

Inlämningsuppgift 4

i

Komplex Analys C

1. Låt a_1, \dots, a_n vara punkter på enhetscirkeln S^1 . Visa att det existerar en punkt $z \in S^1$ så att

$$\prod_{j=1}^n |z - a_j| \geq 1.$$

2. En mängd S kallas **stjärnformad** om det existerar en punkt $z_0 \in S$ så att linjesegmentet mellan $z_0 \in S$ och en godtycklig punkt $z \in S$ ligger helt inne i S .

a) Visa att en stjärnformad mängd är enkelt sammanhängande.

b) Låt $U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Visa att U är enkelt sammanhängande.

3. a) Låt γ vara linjesegmentet från 0 till $1 + i$. Visa att

$$\left| \int_{\gamma} z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2}.$$

b) Låt γ vara cirkeln kring origo med radie $R > 1$. För $m \geq 1$ och $n \geq 0$ visa att

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^m - 1} dz \right| \leq \frac{2\pi R^{n+1}}{R^m - 1}.$$

4. En funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kallas **dubbelt periodisk** om det finns två perioder ω_1 och ω_2 för f som inte ligger på samma linje genom origo, dvs ω_1 och ω_2 är linjärt oberoende över \mathbb{R} och $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Visa att om $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ är dubbelt periodisk så måste f vara konstant.

5. Låt $z_0 \in \mathbb{C}$ och $c > 0$ vara fixerade. Låt $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kurvan parametriserad genom

$$\gamma(t) = z_0 + itc.$$

För $x \geq 0$ låt $\alpha = z_0 + x$ och $\beta = z_0 - x$. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) dz.$$

6. Beräkna

a)

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-3} dz$$

b)

$$\int_{|z-1|=5/2} \frac{1}{(z-4)(z+1)} dz$$

7. Visa att en hel funktion f är ett polynom av grad mindre eller lika med n om och endast om det finns en konstant $M > 0$ så att för $|z|$ stort så är $|f(z)| \leq M|z|^n$.