Inlämningsuppgift 2
i
Komplex Analys C

1. Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett område och låt $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ vara holomorfa. Visa att om $f' = g'$ så är $f - g$ konstant.

2. Låt $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara sådan att f och f^2 är harmonisk. Visa att f är holomorf eller att $\bar{f}$ är holomorf.

3. Låt $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen
$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$
Bestäm en holomorf funktion $f(z)$ så att
$$u = \mathrm{Re}(f) \text{ och } f(1) = i.$$
Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

4. Man säger att en funktion $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ är **subharmonisk** om $\Delta u \geq 0$.

   a) Ge ett exempel på en subharmonisk funktion som inte är harmonisk.

   b) Låt $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara harmonisk. Visa att u^2 är subharmonisk.

   c) Låt $u_1, u_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara subharmoniska, och låt $c_1, c_2 \geq 0$. Visa att $c_1 u_1 + c_2 u_2$ är subharmonisk.