T.ex. Ekbom Tabeller och formler för NV-programmet, Natur & Kultur), skriv och ritmaterial samt miniräknare som ej är symbolhanterande. Ange märke och modell på din miniräknare på omslaget till tentamen.

Till alla uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas. Resonemang, ekvationslösningar och uträkningar får inte vara så knapphändiga, att de blir svåra att följa. Brister i framställningen kan ge avdrag även om slutresultatet är rätt! Behandla högst en uppgift på varje papper och skriv endast på en sida av bladet! Glöm ej att skriva kod på varje sida.

LYCKA TILL!!

1. (a) Förenkla $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2}$ så långt som möjligt. (1p)

   (b) Förenkla $\frac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{x-a}$ så långt som möjligt. (1p)

   (c) Förenkla $\frac{x^2-a^2}{x+a}$ så långt som möjligt. (1p)

2. Lös följande ekvationer:

   (a) $\sqrt{2x+1} = 2x+1$ (1,5p)

   (b) $\sqrt{t+9} - \sqrt{t} = 1$ (1,5p)

3. (a) Lös ekvationen $\lg(x) = 2\lg(3) + 3\lg(2)$ exakt. (1,5p)

   (b) Bestäm $\log_4(8) + \log_8(8) + \log_{16}(8)$ exakt. (1,5p)

4. (a) Derivera och förenkla $f(x) = 2e^{4x} + 2x^3 + 4x$. (1p)

   (b) Derivera och förenkla $g(x) = 3x^{7/3} + \sqrt{x} + 3^x$. (1p)

   (c) Derivera och förenkla $h(x) = \frac{3}{x^3} + x^{-2}$. (1p)

5. (a) Lös följande ekvation: $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) + 3 = 0$. (1p)

   (b) Lös ekvationen $4^x = 16$. (1p)

   (c) Lös ekvationen $x^4 = 16$. (1p)

6. Låt $f(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x + 1$. Hitta tangentens ekvation för $f(x)$ i $x = 0$. Genom att lösa $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ och $f'(x) < 0$ skissera $f(x)$:s graf grovt. Motivera alla steg du göra och markera tydligt i figuren vilket tecken derivatan har. (3p)

7. Hitta alla tangenter till $y = x^2$ som går genom punkten $(-1, -2)$. (3p)

8. En ölburk rymmer $0,5$ liter. Vilka mått bör burken ha för att plåtåtgången ska minimeras. (3p)

9. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ x + y = 13 \end{cases}.$$

(3p)

10. Genom att använda derivatans definition, härled derivatan för funktionen $f(x) = x^3$. (3p)

Testtenta Baskurs C

1a)

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(2x-x^2)+x^2-4}{(x^2-4)(2x-x^2)} =$$

$$= \frac{4x-2x^2+x^2-4}{(x^2-4)(2x-x^2)} = \frac{-x^2+4x-4}{(x^2-4)(2x-x^2)} =$$

$$= \frac{-(x-2)^2}{(x+2)(x-2)(2x-x^2)} = -\frac{(x-2)}{(x+2)(2x-x^2)} =$$

$$= \frac{2-\cancel{x}x}{(x+2)x(2-\cancel{x})} = \underline{\underline{\frac{1}{x(x+2)}}}$$

b)

$$\frac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a^2-x^2}{ax}}{x-a} = \frac{(a+x)(a-x)}{ax(x-a)} = -\frac{(a+x)\cancel{(x-a)}}{ax\cancel{(x-a)}} =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{a+x}{ax}}}$$

c)

$$\frac{x^2-a^2}{x+a} = \frac{\cancel{(x+a)}(x-a)}{\cancel{x+a}} = \underline{\underline{x-a}}$$

2 a) $\sqrt{2x+1} = 2x+1$

Kvadrera:

$$2x+1 = (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2x\cancel{+1} = 4x^2 + 4x \cancel{+1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = 4x^2 + 2x = 2x(2x+1)$$

Detta ger att $x=0$ eller $x=-\frac{1}{2}$.

<u>Koll:</u> $x=0$: $VL = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = \underline{1}$

$HL = 2 \cdot 0 + 1 = \underline{1}$ Äkta rot!

$x = -\frac{1}{2}$ $VL = \sqrt{-1+1} = 0$

$HL = -1 + 1 = 0$ Äkta rot!

<u>Svar:</u> Lösningen på ekvationen är $x=0$ och $x=-\frac{1}{2}$.

2b) $\sqrt{t+9} - \sqrt{t} = 1$

Kvadrera:

$$(\sqrt{t+9} - \sqrt{t})^2 = 1^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$t+9 - 2\sqrt{t}\sqrt{t+9} + t = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2t + 8 = 2\sqrt{t}\sqrt{t+9}$$

Kvadrera igen:

$$(2t+8)^2 = 4t(t+9)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\cancel{4t^2} + 32t + 64 = \cancel{4t^2} + 36t$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$64 = 4t$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$t = 16$$

Koll: $t=16$ $VL = \sqrt{16+9} - \sqrt{16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5-4 = 1 = HL$

Äkta rot!

Svar: Lösningen är $\underline{\underline{t=16}}$

3a) $$\lg(x) = 2\lg(3) + 3\lg(2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lg(x) = \lg 3^2 + \lg 2^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lg(x) = \lg 9 + \lg 8$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lg(x) = \lg(9 \cdot 8)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lg(x) = \lg(72)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = 72}}$$

b) $$\log_4 8 + \log_8 8 + \log_{16} 8 = \log_4(2 \cdot 4) + \log_8 8 + \log_{16}(2 \cdot 4) =$$

$$= \log_4 2 + \log_4 4 + \log_8 8 + \log_{16} 2 + \log_{16} 4 =$$

$$= \log_4 4^{1/2} + \log_4 4 + \log_8 8 + \log_{16} 16^{1/4} + \log_{16} 16^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{13}{4}}}$$

5

4a) $f(x) = 2e^{4x} + 2x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = 2\cdot 4e^{4x} + 2\cdot 3x^2 + 4 =$

$= 8e^{4x} + 6x^2 + 4$

b) $g(x) = 3x^{7/3} + \sqrt{x} + 3^x \Rightarrow g'(x) = 3\cdot\frac{7}{3}x^{4/3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln 3\cdot 3^x$

$= 7x^{4/3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot 3^x$

c) $h(x) = \frac{3}{x^3} + x^{-2} \Rightarrow h'(x) = \frac{-9}{x^4} - 2x^{-3}$

5a) $(\ln(x))^2 - 4\ln x + 3 = 0$

Låt $t = \ln x$. Då blir ekvationen

$0 = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 4 + 3 = (t-2)^2 - 1^2 =$

$= (t-2+1)(t-2-1) = (t-1)(t-3)$

Så $t = 1$ eller $t = 3$. Vi måste nu lösa ekvationen för x:

t=1: $1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$

t=3: $3 = \ln x \Leftrightarrow x = e^3$.

Svar: $x = e$ och $x = e^3$ är lösningarna till ekvationen.

5b) $4^x = 16.$

4-logaritmera:

$$\log_4 4^x = \log_4 16$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log_4 4^x = \log_4 4^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

c) $x^4 = 16.$

Höj upp till $1/4$:

$$(x^4)^{1/4} = 16^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = 2.$$

Eftersom potensen i ekvationen är ~~B~~ jämn så har vi även en negativ lösning $x=-2$.

<u>Svar:</u> $x=2$ och $x=-2$ är lösningar till ekvationen.

6) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$

Vi börjar med tangentens ekvation i $x=0$.

Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 3 =$$

$$= x^2 - 4x + 3.$$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Alltså är $k=3$ tangentens lutning i $x=0$.
Vidare så är $f(0) = \frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1.$
Enpunktsformeln ger att tangentens ekvation i $x=0$ är

$$y - 1 = 3(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 3x + 1}}$$

Nu ska vi skissera grafen. Vi börjar med att lösa $f'(x)=0$, dvs

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1 =$$

$$= (x-2+1)(x-2-1) = (x-1)(x-3).$$

Alltså har f kritiska punkter i $x=1$ och $x=3$.
Vi kollar nu på f':s tecken:

$x < 1$: $\quad f'(x) > 0$

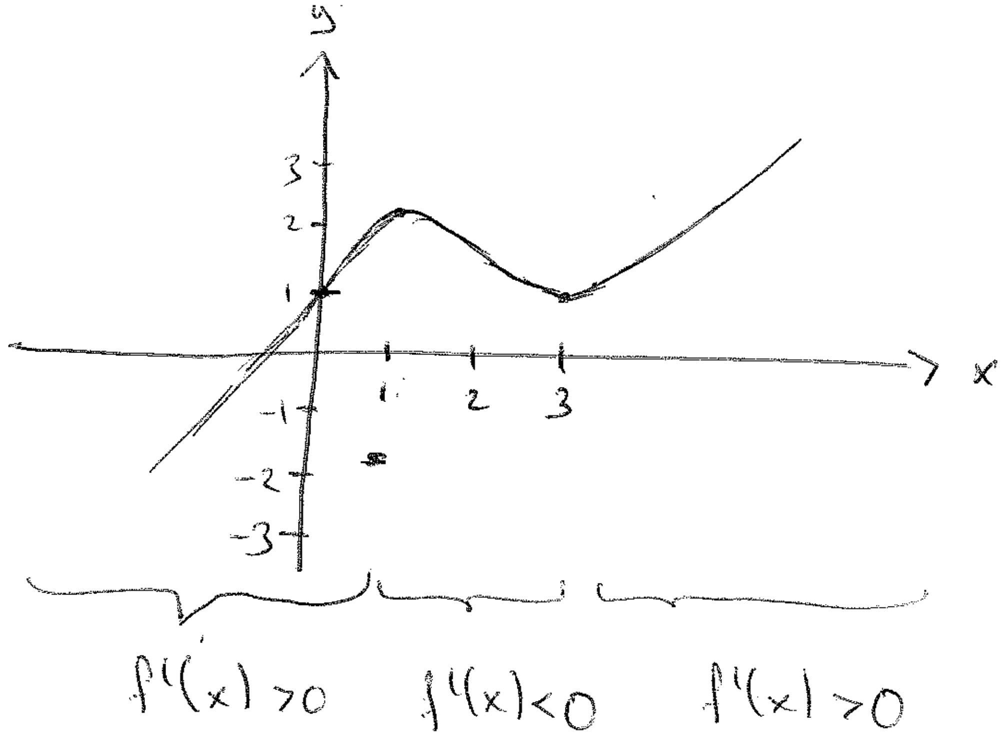
$1 < x < 3$: $\quad f'(x) < 0$

$x > 3$: $\quad f'(x) > 0$

Vi tar fram några fler värden

$f(1) = \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

$f(3) = \frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = \frac{27}{3} - 8 = 1$



7) Låt $x=a$ vara en godtycklig punkt, så (a, a^2) är en punkt på $y=x^2$.

Vad är tangentens ~~lutning~~ lutning i denna punkt?

Vi deriverar $y' = 2x$, så $y'(a) = 2a$ är tangentens lutning i $x=a$. Å andra sidan så måste den räta linje som går genom (a, a^2) och $(-1, -2)$ ha lutningen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2-(-2)}{a-(-1)} = \frac{a^2+2}{a+1}$$

Så vi måste ha att

$$k = y'(a)$$

dvs

$$2a = \frac{a^2+2}{a+1} \iff 2a(a+1) = a^2+2$$

$$\iff$$

$$2a^2+2a = a^2+2$$

$$\iff$$

$$a^2+2a-2=0$$

Så med kvadrat komplettering så får vi

$$0 = a^2+2a-2 = (a+1)^2-1-2 = (a+1)^2-(\sqrt{3})^2 =$$

$$= (a+1-\sqrt{3})(a+1+\sqrt{3})$$

Alltså är $a = -1 \pm \sqrt{3}$ de punkter på kurvan som har tangenter som går genom $(-1,-2)$.
Låt oss bestämma deras ekvationer.
Enpunktsformeln ger att

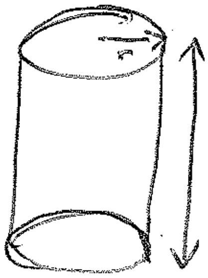
$$y+2 = (-1+\sqrt{3})(x+1) \iff \underline{y = (-1+\sqrt{3})x - 3 + \sqrt{3}}$$

och

$$y+2 = (-1-\sqrt{3})(x+1) \iff \underline{y = (-1-\sqrt{3})x - 3 - \sqrt{3}}$$

är tangenternas ekvationer.

8).



$$V = 0{,}5 \text{ dm}^3$$

$$\left.\begin{aligned} &\\ &V = \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}\right\} \quad h = \frac{1}{2\pi r^2}$$

Vad är mantelarean? (Plåtåtgången)

$$M = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{botten}} + \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{lock}} + \underbrace{\underbrace{\pi \cdot \underbrace{2r}_{\text{diameter}}}_{\text{omkrets}} \cdot h}_{\text{cylindern}} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2\pi r}{2\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{\pi r^2}{2}$$

Det är mantelarean M som vi vill minimera. Därför så deriverar vi M m.a.p r.

$$M'(r) = 4\pi r - \frac{1}{r^2}$$

Vi ska hitta kritiska punkter, dvs lösa ekvationen $M'(r) = 0$, så

$$4\pi r - \frac{1}{r^2} = 0 \iff 4\pi r^3 - 1 = 0 \iff r^3 = \frac{1}{4\pi} \iff r = \frac{1}{(4\pi)^{1/3}}$$

Så om $r = \frac{1}{(4\pi)^{1/3}}$ så blir mantelarean minimal.

Då är $h = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{(4\pi)^{1/3}}} = \frac{1}{\frac{4^{1/2}\pi}{4^{1/3}\pi^{1/3}}} = \frac{1}{4^{1/2-1/3}\pi^{2/3}} =$

$$= \frac{1}{4^{1/6}\pi^{2/3}}$$

Svar: För att minimera plåtåtgången så måste radien vara $r = \frac{1}{(4\pi)^{1/3}}$ dm och höjden

$h = \frac{1}{4^{1/6}\pi^{2/3}}$ dm.

9)
$$\begin{cases} y = x+5 \\ x+y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = 5 & (1) \\ x+y = 13 & (2) \end{cases}$$

Lägg ihop (1) med (2) $\Rightarrow$

$$2y = 18 \Leftrightarrow y = 9.$$

Sätt in $y = 9$ i (2) så får vi att

$$x + 9 = 13 \Leftrightarrow x = 4.$$

Svar: $\underline{x = 4 \text{ och } y = 9}$

10).

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Alltså är derivatan för $f(x) = x^3$ är $f'(x) = 3x^2$.