Inlämningsuppgift 5
i
Komplex Analys C

1. Låt A vara annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r \leq |z| \leq R\}$ och låt $f \in \mathcal{O}(A)$. Visa att det finns funktioner f_1, f_2 så att f_1 är holomorf för $|z| \leq R$, f_2 är holomorf för $|z| \geq r$ och
$$f = f_1 + f_2$$
på A.

2. Laurentserieutveckla $\frac{z}{z+2}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

3. Laurentserieutveckla $\frac{1}{z-3}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

4. Laurentserieutveckla $\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-5)}$ i områdena

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$

   b) $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3\}$

   c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| > 3\}$

5. Låt följande resultat vara givet

   Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$ vara sådan att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0,1)$ och $f(z_0) = 0$, $z_0 \in B(0,1)$. Då är
$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0} \right|.$$

   Låt nu $f\colon B(0,1) \to B(0,1)$ vara holomorf. Visa att
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0} \right|.$$