Inlämningsuppgift 1
i
Komplex Analys C

1. Låt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vara sådana så att $z_1 + z_2 \leq 0$ och $z_1 z_2 \leq 0$. Visa att $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

2. Låt $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$.

   (a) Visa att

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right) - \sum_{k<j} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2.$$

   (b) Visa att

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

3. Låt $c, d \in \mathbb{C}$ vara distinkta och låt $k > 0$. Visa att mängden

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = k|z - d|\}$$

   är en cirkel om $k \neq 1$ och en linje om $k = 1$.

4. Låt $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ vara en följd.

   (a) Visa att $\{z_n\}$ konvergerar om och endast om $\{\mathrm{Re}(z_n)\}$ och $\{\mathrm{Im}(z_n)\}$ konvergerar.

   (b) Visa att om $z_n \to z$ så $|z_n| \to |z|$ och $\bar{z}_n \to \bar{z}$.

   (c) Visa att om $\{z_n\}$ är begränsad så finns det en konvergent delföljd till $\{z_n\}$.

5. Visa att en mängd som innehåller ändligt många punkter är begränsad.

6. Visa att $\mathbb{C}$ och $\emptyset$ är de enda delmängderna till $\mathbb{C}$ som är både öppna och slutna.

7. Antag att $f\colon U \to V$ är en kontinuerlig funktion där $U, V \subset \mathbb{C}$ är öppna. Antag vidare att $g\colon V \to \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion. Visa att $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ är kontinuerlig.