

Läsanvisningar till Komplex analys C

Andreas Lind

17 augusti 2005

Innehåll

0	Introduktion	2
1	Läsanvisningar till kapitel 1	4
2	Läsanvisningar till kapitel 2	36
3	Läsanvisningar till kapitel 3	59
4	Läsanvisningar till kapitel 4	66
5	Läsanvisningar till kapitel 5	74
6	Läsanvisningar till kapitel 6	83
7	Läsanvisningar till kapitel 7	90
8	Läsanvisningar till kapitel 8	96
9	Läsanvisningar till kapitel 9	103
10	Läsanvisningar till kapitel 10	124

Kapitel 0

Introduktion

Jag tänkte börja med en kort introduktion där jag kommer förklara hur dessa läsanvisningar är upplagda, samt ge några tips hur man läser matematik.

Låt mig börja att berätta om dessa läsanvisningar. De kommer att följa kursboken med inslag av andra exempel samt andra satser och bevis. Detta kommer att ge er möjligheten att, ibland, se två olika framställningar av kursmaterialet. I detta material kommer även inlämningsuppgifter vara inbakade. Materialet är utformat på sådant sätt att ni ska (ganska) lätt kunna följa boken och ge er mer insikt om kursmaterialet.

Boken förutsätter att ni har läst och kan elementär mängdlära. Definitioner av unioner, snitt, komplement och dylikt är ett måste för att kunna läsa denna kurs. Om ni inte har detta färskt i minnet så bör ni omedelbart kolla upp det.

Hur ska man läsa en matematikbok? Matematik, som ni redan vet, består av axiom, definitioner, satser och bevis av satser. När man ser en definition så ska man först analysera den och se vad som definieras. Därefter är det lämpligt att försöka ge ett exempel på ett objekt som uppfyller villkoren i definitionen. Därefter så kan man försöka analysera definitionen mera. Vad säger villkoren i definitionen? Försök skapa bilder och mer förståelse.

Efter definitioner så kommer satser. När man för första gången ser en sats så bör man först läsa satsen i lugn och ro, och försöka förstå all terminologi i satsen. Sen kan man försöka förstå vad satsen säger, dvs försök skapa en bild av vad satsen säger. Kan du hitta några enkla exempel som uppfyller antagandena och slutsatserna i satsen? Försök nu bevisa satsen utan att kolla på det befintliga beviset. Därefter är det dags att gå igenom det befintliga beviset. Då man läser ett bevis så ska man använda sig av papper och penna. Man skriver upp och går igenom varje liten detalj så att man har verkligen har förstått beviset. Därefter så går man igenom beviset igen och skriver upp en bevisidé, dvs den röda tråden i beviset. Bevisidén ska vara sådan att man lätt kan återskapa hela beviset.

Efter man har gjort allt detta så kan man börja fundera på antagandena i satsen. Kan man ta bort något/några av antagandena och ändå få samma slutsats? Får man en annan slutsats med de nya antagandena? Sådana här funderingar

ger en bra förståelse för satsen och beviset.

Kapitel 1

Läsanvisningar till kapitel 1

Första kapitlet består största delen av saker som ni borde veta, eller åtminstone känna till litegrann. Jag kommer att gå igenom så gott som allt som finns i detta kapitel och lämna vissa saker som övning.

I denna kurs kommer vi studera de komplexa talen $\mathbb{C}$. I en typisk abstrakt algebra kurs så får man lära sig att $\mathbb{C}$ är ett exempel på en **kropp** (eng. field), dvs en mängd K med två binära operationer $+$ och $\cdot$ som uppfyller att

1. K är sluten under $+$ och $\cdot$.
2. För varje $x \in K$ så finns det en unik $y \in K$ så att $x + y = y + x = 0$ (Additiv invers)
3. För varje $x, y \in K$ så är $x + y = y + x$ (Addition är kommutativ)
4. För varje $x \in K$ så gäller att $x + 0 = 0 + x = x$ (Additiv identitet)
5. För varje $x \in K$ så gäller att $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (Multiplikativ identitet)
6. $\cdot$ är en associativ operation, dvs $(xy)z = x(yz)$ för varje $x, y, z \in K$
7. För varje x, y, z så gäller att $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ och $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. (Distributiva lagar)
8. För varje $x \in K$ så finns det en unik $y \in K$ så att $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (Multiplikativ invers)
9. För varje $x, y \in K$ så gäller att $x \cdot y = y \cdot x$. (Multiplikation är kommutativ)

Andra exempel på kroppar är $\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$. Exempel på mängder som inte är kroppar är $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ni kan fundera på varför detta gäller. Kom nu ihåg att Algebras Fundamentalsats säger att varje icke-konstant polynom har ett nollställe.

Vi kommer skriva mängden av polynom över en kropp K i variabeln x som $K[x]$, dvs $p \in K[x]$ kan skrivas som

$$p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j ,$$

där $a_j \in K$.

Exempel 1. Vi har att $((1+i)z^2 + 2z + 3i) \in \mathbb{C}[z]$, men denna är inte ett element i $\mathbb{R}[z]$. $\square$

Exempel 2. Vi har att $(x^2 + 3x + 1) \in \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. $\square$

Med notationen ovan så kan vi skriva Algebrans fundamentalsats som

$$\forall p \in \mathbb{C}[z] \text{ icke-konstant } \exists w \in \mathbb{C} : p(w) = 0.$$

En kropp som uppfyller att varje polynom över kroppen har ett nollställe kallas för en **algebraiskt sluten** kropp. Alltså är $\mathbb{C}$ ett exempel på en algebraisk sluten kropp, men mer om sånt här kan ni läsa i en abstrakt algebra kurs.

Avsnitt 1.1.2 - 1.1.4

Första delen bygger upp en representation av ett komplext tal som ett ordnat par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med vissa operationer som addition och multiplikation;

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) \text{ och } (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Eftersom $\mathbb{R}$ är kommutativ med både $+$ och $\cdot$ så följer det omgående att $\mathbb{R}^2$ är kommutativ med dessa operationer definierade ovan. Man definierar därefter $i := (0, 1)$ varvid man lätt hittar en avbildning $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom

$$(x, y) \mapsto x + iy.$$

Detta kommer även hjälpa oss att få en geometrisk syn på det komplexa talplanet senare.

INLÄMNINGSUPPGIFT 1. Låt V vara ett reellt vektorrum och låt $I: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning. Om $I^2 = -\text{Id}$ så säger vi att I är en **komplex struktur** på V .

- (a) Visa att om I är en komplex struktur på V så är I bijektiv.
- (b) Visa att om I är en komplex struktur på V så är $\dim(V) = 2n$, dvs V är av jämn dimension.

- (c) Betrakta $\mathbb{R}^2$, som är ett reellt vektorrum. Definiera $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom $i(x, y) = (-y, x)$. Visa att i är en komplex struktur på $\mathbb{R}^2$. Det gäller faktiskt att $\mathbb{R}^2$ med denna komplexa struktur precis är $\mathbb{C}$.

Låt oss nu gå vidare att kolla på ytterligare en representation av ett komplext tal, denna gång via ekvivalensrelationer och polynom. Kom ihåg att en relation R på en mängd X kallas en **ekvivalensrelation** om

1. xRx för alla $x \in X$ (Reflexiv)
2. xRy implicerar att yRx för alla $x, y \in X$ (Symmetrisk)
3. xRy och yRz implicerar att xRz för alla $x, y, z \in X$ (Transitiv)

Låt nu $K \in \mathbb{R}[x]$ vara ett polynom med $\deg(K) = k$. Låt $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Vi säger att $P \sim_K Q$, dvs P och Q är ekvivalenta, om och endast om det finns ett polynom $S \in \mathbb{R}[x]$ så att

$$P - Q = S \cdot K.$$

Detta visar sig vara en ekvivalensrelation, se boken för ett bevis av detta. Låt mängden av ekvivalensklasser vara $\mathbb{R}[x] / \sim_K$, och skriv ekvivalensklassen där P ligger i som $[P]$. Definiera nu

$$[P] + [Q] := [P + Q]$$

och

$$[P] \cdot [Q] := [P \cdot Q].$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 2. Visa att dessa operationer är väldefinierade.

Låt oss nu utreda vad $\mathbb{R}[x] / \sim_K$ betyder. Jo, det betyder att vi kvotar bort allt som har med $K(x)$ att göra, säg att $K(x) = x$ då kommer $\mathbb{R}[x] / \sim_K = \mathbb{R}$, där likhetstecknet ska tolkas som att det finns en linjär avbildning från $\mathbb{R}[x] / \sim_K$ till $\mathbb{R}$ som är bijektiv (en sådan avbildning mellan vektorrum kallas för en **isomorfi**). Låt oss kolla på ett annat exempel som kanske belyser detta lite mera:

Exempel 3. Låt $r, s \in \mathbb{Z}$. Säg nu att $r \sim s$ om och endast om det finns ett $t \in \mathbb{Z}$ så att $r - s = t \cdot n$. Låt oss kolla lite närmare då $n = 3$. Detta betyder att differensen av två heltal ska vara en multipel av 3. Säg nu att $r = 0$. Då är $r \sim s$ om $s = \dots, -3, 0, 3, 6, \dots$. Om $r = 1$ så är $r \sim s$ om $s = \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots$, och om $r = 2$ så är $r \sim s$ om $s = \dots, -4, -1, 2, 5, \dots$. Eftersom dessa tre ekvivalensklasser partitionerar $\mathbb{Z}$ så finns det endast tre ekvivalensklasser, nämligen $[0]$, $[1]$ och $[2]$. Detta betyder att vi kan hitta en bijektiv avbildning från $\mathbb{Z} / \sim$ till $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$ genom att bara avbilda ekvivalensklassen $[i]$ till $i \in \mathbb{Z}_3$. Observera alltså att då $n = 3$ så kvotar vi verkligen bort allt som har med 3 att göra, dvs att 3 och 0 är ekvivalenta. $\square$

Låt oss återgå till ekvivalensrelationen $\sim_K$ då $K(x) = x$. Låt nu $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ vara ett polynom där $a_i \in \mathbb{R}$. Att $p \in \mathbb{R}[x]/\sim_K$ betyder, genom samma argument som i exemplet ovan, att $p(x) = a_0$. Eftersom $a_0 \in \mathbb{R}$ kan väljas godtyckligt så kan vi lätt hitta en isomorfi från $\mathbb{R}[x]/\sim_K$ till $\mathbb{R}$ genom att avbilda helt enkelt a_0 på sig själv.

Betrakta nu ekvivalensrelationen ovan med $K(x) = 1 + x^2$. Då är $x^2 = -1$ i $\mathbb{R}[x]/\sim_K$. Vidare så är $x^k = (-1)^{l_k} x^{k \bmod 2}$, där $l_{0 \bmod 4} = 0$, $l_{1 \bmod 4} = 0$, $l_{2 \bmod 4} = 1$ och $l_{3 \bmod 4} = 1$. Detta betyder att man endast kan få polynom på formen $a + bx$ i $\mathbb{R}[x]/\sim_K$, och det visar sig, se boken, att $a + bx \in \mathbb{R}[x]/\sim_K$ kan identifieras med det komplexa talet $a + bi$, som ger ytterligare en representation av ett komplext tal.

INLÄMNINGSUPPGIFT 3. Betrakta matrisen

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Visa att matriser på denna form kan identifieras med komplexa tal.

Avsnitt 1.2

Som vi såg förut så kan varje komplext tal $z = x + iy$ identifieras med vektorn $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En vektor har en längd och en riktning, så Pythagoras sats ger att längden av vektorn z , som vi skriver som $|z|$, precis är $\sqrt{x^2 + y^2}$. Observera att $|\cdot|$ är en funktion $\mathbb{C} \rightarrow [0, \infty[$ som helt enkelt mäter avståndet från z till origo.

INLÄMNINGSUPPGIFT 4. Kom ihåg att en relation R på en mängd X kallas en **partiell ordning** om

1. xRx för alla $x \in X$ (*Reflexiv*)
2. xRy och yRx implicerar att $x = y$ för alla $x, y \in X$ (*Antisymmetrisk*)
3. xRy och yRz implicerar att xRz för alla $x, y, z \in X$ (*Transitiv*)

Visa att $\mathbb{C}$ inte kan partiellt ordnas, dvs att det inte finns en partiell ordning på $\mathbb{C}$. (Ledning: Betrakta i och $-i$)

Övningen ovan ger att vi inte kan jämföra två komplexa tal, dvs vi kan inte säga att $z \geq w$ eller tvärtom. Däremot så är det fullständigt korrekt att skriva $|z| \geq |w|$.

Anmärkning 1. Hädanefter då vi skriver att $z \geq w$ så är det underförstått att $z, w \in \mathbb{R}$. $\square$

Absolutbeloppet $|\cdot|$ ska alltså tolkas som ett avstånd, och senare (i avsnitt 1.3) så ska vi se att $d(z, w) := |z - w|$ är en metrik, som är en avståndsfunktion, på $\mathbb{C}$. Här betyder $d(z, w)$ alltså avståndet från z till w . Några viktiga egenskaper som absolutbeloppet uppfyller är

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|zw| = |z||w|$

Låt oss nu se på ytterligare en representation av komplexa tal. Betrakta enhetscirkeln

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

På S^1 så kan vi skriva $x = \cos \theta$ och $y = \sin \theta$ för något θ . Om vi nu identifierar $(x, y) \in S^1$ med $x + iy \in \mathbb{C}$ så får vi att $\cos \theta + i \sin \theta$, och enligt trigonometriska ettan så är

$$|\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

Alltså $\cos \theta + i \sin \theta$ är en enhetsvektor med riktning θ . Betrakta nu $z = x + iy$. Eftersom detta är en vektor så har denna en riktning. Denna riktning kallas för **argumentet** för z och skrivs $\arg(z)$. Eftersom $|z|$ är längden på vektorn z så får vi att

$$z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

där $\theta = \arg(z)$. Då vi skriver ett komplext tal på sådant sätt så säger vi att vi har skrivit det på **polär form**.

Anmärkning 2. Egentligen så brukar man säga att $z = |z|e^{i\theta}$ är den polära formen för ett komplext tal, men denna representation kommer vi se på senare. $\square$

Eftersom $\cos \theta$ och $\sin \theta$ har en period med 2π så kommer $\arg(z)$ vara en mängd!!! Mer precist så är

$$\arg(z) = \{\theta : |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = z\}.$$

Observera att det jag skrev ovan ($\theta = \arg(z)$) är inte helt och hållet korrekt, utan en bättre notation är då att $\theta \in \arg(z)$. Ett annat sätt att skriva argumentet på är

$$\arg(z) = \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\},$$

där θ är vinkeln mellan vektorn z och realaxeln.

Exempel 4. Låt $z = 1 + i$. Då är

$$\arg(z) = \{\pi/4 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

Hoppas detta synsätt inte förvirrar alltför mycket. Låt oss förvirra lite mera: Om $z \in \mathbb{C}$ och om vi har beräknat mängden $\arg(z)$, så kan vi förstås välja att restringera denna mängd till ett halvöppet intervall istället, av längd t.ex 2π . Då man gör en sådan restriktion, så kommer det för alla $z \in \mathbb{C}$ finnas ett unikt θ så att $\arg(z) = \theta$. Ett val av ett sådant intervall, och observera att det verkligen är ett val man gör, brukar man kalla en **gren** av $\arg(z)$. Den speciella grenen $]-\pi, \pi]$ kallas för **principalgrenen** och då vi kollar på denna gren så brukar vi skriva $\arg(z)$ som $\text{Arg}(z)$, där det versala A:et är viktigt. Då brukar vi kalla Arg för **principalargumentet**. Med detta i bagaget så har vi att

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) ,$$

där $\theta = \text{Arg}(z)$. (Observera att här är det korrekt att skriva $\theta = \text{Arg}(z)$).

Avsnitt 1.3

Detta avsnitt är viktigt att förstå för att få bättre förståelse för topologiska argument som kommer göras senare i specialfallet $\mathbb{C}$. Här kommer vi studera mer abstrakta objekt än $\mathbb{C}$, nämligen så kallade metriska rum. Låt oss börja med en definition:

Definition 1.1. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd. Låt $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller att

1. $d(x, y) \geq 0$ för alla $x, y \in X$ (Positiv)
2. $d(x, y) = 0$ om och endast om $x = y$ för alla $x, y \in X$ (Definit)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ för alla $x, y \in X$ (Symmetrisk)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ för alla $x, y, z \in X$ (Triangelolikheten)

Vi kallar d för en **metrik** på X och paret (X, d) kallar vi för ett **metriskt rum**.

Anmärkning 3. Då metriken d är underförstådd så säger vi bara att X är ett metriskt rum. $\square$

En metrik ska uppfattas som en avståndsfunktion, som helt enkelt mäter avståndet mellan punkter i rummet X . (Vi kallar element i det metriska rummet X för **punkter**). Låt oss nu kolla på några exempel:

Exempel 5. Betrakta $\mathbb{C}$, och definiera $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ genom $d(z, w) = |z - w|$. Låt oss verifiera att detta verkligen blir en metrik på $\mathbb{C}$. Eftersom $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty[$, så är första punkten i definitionen klar. Låt oss nu betrakta (2) i definitionen ovan. Antag att $d(z, w) = 0$, dvs att $|z - w| = 0$, som helt enkelt betyder, om $z = x + iy$ och $w = u + iv$, att

$$\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = 0.$$

Men detta är samma sak som att $(x - u)^2 + (y - v)^2 = 0$. Men summan av två kvadrater är noll om och endast om båda termerna är noll, dvs att $x - u = 0$ och $y - v = 0$. Detta betyder att $z = w$, vilket visar (2). Vidare så är

$$d(z, w) = |z - w| = |(-1)(w - z)| = |-1||w - z| = |w - z| = d(w, z),$$

så d är symmetrisk. Slutligen så ska vi se att d uppfyller triangelolikheten. För att se det så måste man veta att $|z + w| \leq |z| + |w|$, och ett bevis av detta faktum kan ni hitta i boken på sidan 8. Detta ger att

$$d(z, a) = |z - a| = |(z - w) + (w - a)| \leq |z - w| + |w - a| = d(z, w) + d(w, a),$$

som visar att d är en metrik på $\mathbb{C}$. Denna metrik brukas kallas för den **Euklidiska metriken** på $\mathbb{C}$. $\square$

Man kan även definiera fler metriker på $\mathbb{C}$, och det är precis detta nästa inlämningsuppgift handlar om:

INLÄMNINGSUPPGIFT 5. Betrakta $\mathbb{C}$ och låt $z = x + iy$ och $w = u + iv$.

- (a) Definiera $d(z, w) = \frac{|z - w|}{1 + |z - w|}$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.
- (b) Definiera $d(z, w) = |x - u| + |y - v|$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.
- (c) Definiera $d(z, w) = \max(|x - u|, |y - v|)$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.

I uppgiften ovan så rekommenderar jag även att ni jämför de olika metriker samt med den Euklidiska metriken på $\mathbb{C}$. Ett annat viktigt exempel är

Exempel 6. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och definiera $d: X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ genom

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = y \\ 1 & \text{om } x \neq y \end{cases}.$$

Låt oss se att detta blir en metrik på X . Det är klart att $d(x, y) \geq 0$ och om $d(x, y) = 0$ så betyder det per definition att $x = y$. Det är även klart att d är symmetrisk. Slutligen så måste vi se om triangelolikheten gäller. Vi har att om $d(x, z) = 0$ så måste $x = z$, så $d(x, y) + d(y, z) \geq 0$ för alla $x, y, z \in X$, ty om $y = x = z$ så är $d(x, y) + d(y, z) = 0$ och om $y \neq x = z$ så är $d(x, y) + d(y, z) = 2$. Om istället $d(x, z) = 1$ så är $x \neq z$. Då måste vi betrakta några olika fall:

Fall 1: $y = x \neq z$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 1$,

Fall 2: $y = z \neq x$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 1$,

Fall 3: $y \neq x \neq z$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 2$.

Uträkningarna ovan visar att d uppfyller triangelolikheten. Alltså är (X, d) ett metriskt rum. Metriken d brukar kallas för den **diskreta metriken**. $\square$

För att kunna göra någon analys överhuvudtaget så måste man veta vad en öppen mängd är. Större delen av analysen och dess satser bygger på öppna mängder och andra topologiska begrepp. Vi ska nu gå igenom några av de topologiska begrepp som vi kommer behöva framgent. Min terminologi kan skilja sig en del från bokens, och jag kommer att göra de topologiska begreppen i metriska rum istället för att endast betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken som boken gör. Jag kommer att göra anmärkningar där/om det skiljer sig allt för mycket.

Låt nu (X, d) vara ett metriskt rum. Vi definierar den öppna bollen kring $x \in X$ med radie $r > 0$ genom

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Observera att då $X = \mathbb{C}$ och $d(z, w) = |z - w|$ så är

$$B(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}.$$

Detta är då en disk kring z med radie r , och brukas skrivas som $D(z, r)$. Jag kommer både använda terminologin boll och disk då vi pratar om $\mathbb{C}$. Låt nu X vara ett generellt metriskt rum igen. Vi säger att en mängd $U \subset X$ är **öppen** om för varje $x \in U$ så finns det ett $r > 0$ så att $B(x, r) \subset U$. Den öppna bollen är även öppen:

Lemma 1.2. $B(x, r) \subset X$ är öppen.

Bevis. Låt $y \in B(x, r)$. Då är $d(x, y) < r$, säg att $d(x, y) = s$. Då är $y \in B(y, r-s)$ och $B(y, r-s) \subset B(x, r)$, ty om $z \in B(y, r-s)$ så är

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < s + r - s = r.$$

$\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 6. Vad är en öppen boll i ett metriskt rum med den diskreta metriken.

INLÄMNINGSUPPGIFT 7. Vad är en öppen boll med radie 1 i de metriska rummen i inlämningsuppgift 5.

Exempel 7. Betrakta $\mathbb{R}$ med metriken $d(x, y) = |x - y|$. Vi ska visa att varje intervall på formen $I =]a, b[$ är öppet. Tag $x \in I$. Då är $a < x < b$. Låt $r = \min\{x - a, b - x\}$. Då är $B(x, r) \subset I$, så I är öppen. $\square$

Exempel 8. Betrakta $\mathbb{R}$ med metriken $d(x, y) = |x - y|$. Vi ska visa att varje intervall på formen $I = [a, b]$ inte är öppet. Tag $a = x \in I$ och tag godtycklig $r > 0$. Betrakta $y = a - r/2$. Då är $y \in B(a, r)$, men $y \notin I$. Vi har alltså hittat en punkt $x \in I$ så att för varje $r > 0$ finns en punkt $y \in B(x, r)$ så att $y \notin I$. $\square$

I boken finns det flera exempel på mängder som är öppna, kolla på dessa och gör alla detaljer.

Proposition 1.3. *Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Då gäller*

1. *Ändliga snitt av öppna mängder är öppna.*
2. *Godtyckliga unioner av öppna mängder är öppna.*
3. *$\emptyset$ och X är öppna.*

Bevis. Beviset av (1) är precis samma som står i boken.

(2): Låt $V = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, där U_α är öppna. Låt nu $x \in V$. Då är $x \in U_\alpha$ för något $\alpha \in A$. Då finns det ett $r > 0$ så att $B(x, r) \subset U_\alpha$, ty U_α är öppen. Men då är $B(x, r) \subset V$, så V är öppen.

(3): Att $\emptyset$ och X är öppna är klart. $\square$

Följd 1.4. *En mängd $U \subset X$ är öppen om och endast om U är en union av öppna bollar.*

INLÄMNINGSUPPGIFT 8. *Visa följden ovan.*

Definition 1.5. *Låt $U \subset X$ vara en mängd. En punkt $x \in U$ sägs vara en inre punkt till U om det finns en boll $B(x, r)$ som ligger helt inne i U . Låt U° vara mängden av inre punkter till U .*

Observera att $U^\circ \subset U$, och de inre punkterna karakteriserar de öppna mängderna enligt följande proposition:

Proposition 1.6. *$U \subset X$ är öppen om och endast om $U^\circ = U$.*

Bevis. Börja antag att $U^\circ = U$. Då är det klart att U är öppen, ty varje punkt $x \in U^\circ = U$ har en boll $B(x, r)$ som ligger helt inne i $U^\circ = U$.

Å andra sidan, antag att U är öppen. Vi vet att $U^\circ \subset U$, så vi måste visa att $U \subset U^\circ$. Tag nu $x \in U$. Eftersom U är öppen så finns det en boll kring x som ligger helt inne i U , så $x \in U^\circ$, dvs $U \subset U^\circ$. $\square$

En annan viktig del av analysen är följder och konvergens. Konvergens ger även upphov till öppna mängder, men detta får ni lära er i en annan kurs. Här börjar vi med definitionen av en följd. En **följd** i en mängd X är en avbildning från $\mathbb{N}$ till X . Om $f(n) = x_n$ är en följd i X så kommer vi ofta skriva $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ då vi talar om följden, dvs vi kan tala om bilden av avbildningen och inte om följden själv. Vidare, om $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ är en följd och $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ är strikt växande, dvs $g(n) < g(m)$ så fort $n < m$, så säger vi att $f \circ g$ är en **delföljd** till f , som vi skriver ibland som $x_{g(n)}$ eller x_{n_k} .

Exempel 9. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Då är $\{x_{2n}\}_{n=1}^\infty$ och $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^\infty$ delföljder till $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. $\square$

Definition 1.7. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Vi säger att x_n konvergerar mot x , som vi skriver som $x_n \rightarrow x$, om $d(x_n, x) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$.

Skriver vi om denna definition litegrann, så säger vi att $x_n \rightarrow x$ om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $m \geq 0$ så att $d(x_n, x) < \varepsilon$ för alla $n \geq m$. Så, en följd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot en punkt x om följden förr eller senare ligger godtyckligt nära x .

Betrakta nu $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Då kommer en följd $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ konvergera mot en punkt z om $|z_n - z| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. I boken kan ni även läsa att $z_n = x_n + iy_n \rightarrow z = x + iy$ i $\mathbb{C}$ om och endast om $x_n \rightarrow x$ och $y_n \rightarrow y$ i $\mathbb{R}$. Vidare så har man att om $z_n \rightarrow z$ så är $|z_n| \rightarrow |z|$ och $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$.

Exempel 10. Betrakta följden $\{2^n/n! + in/2^n\}_{n=1}^\infty$ i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Det är klart att denna följd konvergerar mot 0. $\square$

Exempel 11. Betrakta följden $\{n^{1/n} + ib^n\}_{n=1}^\infty$, för $|b| < 1$, i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Eftersom $n^{1/n} \rightarrow 1$ och $b^n \rightarrow 0$ så får vi att följden går mot 1. $\square$

Exempel 12. Betrakta följden $\{a^{1/n} + i \sin 1/n\}_{n=1}^\infty$, för $a > 0$, i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Eftersom $a^{1/n} \rightarrow 1$ och $1/n \rightarrow 0$ så får vi att följden går mot 1. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 9. Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i ett metriskt rum X . Antag att $x_n \rightarrow x$. Visa att varje delföljd till $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot x .

Proposition 1.8. Gränsvärden är unika i metriska rum, dvs om $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i ett metriskt rum och $x_n \rightarrow x$ och $x_n \rightarrow y$ då är $x = y$.

Bevis. Vi har att

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y).$$

Eftersom högerledet går mot 0 då $n \rightarrow \infty$ så följer det att $d(x, y) = 0$. Men detta betyder att $x = y$. $\square$

Definition 1.9. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Vi säger att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är **Cauchy** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N \geq 0$ så att $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ för alla $n, m \geq N$.

Ett annat sätt att se denna definition på är att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är Cauchy om $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ då $n, m \rightarrow \infty$.

Proposition 1.10. Varje konvergent följd är Cauchy.

Bevis. Antag att $x_n \rightarrow x$. Då gäller att

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \rightarrow 0$$

då $n, m \rightarrow \infty$, ty $d(x_n, x) \rightarrow 0$ och $d(x, x_m) \rightarrow 0$. $\square$

Om varje Cauchyföljd konvergerar så säger vi att det metriska rummet är **fullständigt**, dvs om konvergenta följder och Cauchyföljder är samma sak. Ett exempel på ett fullständigt metriskt rum är $\mathbb{C}$. Konvergens är viktigt, som jag har nämnt tidigare, inom analysen, så försök att få en bra förståelse för detta. Ibland är det bra att kunna jämföra konvergenser i olika metriker. Till exempel om man vill avgöra om ett metriskt rum är fullständigt i en metrik eller inte så behöver man bara hitta två metriker som är ekvivalenta (se nedan) och visa att det metriska rummet är fullständigt i den ena metriken. Om (X, d_1) och (X, d_2) är metriska rum, så säger vi att d_1 och d_2 är **ekvivalenta** om det finns konstanter $c_1, c_2 \geq 0$ så att

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

för alla $x, y \in X$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 10. Låt d_1 och d_2 vara ekvivalenta metriker, och låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd. Visa att om $\{x_n\}$ konvergerar i d_1 -metriken så konvergerar den även i d_2 -metriken. Visa även att vara ekvivalenta metriker är en ekvivalensrelation. Visa även att ekvivalenta metriker ger upphov till samma öppna mängder.

Nu till det som är motsatsen till öppna mängder, så kallade slutna mängder. Vi säger att en mängd $S \subset X$ är **sluten** och S^c är öppen. Här är S^c **komplementet** till S , dvs $X \setminus S := \{x \in X : x \notin S\}$. Det följer direkt från Proposition 1.3 att $\emptyset = X^c$ och $X = \emptyset^c$ är slutna mängder.

Proposition 1.11. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Då är

1. Ändliga unioner av slutna mängder är slutna.
1. Godtyckliga snitt av slutna mängder är slutna.

Bevis. (1): Låt $S_1, \dots, S_n$ vara slutna. Då är

$$\left(\bigcup_{j=1}^n S_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^n S_j^c.$$

Eftersom S_j^c är öppna så följer det från Proposition 1.3 att $\bigcup_{j=1}^n S_j$ är sluten.

(2): Låt S_α vara slutna där $\alpha \in A$. Då är

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha^c,$$

som är öppen enligt Proposition 1.3, så $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ är sluten. □

Låt oss även se ett på ett annat sätt som säger om en mängd är sluten eller ej. Vi börjar med en definition.

Definition 1.12. Låt $S \subset X$ vara en mängd i ett metriskt rum. Vi säger att x är en **hopningspunkt** till S om varje boll $B(x, r)$ innehåller oändligt många punkter i S .

Anmärkning 4. Börja med att komma ihåg att om X och Y är mängder så definierar vi

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y), \text{ card}(X) = \text{card}(Y), \text{ card}(X) \geq \text{card}(Y)$$

att betyda att det finns en funktion $f: X \rightarrow Y$ som är injektiv, bijektiv respektive surjektiv. Man säger att en mängd X är **uppräknelig** om $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$. Vi säger att en mängd X är **ändlig** om $\text{card}(X) = \{1, \dots, n\}$ för något n . En mängd som är uppräknelig men inte ändlig sägs vara **oändlig**. $\square$

Hopningspunkter karakteriserar slutna mängder:

Proposition 1.13. En mängd S är sluten om och endast om den innehåller alla dess hopningspunkter.

Bevis. Ett bevis hittar ni i boken. $\square$

Låt nu $S \subset X$ vara en mängd. Vi definierar $\bar{S}$ att vara det **slutna höljet** till S genom

$$\bar{S} = S \cup \{\text{hopningspunkter}\}.$$

Det är klart att $S \subset \bar{S}$.

Följd 1.14. $S \subset X$ är sluten om och endast om $S = \bar{S}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 11. Visa följden ovan.

Proposition 1.15. Låt X vara ett metriskt rum, låt $S \subset X$ och låt $x \in S$. Då är följande ekvivalent:

1. $x \in \bar{S}$.
2. $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ för alla $r > 0$.
3. Det finns en följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ som konvergerar mot x .

Bevis. Vi börjar med att visa att (2) implicerar (1). Antag, för en motsägelse, att $B(x, r) \cap S = \emptyset$. Då är $B(x, r)^c$ en sluten mängd som innehåller S , ty $(B(x, r)^c)^c = B(x, r)$ är öppen, men $x \notin S$, så $x \notin \bar{S}$. Detta ger motsägelsen, så $x \in \bar{S}$. Låt oss nu visa (1) implicerar (2). Antag för en motsägelse att $x \notin \bar{S}$. Eftersom $(\bar{S})^c$ är öppen så finns det en boll så att $B(x, r) \subset (\bar{S})^c \subset S^c$. Detta är en motsägelse, så $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$.

Antag nu att $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$. För varje $n \in \mathbb{N}$ så finns det ett $x_n \in B(x, 1/n) \cap S$ så att $x_n \rightarrow x$, ty

$$d(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$. Å andra sidan, antag att $B(x, r) \cap S = \emptyset$. Då gäller för alla $y \in S$ att

$$d(x, y) \geq r.$$

Detta betyder att inget följd i S kan konvergera mot x , vilket avslutar beviset. $\square$

Låt oss stanna upp ett tag. Denna proposition ger oss ett sätt att visa att en mängd S är sluten. Man gör så här: Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$ är en följd så att $x_n \rightarrow x \notin S$. Om man visar att $x \in S$ så ger propositionen att x är en hopningspunkt, så S innehåller alla sina hopningspunkter, dvs S är sluten.

INLÄMNINGSUPPGIFT 12. Visa att en sluten mängd till ett fullständigt metriskt rum är fullständigt, och visa att om en delmängd till ett metriskt rum är fullständigt så är den sluten.

Dax att införa ett nytt topologiskt begrepp. Låt S vara en mängd i ett metriskt rum X . Vi säger att x är en **randpunkt** till S om $x \in \bar{S} \setminus S^\circ$. Mängden av randpunkter till S skriver vi som ∂S .

Exempel 13. Betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Låt

$$A(z, r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C} : r_1 < |z - w| < r_2\}$$

vara en annulus med inre radie r_1 och yttre radie r_2 . Då är

$$\partial A(z, r_1, r_2) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r_1\} \cup \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r_2\}.$$

$\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 13. Låt S vara en mängd i ett metriskt rum X . Måste ∂S vara sluten eller öppen, eller kanske både öppen och sluten eller varken öppen eller sluten? Red ut detta. Där du inte kan bevisa påståendet ge motexempel.

Vi har nu bara några topologiska begrepp kvar att gå igenom. Vi säger att en mängd $S \subset X$ är **begränsad** om det finns en boll $B(x, r)$ så att $B(x, r) \supset S$ för alla $x \in S$. Definiera **diametern** för S genom

$$\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} d(x, y).$$

Det är lätt att se att S är begränsad om och endast om $\text{diam}(S) < \infty$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 14. Betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Visa att varje ändlig mängd är begränsad.

Boken inför därefter kompakthet genom att säga att varje följd ska ha en konvergent delföljd. Vi ska göra det på ett annat sätt, som också står i boken, och boken visar att dessa två definitioner är ekvivalenta. Låt $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ vara en familj av öppna mängder. Vi säger att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **täcker** en mängd S om $S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Man säger att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ är en öppen övertäckning av S . Vidare, om $B \subset A$ och $S \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$ så säger vi att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ är en **delövertäckning** av S .

Definition 1.16. En mängd $K \subset X$ är **kompakt** om varje öppen övertäckning har en ändlig delövertäckning, dvs att det räcker med ett ändligt antal öppna mängder för att täcka K .

En mängd $K \subset X$ sägs vara **totalt begränsad** om för varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt antal bollar med radie ε som täcker K .

INLÄMNINGSUPPGIFT 15. Visa att varje totalt begränsad mängd är begränsad. Visa att om K är totalt begränsad så är också $\bar{K}$ totalt begränsad.

Nu kan vi karakterisera kompakthet.

Sats 1.17. Om K är en mängd i ett metriskt rum X så är följande ekvivalent:

1. K är kompakt.
2. Varje följd i K har en konvergent delföljd som konvergerar till en punkt i K .
3. K är fullständigt och totalt begränsad.

Bevis. Vi ska visa att (2) är ekvivalent med (3), och sen visa att (2) och (3) implicerar (1) och slutligen att (1) implicerar (2). Vi börjar med att anta att (3) gäller. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd i K . Eftersom K är totalt begränsad så kan vi täcka K med ett ändligt antal bollar med radie $1/2$, och åtminstone en av dem måste innehålla x_n för oändligt många n , säg $x_n \in B_1$ för $n \in N_1$. Nu kan $K \cap B_1$ täckas med ett ändligt antal bollar med radie $(1/2)^2$, och åtminstone en av dem måste innehålla x_n för oändligt många $n \in N_1$, säg $x_n \in B_2$ för $n \in N_2$. Fortsätt nu på detta vis, varvid vi får en följd av bollar med radie $(1/2)^j$, dvs med avtagande radie, och en avtagande följd $N_j \subset \mathbb{N}$, dvs $N_1 \supset N_2 \supset \dots$, och $x_n \in B_j$ för $n \in N_j$. Välj nu $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots$, så att $n_1 < n_2 < \dots$. Betrakta nu $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$. Då är

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) < (1/2)^{1-j}$$

för $k > j$. Låt nu $k, j \rightarrow \infty$, varvid $d(x_{n_j}, x_{n_k}) \rightarrow 0$, så $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ är Cauchy. Eftersom K är fullständigt så kommer denna delföljd konvergera till en punkt i K , varvid vi har kommit fram till (2).

Vi ska nu visa att (2) implicerar (3). Vi ska visa att om något av villkoren i (3) inte är uppfylld så kommer inte (2) gälla. Vi börjar med att anta att K inte är fullständigt. Då finns det en Cauchyföljd $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ som inte konvergerar. Ingen delföljd till denna Cauchyföljd kan inte heller konvergera i K för annars skulle följden konvergera mot samma sak. Antag nu istället att K inte är totalt begränsad. Då finns det ett $\varepsilon > 0$ så att K inte kan täckas med ett ändligt antal bollar med radie ε . Välj nu $x_n \in K$ induktivt på följande sätt: Börja med en godtycklig $x_1 \in K$. Då man har valt $x_1, \dots, x_n$ välj $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$. Då kommer

$$d(x_n, x_m) > \varepsilon$$

för alla n och m , så $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ har ingen konvergent delföljd, vilket visar påståendet.

Vi ska nu visa att (2) och (3) implicerar (1). Det är tillräckligt att visa att om (2) gäller och $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ är en öppen övertäckning av K , så finns det ett $\varepsilon > 0$ så att varje boll med radie ε som skär K är innehållen i någon V_α , för K kan täckas med ett ändligt antal sådana bollar enligt (3). Antag för en motsägelse att för varje $n \in \mathbb{N}$ finns en boll B_n med radie $(1/2)^n$ så att $B_n \cap K \neq \emptyset$ och B_n är innehållen i ingen V_α . Välj nu $x_n \in B_n \cap K$, varvid vi får en följd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Enligt (2) så har denna följd en delföljd som konvergerar till någon punkt $x \in K$. Vi har att $x \in V_\alpha$ för något α , ty V_α :orna täcker K . Vidare eftersom V_α är öppen så finns det ett $\varepsilon > 0$ så att $B(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$. För n stort nog så att $(1/2)^n < \varepsilon/3$ så gäller

$$d(x_n, x) < \varepsilon/3.$$

Detta betyder att $B_n \subset B(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$, som motsäger valet av B_n . Detta avslutar denna implikation.

Slutligen så ska vi visa att (1) implicerar (2). Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i K med ingen konvergent delföljd. Då finns det för varje $x \in K$ en boll B_x centrerad kring x som innehåller x_n för endast ändligt många n , för annars skulle någon delföljd konvergera mot x . Då är $\{B_x\}_{x \in K}$ en öppen övertäckning av K , men den har ingen ändlig delövertäckning. $\square$

Anmärkning 5. Jämför satsen ovan med bokens framställning, och kolla om ni hittar skillnader/likheter. $\square$

Då vi talar om det metriska rummet $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken så har man ytterligare en karakterisering av kompakthet, nämligen

Sats 1.18. (Heine-Borels sats)

$K \subset \mathbb{C}$ är kompakt om och endast om K är sluten och begränsad.

Bevis. Se boken för ett bevis. $\square$

Anmärkning 6. Om K är en kompakt i något $\mathbb{R}^n$ så gäller även Heine-Borels sats. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 16. Låt K vara en kompakt i ett metriskt rum X . Vad gäller då? Har man motsvarigheten till Heine-Borels sats ovan, eller gäller bara en implikation, eller kanske ingen. Utred och ge eventuella motexempel.

Avsnitt 1.4

Detta avsnitt börjar lite lätt med definitionen av funktioner/avbildningar och vad det betyder att en funktion är injektiv och surjektiv. Dessa faktum är jag

säker på att ni redan vet så jag lämnar detta till er att läsa i boken. Därefter, i avsnitt 1.4.1.6 så tar man upp den så kallade Riemannytan till funktionen $\sqrt{z}$. Riemannytan är ett komplext område som ni kan läsa en hel kurs om på doktorandnivå, så därför lämnar jag detta och lämnar det öppet för den intresserade läsaren att läsa detta avsnitt själv.

Nu till något helt nytt för de flesta, nämligen den så kallade Riemannsfären, (som också är en Riemannyta). Den så kallade Riemannsfären är inget annat än det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med en extra punkt som vi har format en sfär av (Egentligen så är detta något topologiskt som kallas enpunkts-kompaktifiering). Den punkten som vi lägger till är ∞ , och denna punkt låter vi vara nordpolen på sfären. Vi identifierar denna sfär med enhetssfären, dvs den med radie 1, och det är enhetssfären som vi brukar kalla Riemannsfären. Vi kommer beteckna det utvidgade komplexa talplanet med $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. I $\mathbb{C}_\infty$ har vi följande räkneregler:

- $z + \infty = \infty$
- $z \cdot \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{z}{\infty} = 0$

Den stereografiska projektionen använder vi för att identifiera punkter på Riemannsfären med punkter i planet. Den fungerar på följande vis:

- Låt Riemannsfären stå med sydpolen i origo i $\mathbb{C}_\infty$.
- Tag en punkt p på Riemannsfären.
- Drag en rät linje genom nordpolen(N) och p .
- Den punkt som linjen skär $\mathbb{C}_\infty$ är värdet för den stereografiska projektionen.

Observera att nordpolen och $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ avbildas på varandra via den stereografiska projektionen.

Det första exemplet i detta avsnitt är väldigt viktigt, och beskriver den inversa stereografiska projektionen i koordinater. Här är en genomgång av exemplet:

Exempel 14. Låt $z = x + iy$. Identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$, så $z = (x, y)$. Eftersom Riemannsfären ligger i $\mathbb{R}^3$ så kan vi via en identifiering mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ uppfatta z som punkten $(x, y, 0)$. Linjen l genom $N = (0, 0, 1)$ och $z = (x, y, 0)$ ges då av, enligt en linjär algebra kurs,

$$(x_1, x_2, x_3) = l(t) = N + t\vec{Nz} = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) = (tx, ty, 1-t) \quad -\infty < t < \infty.$$

Eftersom sfärens ekvation ges av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ så skär linjen sfären precis då

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2 x^2 + t^2 y^2 + (1-t)^2 = t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t + 1.$$

Denna ekvation är samma sak som

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0,$$

som har lösningarna $t = 0$ eller $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}$. Om $t = 0$ så hamnar vi via linjen l i nordpolen $(0, 0, 1)$. Annars så får vi att

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Detta bestämmer alltså en punkt på Riemannsfären om vi utgår från en punkt $z = x + iy$ i det komplexa talplanet. $\square$

Exempel 15. Punkten $z = 1 + i$ korresponderar mot punkten

$$\left(\frac{2 \operatorname{Re}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{|1 + i|^2 - 1}{|1 + i|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

på Riemannsfären. $\square$

Om vi vill uttrycka den stereografiska projektionen i koordinater så kan vi använda exemplet ovan:

Exempel 16. Låt (x_1, x_2, x_3) vara en punkt på Riemannsfären. Då kan vi använda oss av en linje genom N och (x_1, x_2, x_3) ner till $\mathbb{C}$. Denna ges då av

$$x = \frac{x_1}{t}, \quad y = \frac{x_2}{t}, \quad t = 1 - x_3,$$

så

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Detta ger en punkt $z = x + iy$ i $\mathbb{C}$. $\square$

Exempel 17. Låt oss använda den stereografiska projektionen på punkten $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Vi får då enligt exemplet ovan att

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1, \quad y = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1,$$

så $z = 1 + i$ är bilden av den stereografiska projektionen. Jämför exempel 15. $\square$

Nästa exempel är väldigt viktigt, och kommer komma till nytta då vi studerar Möbiusavbildningar i slutet av kursen.

Exempel 18. Vi ska visa att alla linjer och cirklar i $\mathbb{C}$ korresponderar under den stereografiska projektioner mot cirklar på Riemannsfären.

Den generella ekvationen för en cirkel eller en linje i $\mathbb{C}$, där $z = x + iy$, kan skrivas som

$$A(x^2 + y^2) + Cx + Dy + E = 0.$$

Använd nu Exempel 16 och substituera x och y i ekvationen ovan. Då får vi

$$A \left(\left(\frac{x_1}{1-x_3} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right)^2 \right) + C \frac{x_1}{1-x_3} + D \frac{x_2}{1-x_3} + E = 0.$$

Gör liknämngt varvid denna ekvation är ekvivalent med, förutsett att $x_3 \neq 1$:

$$A(x_1^2 + x_2^2) + Cx_1(1-x_3) + Dx_2(1-x_3) + E(1-x_3)^2 = 0.$$

Eftersom $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, dvs $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$ så får vi att

$$A(1 - x_3^2) + Cx_1(1-x_3) + Dx_2(1-x_3) + E(1-x_3)^2 = 0.$$

Dela nu med $(1-x_3)$, som ger att

$$A(1+x_3) + Cx_1 + Dx_2 + E(1-x_3) = 0,$$

som är ekvivalent med

$$Cx_1 + Dx_2 + (A-E)x_3 + A + E = 0.$$

Detta är ekvationen för ett plan i $\mathbb{R}^3$. Vi har alltså visat att projektionen av en cirkel eller linje måste ligga i detta plan och på Riemannsfären. Men snittet av planet och Riemannsfären är en cirkel, så exemplet är klart. $\square$

Boken går därefter igenom en metrik på $\mathbb{C}_\infty$, som bara är det Euklidiska avståndet i $\mathbb{R}^3$. Försök att få en bra geometrisk bild av Riemannsfären och detta avstånd. Kan ni tänka ut vad det kortaste avståndet på sfären är, dvs om man transporteras på ytan. En ledning är följande uppgift:

INLÄMNINGSUPPGIFT 17. Låt p och q vara två distinkta punkter på Riemannsfären, och låt π vara den stereografiska projektionen. Visa att planet genom p, q och origo skär Riemannsfären i en så kallad storcirkel, dvs en cirkel med diameter 2. Vidare, visa att denna storcirkel korresponderar mot en unik cirkel (eller linje) i planet som går genom

$$\pi(p), \pi(q) \text{ och } -\frac{1}{\overline{\pi(p)}}.$$

Eftersom Riemannsfären är både sluten och begränsad så ger Heine-Borels sats att den är kompakt. Egentligen så måste man argumentera att vi har en kontinuerlig avbildning mellan sfären och $\mathbb{C}_\infty$ och att bilden av en kompakt under en kontinuerlig avbildning är kompakt. Mer om egenskaper för kontinuerliga avbildningar kan ni läsa senare i detta avsnitt.

Anmärkning 7. Boken argumenterar att sfären är kompakt och eftersom sfären och $\mathbb{C}_\infty$ är isometriska så följer det att $\mathbb{C}_\infty$ är kompakt. Försök att visa följande: Antag att (X, d_1) och (Y, d_2) är metriska rum som är isometriska. Visa att om ett av dessa rum är kompakt så är det andra kompakt också. $\square$

Vi ska nu studera kontinuerliga funktioner/avbildningar. Boken definierar kontinuitet via ett gränsvärde. Denna definition ska inte vara något nytt för er. Därefter så visar de att denna definition är ekvivalent med den vanliga $\varepsilon - \delta$ -definitionen som ni också har sett i tidigare kurser. Sen visar boken en väldigt viktig ekvivalent definition av kontinuitet, och denna definition ska vi använda oss av:

Definition 1.19. Låt X och Y vara metriska rum och låt $f: X \rightarrow Y$ vara en avbildning. Vi säger att f är **kontinuerlig** om $f^{-1}(U)$ är öppen för varje öppen $U \subset Y$.

Anmärkning 8. $f^{-1}(U)$ betyder inversa bilden av U , eller ibland så säger man att Urbilden av U under f . Kom ihåg att $f^{-1}(U)$ inte betyder att f har en invers, utan

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}.$$

$\square$

Anmärkning 9. Bokens $\varepsilon - \delta$ -definition går självklart att generalisera till allmänna metriska rum genom att använda sig av en allmän metrik d istället för Euklidiska metriken som boken använder. $\square$

Exempel 19. Betrakta signumfunktionen $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denna är inte kontinuerlig ty

$$\text{sgn}^{-1}(]-1/2, 1/2]) = \{0\},$$

så den inversa bilden av det öppna intervallet $] - 1/2, 1/2[$ är punkten $\{0\}$ som är sluten. $\square$

Exempel 20. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \geq 0 \\ x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

Vi påstår att f är kontinuerlig, så låt oss visa detta. Låt $a < b < 0$. Då är $f^{-1}(]a, b]) =]a, b[$. Om $a < 0 \leq b$ så är $f^{-1}(]a, b]) =]a, \sqrt{b}[$. Slutligen om $0 \leq a < b$ så är $f^{-1}(]a, b]) =]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$. Alltså är inversa bilder av öppna mängder öppna, så f är kontinuerlig. $\square$

Definitionen av kontinuitet som jag nyss gav gör att det blir lättare att visa Proposition 7 och 8 i boken. För att visa detta så tänker jag ge beviset av Proposition 8.

Bevis av Proposition 8 i boken. Vi ska visa att $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ är kontinuerlig. Låt $U \subset S_3$ vara en öppen mängd. Eftersom $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ så är

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Men eftersom $V := g^{-1}(U)$ är öppen och eftersom $f^{-1}(V)$ är öppen så är $g \circ f$ kontinuerlig. $\square$

Boken visar därefter att kontinuerliga funktioner bevarar kompaktitet, dvs om $f: X \rightarrow Y$ är kontinuerlig och $K \subset X$ är kompakt så är $f(K)$ kompakt.

INLÄMNINGSUPPGIFT 18. Visa att kontinuerliga funktioner bevarar kompaktitet via ett övertäckningsargument, dvs visa detta genom att visa att varje öppen övertäckning har en ändlig delövertäckning.

Sen visar boken att varje reellvärd kontinuerlig funktion definierad på en kompakt har ett maximum på kompakten. Senare kommer vi se att varje holomorf funktion, som de funktioner som vi ska studera senare kallas, antar sitt absoluta maximum på randen till den mängd där den är definierad, dvs om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf så kommer $|f|$ anta sitt maximum på ∂U . Mer om detta senare. Nu ska vi diskutera likformig kontinuitet. Observera att varje likformig kontinuerlig funktion är kontinuerlig, men bokens exempel 30 visar på en funktion som är kontinuerlig men inte likformig kontinuerlig. Det finns även en ekvivalent definition av likformig kontinuitet som nästa uppgift reder ut.

INLÄMNINGSUPPGIFT 19. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen, och låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. För $y \in U$ definiera

$$\tau_y f(x) := f(x - y).$$

Definiera även $\|f\|_U := \sup_{x \in U} |f(x)|$. Visa att f är likformigt kontinuerlig om och endast om $\|\tau_y f - f\|_U \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$.

En viktig sats är bokens sats 10 som säger att varje kontinuerlig funktion på en kompakt är till och med likformigt kontinuerlig. Kom ihåg att en funktion är kontinuerlig på en kompakt om den är kontinuerlig i en omgivning till kompakten, ty kontinuitet är definierad i termer av öppna mängder.

Låt oss nu titta på några nya topologiska termer innan vi fortsätter. Vi säger att en mängd $A \subset \mathbb{C}$ är **osammanhängande** in det finns icke-tomma öppna mängder U och V så att $U \cap V = \emptyset$ och $A = U \cup V$. Annars så säger vi att A är **sammanhängande**. Rita en bild så förstår ni denna definition bättre. Boken kör dock med en annan definition, vi måste dock ha lite mer terminologi för att ge denna.

Definition 1.20. Låt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vara ett kompakt intervall. En **kurva** i $\mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Anmärkning 10. Att γ är kontinuerlig betyder att den är kontinuerlig på $]a, b[$, precis som jag nämnde ovan. $\square$

Om γ är en kurva på ett intervall $[a, b]$ så säger vi att γ är **sluten** om $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ett enkelt exempel på en sluten kurva är en cirkel. Vidare så säger vi att en kurva γ är **enkel** om

$$\gamma|_{[a, b]}$$

är injektiv. Ett exempel på en enkel kurva är alla kurvor som inte skär sig själv. Kurvor som skär sig själv kan inte vara enkel, eftersom man får problem med injektiviteten i skärningspunkten.

INLÄMNINGSUPPGIFT 20. Visa att man alltid kan parametrisera om en kurva så att definitionsmängden blir $[0, 1]$ men värdemängden är den samma, dvs om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en kurva, visa att man kan definiera om γ så att det blir en avbildning från $[0, 1]$ till $\mathbb{C}$ med samma bild.

Vi kan nu ge bokens definition:

Definition 1.21. Låt $A \subset \mathbb{C}$ vara en öppen mängd. Vi säger att A är **vägsammanhängande** om det för varje par av punkter z och w i A finns en kurva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$.

Definitionen säger alltså att en mängd är vägsammanhängande om det för varje par av punkter i mängden finns en kurva mellan punkterna som ligger helt inne i mängden.

Anmärkning 11. Jag använder mig av en annan terminologi än boken, jag säger vägsammanhängande medan boken säger sammanhängande. $\square$

Anmärkning 12. Väg-sammanhängande-definitionen kräver *öppna* mängder medan i den andra definitionen av sammanhängande så funkar det med vilken mängd som helst. $\square$

Däremot så är dessa två sammanhängande-definitioner samma sak på öppna mängder, men först så behöver vi ett lemma.

Lemma 1.22. Låt U vara sammanhängande. Om $\emptyset \neq A \subset U$ är både öppen och sluten så är $A = U$.

Bevis. Eftersom A är sluten så är A^c öppen. Detta betyder att $A \subset A^c = U$, som motsäger att U är sammanhängande, så A^c måste vara lika med $\emptyset$. Alltså är $A = U$. $\square$

Sats 1.23. Låt U vara öppen i $\mathbb{C}$. Då är U väg-sammanhängande om och endast om U är sammanhängande.

Bevis. Börja anta att U är väg-sammanhängande. Antag vidare, för en motsägelse, att U inte är sammanhängande. Då är $U = V \cup W$ där V, W är icke-tomma och öppna. Observera att V och W är slutna. Låt $z \in V$ och $w \in W$. Enligt antagande så finns det en kurva mellan z och w . Låt denna kurva ges av $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$, dvs en kurva som börjar i z och slutar i w . Låt

$$T = \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in V\}.$$

Observera att $T \neq \emptyset$, eftersom $0 \in T$, och observera att T är begränsad av 1. Låt c vara den minsta övre begränsningen till T , dvs $c = \sup T$. Då är $c \neq 1$, och per definition av övre begränsning så finns det en följd $\{t_n\}$ med $c < t_n \leq 1$ så att $\gamma(t_n) \in W$ och $t_n \rightarrow c$. Kontinuitet ger att

$$\gamma(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n),$$

så eftersom W är sluten så följer det att $\gamma(c) \in W$.

På samma sätt så finns det en följd $\{s_n\}$ med $0 \leq s_n \leq c$ så att $s_n \rightarrow c$ och $\gamma(s_n) \in V$. Nu ger kontinuitet och slutenhet hos V att $\gamma(c) \in V$. Dessa båda följdargument ger vår motsägelse, så U är sammanhängande.

Antag nu att U är sammanhängande. Låt $z_0 \in U$, och låt

$$V = \{z \in U : z \sim z_0\},$$

där $\sim$ betyder att det finns en kurva mellan z och z_0 . Vi påstår att V är öppen, så låt oss visa detta:

Antag att det finns en kurva från z_0 till z_1 i U . Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z_1, r) \subset U$. Om $z \in B(z_1, r)$ så finns en kurva, en rät linje i detta fall, från z till z_1 . Alltså finns det en även en kurva från z till z_0 via z_1 , så V är verkligen öppen.

Vi påstår härnäst att V är sluten. Antag därför att $\{z_n\} \subset V$ är en följd och att $z_n \rightarrow z \in U$. Vi måste visa att $z \in V$. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z, r) \subset U$ kring z med radie r . För något n så kommer $z_n \in B(z, r)$. Då finns det en rät linje i $B(z, r)$ från z till z_n , för det fixerade n :et ovan. Alltså finns det en kurva från z till z_0 , så $z \in V$.

Vi har nu visat att V är både öppen och sluten, så $V = U$, vilket get att U är väg-sammmanhängande. $\square$

Nu tänkte jag ge ett annat bevis av bokens proposition 9, och jag tänkte passa på att generalisera den en aning:

Proposition 1.24. *Låt X och Y vara metriska rum, och låt $S \subset X$ vara sammanhängande. Om $f: X \rightarrow Y$ är kontinuerlig så är $f(S)$ sammanhängande.*

Bevis. Antag för en motsägelse att $f(S)$ inte är sammanhängande, dvs att det finns öppna U och V med $U \cap V = \emptyset$ och $f(S) = U \cup V$. Eftersom f är kontinuerlig och unioner av öppna mängder är öppna så är

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$

öppen. Men $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = S$, ty

$$f(S) = f(f^{-1}(U \cup V)) = U \cup V,$$

som motsäger att S var sammanhängande. $\square$

Mängder som vi kommer att studera mycket är så kallade områden (eng. domains). Ett **område** är helt enkelt en öppen sammanhängande mängd.

Proposition 1.25. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ vara kontinuerlig. Då är f konstant.*

Bevis. Antag för en motsägelse att f inte är konstant. Då måste f anta åtminstone två olika heltal, säg att $m \in \mathbb{Z}$ är ett av dem. Betrakta $I =]m - 1/3, m + 1/3[$ och $J = \{y \in \mathbb{R} : |y - m| > 2/3\}$. Dessa mängder är öppna och $I \cap J = \emptyset$ så de är disjunkta. Observera att $\text{Im}(f) \subset I \cup J$, så $f^{-1}(I)$ och $f^{-1}(J)$ är disjunkta öppna mängder så att $\Omega = f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J)$. Detta motsäger att Ω är sammanhängande. $\square$

Funktionsföljder och serier

En funktionsföljd är helt en följd av funktioner, som vi kommer skriva som $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Här så specificerar jag inte vilken definitionsmängd och värdemängd som funktionerna har, men jag antar underförstått att de åtminstone har samma definitionsmängd. Om vi har en funktionsföljd så kan man förstås tala om konvergens av denna funktionsföljd, och vi ska nu studera några olika typer av konvergens.

Låt $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en följd av funktioner. Vi säger att f_n **konvergerar punktvís** mot en funktion f , som vi skriver som $f_n \rightarrow f$ punktvís, om $|f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in U$.

Exempel 21. Låt $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f_n(z) = \frac{z}{n}$. Då $f_n \rightarrow 0$ punktvís, ty

$$|f_n(z) - 0| = |z/n| \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Exempel 22. Låt $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom $f_n(x) = \sin^n x$. Då konvergerar f_n punktvis på $[0, \pi]$ men inte på $[3\pi/4, 7\pi/4]$. Låt oss visa detta. Tag $x \in [0, \pi]$ och studera följderna $\{\sin^n x\}_{n=1}^\infty$. Om $x \neq \pi/2$ så är $0 \leq \sin x < 1$ och därför är $\sin^n x \rightarrow 0$. Om $x = \pi/2$ så är $\sin x = 1$, så $\sin^n x \rightarrow 1$. Så

$$f_n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{om } x \neq \pi/2 \\ 1 & \text{om } x = \pi/2 \end{cases}.$$

Detta visar att även fast f_n är kontinuerlig så behöver inte gränsfunktionen vara kontinuerlig.

Låt oss nu visa det andra påståendet. Låt $x = 3\pi/2 \in [3\pi/4, 7\pi/4]$. Då är $\sin x = -1$ så $\sin^n x = (-1)^n$, som inte har något gränsvärde. $\square$

Eftersom punktvis konvergens inte ens bevarar kontinuitet så inför vi en annan konvergens:

Definition 1.26. Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vara komplexvärda funktioner definierade på en mängd U . Vi säger att f_n **konvergerar likformigt** mot en funktion f , som vi skriver som $f_n \rightarrow f$ likformigt, om $\sup_{z \in U} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in U$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 21. Visa att likformig konvergens implicerar punktvis konvergens, så likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens.

Anmärkning 13. Omvändningen gäller inte, som exempel 33 visar. $\square$

Exempel 23. Definiera $f_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f_n(z) = 1/z + 1/n$, och låt $g_n: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $g_n(z) = 1/(n(z+a))$. Det är lätt att se att $f_n \rightarrow 1/z$ både punktvis och likformigt. Det är även lätt att se att $g_n \rightarrow 0$ både punktvis och likformigt. Men $f_n g_n \rightarrow 0$ punktvis, medan $f_n g_n \not\rightarrow 0$ likformigt, som visar ytterligare på ett exempel att likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens. $\square$

En egenskap som likformig konvergens har är att den bevarar kontinuitet, jämför punktvis konvergens i exemplet ovan. Det är precis det proposition 10 säger. Beviset av propositionen ger ett bra exempel på där triangelolikheten kommer in, och där man använder kanske ett av det mest använda matematiska "tricken", dvs lägga till och dra ifrån samma sak. Beviset är också ett bra exempel på där ett så kallat $\varepsilon/3$ -argument kommer in. Studera beviset och lägg metoden på minnet. Kolla därefter på bokens diverse exempel.

Det nästföljande avsnitten behöver ni inte studera så noggrant. Ekvikontinuitet är helt enkelt en familj av likformigt kontinuerliga funktioner, och Arzela-Ascolis sats är inget ni behöver lägga någon energi på. Jag anser att dessa begrepp ligger utanför kursinnehållet. Däremot, om ni är intresserade, så innehåller beviset av Arzela-Ascolis sats en väldigt viktig metod. Metoden brukar kallas för Cantors diagonalprocess och används bland annat då man visar att $\mathbb{Q}$ är uppräknligt. Därför rekommenderar jag starkt att ni tar en titt på första halvan av beviset av satsen, dvs sidan 43.

Vi börjar nu istället med att studera serier och dess konvergens. En serie är helt enkelt en oändlig summa av komplexa tal, dvs

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j.$$

Låt $s_n = \sum_{j=1}^n z_j$ vara en delsumma av den ovanstående serien; denna brukar kallas partialsumma. Observera att partialsummorna bildar en följd av komplexa tal, nämligen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Om följden av partialsummor konvergerar så säger vi att serien konvergerar, mer precist har vi

Definition 1.27. Vi säger att $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ **konvergerar** mot z , och skriver $\sum_{j=1}^{\infty} z_j \rightarrow z$ (oftast skriver vi likhetstecken och inte går-mot-pil), om partialsummorna $s_n \rightarrow z$ då $n \rightarrow \infty$, dvs $|s_n - z| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Om en serie inte konvergerar så säger vi att den **divergerar**.

Observera att det är ett nödvändigt villkor att termerna i serien går mot noll, dvs att $z_j \rightarrow 0$, för att serien ska konvergera. Men det är inte ett tillräckligt villkor, dvs om $z_j \rightarrow 0$ så behöver inte serien konvergera, men om serien konvergerar så kommer $z_j \rightarrow 0$. Boken gör detaljerna på dessa påståenden.

Jag tänkte nu nämna de saker som jag tycker är viktiga om serier. Vi säger att en serie $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ är **absolutkonvergent** om $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ konvergerar. En viktig sak som gäller absolutkonvergenta serier är att de är konvergenta. Låt oss visa detta faktum.

Bevis av att absolutkonvergenta serier är konvergenta. Låt $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ vara absolutkonvergent. Betrakta partialsummorna $s_n = \sum_{j=1}^n z_j$. Då är

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |z_j|.$$

Eftersom vi har en absolutkonvergent serie till att börja med så kommer högerledet gå mot noll då $n, m \rightarrow \infty$. Detta betyder att $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ är Cauchy, och eftersom $\mathbb{C}$ är fullständigt så kommer det finnas ett z så att $s_n \rightarrow z$, dvs att $\sum_{j=1}^{\infty} z_j = z$. $\square$

Låt nu $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ vara komplexvärda funktioner definierade på samma mängd. Betrakta serien $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$. Vi säger att denna serie **konvergerar punktvis (likformigt)** om partialsummorna $s_n(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z)$ konvergerar punktvis (likformigt). Följande lemma är viktigt då vi kommer studera Laurentserier senare i kursen:

Lemma 1.28. (Geometrisk serie)

Serien $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ konvergerar mot $1/(1-z)$ för $|z| < 1$, dvs på enhetsdisken.

Bevis. Observera att

$$(1-z)(1+z+z^2+\dots+z^n) = 1+z+z^2+\dots+z^n - z - z^2 - \dots - z^n - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}.$$

Dela nu $(1-z)$ varvid får att

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Låt nu $n \rightarrow \infty$ varvid $z^{n+1} \rightarrow 0$ ty $|z| < 1$, så resultatet följer. $\square$

Exempel 24. Vi har att $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k z^k = \frac{1}{1+2z}$ om $|2z| < 1$, dvs på $B(0, 1/2)$. $\square$

Exempel 25. Vi har att $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ om $|z^{-1}| < 1$, dvs för $|z| > 1$. $\square$

Exempel 26. Vi kan även gå baklänges. Säg att $z \in \mathbb{C}$ uppfyller att $|z-i| < 1/5$. Då gäller att

$$\frac{1}{1-5(z-i)} = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k (z-i)^k,$$

ty $|5(z-i)| < 1$, dvs $|z-i| < 1/5$. $\square$

En annan viktig sats som är användbart inom många områden inom analysen är Weierstrass M-test:

Sats 1.29. (Weierstrass M-test)

Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av komplexvärda funktioner definierade på samma mängd. Antag att f_n är begränsade för stora n , dvs att det finns konstanter M_n så att

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

för varje z . Antag vidare att $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, dvs att den konvergerar. Då gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, och även $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, är likformigt konvergent.

Bevis. Beviset hittar ni i boken. $\square$

Potenssrier och dess konvergensradier

En serie på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, där $a_n \in \mathbb{C}$, kallas en **potensserie** i $(z-z_0)$. Vi ska nu få fram villkor när en sådan potensserie konvergerar. Det kommer visa sig att en potensserie konvergerar på en disk. Radien på denna disk kallas för potensseriens **konvergensradie**.

För att kunna formulera den första satsen som uttalar sig om potensseriers konvergensradie så måste vi definiera begreppen $\limsup$ och $\liminf$. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ vara en följd, och sätt

$$\mathcal{M} := \{a \in \mathbb{R} : \text{det finns en delföljd till } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ som konvergerar mot } a\}.$$

Eftersom varje konvergent följd är begränsad så kommer mängden $\mathcal{M}$ vara en begränsad mängd, så $S = \sup \mathcal{M}$ existerar och det är S som vi brukar kalla för $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Proposition 1.30. *För varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N så att $a_n < S + \varepsilon$ för alla $n \geq N$.*

INLÄMNINGSUPPGIFT 22. *Visa propositionen ovan.*

Propositionen ovan säger alltså att $\limsup$ så gott som alltid ligger över följden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, åtminstone svansen på följden. Nästa proposition säger att $\limsup$ så gott som alltid ligger under följden.

Proposition 1.31. *För varje $\varepsilon > 0$, och för varje $m \in \mathbb{Z}_+$ så finns det ett $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $k > m$ och*

$$S - \varepsilon < a_k.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 23. *Visa propositionen ovan.*

Dessa två propositioner ska inte förvåna er, eftersom $\limsup$ är definierad utifrån konvergenta delföljder och $\sup$. Propositionerna implicerar även att man kan uttrycka $\limsup$ som ett gränsvärde:

Proposition 1.32.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{a_k, a_{k+1}, \dots\}.$$

Bevis. Se boken. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 24. *Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ vara två följder. Visa att $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$, och ge ett motexempel på att omvända olikheten inte alltid gäller.*

Vi kan nu förstås göra detta omvänt och använda $\inf$ istället för $\sup$. Då får vi det så kallade $\liminf$. Mer precist så definierar vi $I = \inf \mathcal{M}$ att vara $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Vi kan då få liknande resultat som propositionerna ovan:

Proposition 1.33. *För varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N så att $a_n > I - \varepsilon$ för alla $n \geq N$.*

Proposition 1.34. *För varje $\varepsilon > 0$, och för varje $m \in \mathbb{Z}_+$ så finns det ett $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $k < m$ och*

$$I + \varepsilon > a_k.$$

Proposition 1.35.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{a_k, a_{k+1}, \dots\}.$$

Konvergens kan karakteriseras i termer av $\limsup$ och $\liminf$:

INLÄMNINGSUPPGIFT 25. En följd $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ är konvergent om och endast om $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Vi kan nu äntligen säga nåt om konvergensradien för potensserier.

Sats 1.36. (Cauchy-Hadamards sats)

Låt $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ vara en potensserie, och låt

$$\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} |a_j|^{1/j}, \quad R = 1/\alpha.$$

Då gäller att

1. Om $|z - z_0| < R$ så konvergerar serien absolut.
2. Om $|z - z_0| > R$ så divergerar serien.
3. Om $0 < r < R$ så konvergerar serien likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$.

Bevis. Se boken. □

Några kommentarer angående satsen. (1) säger alltså att serien konvergerar på $B(z_0, R)$, och på dess komplement så divergerar den. $B(z_0, R)$ är alltså den största disken (bollen) som serien konvergerar på. (3) säger att serien konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd till $B(z_0, R)$. Om $\alpha = 0$ så gör vi konventionen att $R = \infty$ och om $\alpha = \infty$ så gör vi konventionen att $R = 0$, precis som vi gjorde på Riemannsfären. Att $R = \infty$ betyder att serien konvergerar på hela $\mathbb{C}$. Däremot om $R = 0$ så ger satsen endast att serien konvergerar för $z = z_0$.

Ett annat sätt att hitta konvergensradien för en potensserie är att använda sig av det så kallade kvottestet:

Sats 1.37. (Kvottestet)

Låt $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ vara en potensserie. Om

$$\beta = \sup_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right|$$

existerar, så kommer serien konvergera på $B(z_0, 1/\beta)$.

Bevis. Se boken. □

Anmärkning 14. I slutet på beviset så har boken ett påstående: Om $c > 0$ så är $c^{1/n} \rightarrow 1$. Kommer ni ihåg hur man visar detta? Gör alla detaljer. □

Exponentialfunktioner, logaritmer och trigonometriska funktioner

Boken använder sig av potensserier för att definiera den komplexa exponentialfunktionen. Detta är förvisso ett väldigt bra sätt att definiera den på, men jag tänkte göra det lite annorlunda så att ni får se ett annat sätt. Gå igenom bokens framställning och jämför med min.

Vi vill alltså definiera e^z för $z = x + iy \in \mathbb{C}$. En egenskap som den reella exponentialfunktionen har är att $e^x e^y = e^{x+y}$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Vi vill även att den komplexa exponentialfunktionen ska uppfylla detta, dvs att $e^z e^w = e^{z+w}$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. För att detta ska vara uppfyllt så måste $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ vara uppfyllt. Denna ekvation visar att det enda vi måste definiera för att detta ska vara uppfyllt är e^{iy} , ty e^x vet vi redan vad det är. Betrakta i som en konstant, varvid vi har att

$$\frac{d^2 e^{iy}}{dy^2} = -e^{iy}.$$

Detta betyder att vi måste lösa en ordinär differentialekvation på formen

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = f.$$

Som ni vet så har denna generell lösning $f(y) = A \cos y + B \sin y$. Utifrån

$$f(0) = e^{i \cdot 0} = 1 = A \cos 0 + B \sin 0 = A$$

och

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{y=0} = i f(0) = i = (-A \sin 0 + B \cos 0) = B,$$

så får vi att $A = 1$ och $B = i$. Så om vi definierar $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ så kommer $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Vi formulerar det vi har gjort ovan i en definition:

Definition 1.38. För varje $z = x + iy \in \mathbb{C}$ så definierar vi e^z genom

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

Anmärkning 15. Metoden som vi använde ovan för att definiera exponentialfunktionen brukar användas flitigt inom matematiken, dvs man utgår från vad man vill att objektet som skall definieras ska uppfylla, och definiera därefter objektet efter dessa egenskaper. $\square$

Observation 1. Kom ihåg att vi såg tidigare att varje $z \in \mathbb{C}$ kan representeras som $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ för $\theta \in \arg(z)$. Enligt definitionen av $e^{i\theta}$ så får vi att $z = |z|e^{i\theta}$ för $\theta \in \arg(z)$. Det är denna representation som brukar kallas för **polär form**. $\square$

Det är lätt att verifiera att exponentialfunktionen uppfyller följande egenskaper:

1. $e^z/e^w = e^{z-w}$
2. $e^z = 1$ om och endast om $z = 2\pi ki$ för $k \in \mathbb{Z}$.
3. $e^z = e^w$ om och endast om $z = w + 2\pi ki$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Observera att egenskap (3) säger att den komplexa exponentialfunktionen inte är injektiv, däremot är den injektiv på varje boll med radie π :

INLÄMNINGSUPPGIFT 26. Visa att e^z är injektiv på $B(z, \pi)$ där $z \in \mathbb{C}$.

Kom ihåg Eulers formler, dvs för $y \in \mathbb{R}$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Dessa följer direkt från definitionen av e^{iy} , ty man gör lämpliga linjärkombinationer av e^{iy} och e^{-iy} . Detta föreslår definitionen av de komplexa trigonometriska funktionerna.

Definition 1.39. För varje $z \in \mathbb{C}$ så definierar vi

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Det är lätt att se att de vanliga trigonometriska formlerna gäller:

1. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
2. $\sin(-z) = -\sin z$
3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
4. $\cos(-z) = \cos z$
5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
6. $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$
7. $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
8. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
9. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Vi har också följande lemma:

Lemma 1.40. $\sin z = 0$ om och endast om $z = k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Om $z = k\pi$ så är det klart att $\sin z = 0$. Omvänt, antag att $\sin z = 0$, dvs att

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0.$$

Detta betyder att $e^{iz} = e^{-iz}$. Nu ger egenskap (3) för den komplexa exponentialfunktionen att

$$iz = -iz + 2\pi ki.$$

Flytta över $-iz$ och dela med $2i$ så får vi $z = k\pi$, vilket avslutar beviset. $\square$

Ni kan därefter strunta i att läsa om de hyperboliska funktionerna $\sinh z$ och $\cosh z$.

Det är dax att ge oss på den komplexa logaritmen. Den komplexa logaritmen definierar vi som den inversa funktionen till den komplexa exponentialen, dvs

$$w = \log z \text{ om } z = e^w \quad z \neq 0.$$

Eftersom e^z är periodisk så kommer även logaritmen bygga på argumentet:

$$\log z := \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

där $\ln$ är den reella logaritmen. Om vi nu väljer att restringera oss till en gren av argumentet, t.ex. principalgrenen, så kommer logaritmen självklart påverkas av detta. I detta fall så får vi

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

där det versala L:et är i analogi med A:et i $\operatorname{Arg} z$. Vi har följande egenskaper för den komplexa logaritmen:

1. Om $z \neq 0$ så är $z = e^{\log z}$.
2. $\log e^z = z + 2k\pi i$ för $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\log(zw) = \log z + \log w$.
4. $\log(z/w) = \log z - \log w$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 27. Låt $f(z) = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$. Visa att f inte är kontinuerlig på $B(0, 1)$.

Uppgiften säger alltså att den komplexa logaritmen är diskontinuerlig med period 2π .

Anmärkning 16. Låt oss nu diskutera bokens terminologi angående flervärda funktioner. Observera att en funktion per definition är envärd, men vad menar de då med en flervärd funktion. En funktion $f: M \rightarrow N$, där M, N är mängder, kallas **flervärd** om för alla $p \in M$ så är $f(p)$ en delmängd till N . Vi ser alltså $f: M \rightarrow N$ som en flervärd funktion om $f: M \rightarrow \mathcal{P}(N)$ där $\mathcal{P}(N)$ är potensmängden.

Nu när vi har koll på flervärda funktioner så är det dags att få koll på koll på grenar. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$, vara en flervärd funktion. En **gren** av f är en funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ som är kontinuerlig i Ω och så att för varje $z \in \Omega$ är $F(z) \in f(z)$. Alltså är en gren av en flervärd funktion ett kontinuerligt val av funktionsvärden så att funktionsvärdet i en viss punkt är ett av den flervärda funktionens värden. $\square$

Vi ska återkomma till val av grenar för logaritmen. Det visar sig att logaritmen uppförs sig väldigt bra när man väl har valt en gren, men mer om detta senare.

Kom ihåg att för varje nollskilt reellt tal x så kan vi definiera x^y , där $y \in \mathbb{R}$, som $e^{y \ln x}$. Vi följer denna linje då vi höjer upp ett komplext tal med ett komplext tal:

Definition 1.41. Om $\alpha, z \in \mathbb{C}$ och $z \neq 0$ så definierar vi z^α genom

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}.$$

Eftersom logaritmen beror på vilken gren vi väljer så kommer även komplexa potenser bero på vilken gren vi väljer. Observera att

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i)} = e^{\alpha(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} e^{\alpha 2k\pi i},$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Då kommer värdena för z^α vara lika, om vi väljer $k = k_1$ och $k = k_2 \neq k_1$, om

$$e^{\alpha 2k_1\pi i} = e^{\alpha 2k_2\pi i}.$$

Men enligt egenskaperna för den komplexa exponentialfunktionen så gäller detta om och endast om

$$\alpha 2k_1\pi i = \alpha 2k_2\pi i + 2n\pi i,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Löser vi ekvationen så får vi att

$$\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}.$$

Vi sammanfattar konsekvenserna av denna uträkning i några punkter.

1. Om $\alpha \in \mathbb{Q}$ så antar z^α endast ett ändligt antal värden.
2. Om $\alpha \in \mathbb{Z}$ så kommer z^α endast anta ett värde.
3. Annars så antar z^α oändligt många värden.

INLÄMNINGSUPPGIFT 28. Är *principalvärdet* till $(z_1 z_2)^\alpha$ lika med produkten av *principalvärdena* $z_1^\alpha z_2^\alpha$? Visa eller motbevisa.

Resten av kapitlet kan ni läsa på egen hand.

Kapitel 2

Läsanvisningar till kapitel 2

Differentierbarhet, deriverbarhet och holomorficitet

I detta avsnitt så kommer vi börja våran studie av funktioner definierade på en delmängd till det komplexa talplanet. I förra kapitlet så började vi studera kontinuerliga funktioner, både abstrakt definierade på metriska rum och mer konkret på $\mathbb{C}$. Här tar vi steget och börjar talar om deriverbarhet.

Definition 2.1. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $w \in \Omega$ vara en fixerad punkt. Om det finns ett komplext tal, som vi skriver som $f'(w)$, så att

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f'(w)$$

så säger vi att f är **deriverbar i punkten** w . Ibland så skriver vi detta som $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=w}$. En funktion som är deriverbar i alla punkter $w \in \Omega$ kallar vi för en **deriverbar funktion**.

Anmärkning 17. Boken kallar en deriverbar funktion för en holomorf funktion. Vi ska definiera holomorfa funktioner på ett litet annat sätt senare. $\square$

Observation 2. Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

i definitionen ovan. Låt $z = w + h$ varvid $z \rightarrow w$ betyder att $h \rightarrow 0$, så deriverbarhet i punkten w kan skrivas ekvivalent som

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w + h) - f(w)}{h}.$$

Här är det viktigt att inse att även h är ett komplext tal, så det finns många sätt för h att gå mot noll. $\square$

Säg att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är en funktion. Eftersom vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ så kan vi skriva om f som en funktion från Ω som delmängd till $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{C}$. Hur går detta till? Jo, om $z = x + iy$ så definierar vi $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$, som vi kallar **realdelen** respektive **imaginärdelen** för z . Observera att

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{och} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Detta tillvägagångssätt kan vi använda oss för vilken funktion som helst. Definiera

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{och} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)),$$

varvid $f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 29. Visa eller motbevisa att $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ och $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 30.

- a) Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara komplexlinjär och låt $u = \operatorname{Re} f$. Visa att u är reell-linjär och att $f(z) = u(z) - iu(iz)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.
- b) Låt $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ vara reell-linjär och låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = u(z) - iu(iz)$. Visa att f är komplexlinjär. Vidare, visa att $\sup_{|z|=1} |u(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Anmärkning 18. Blanda inte ihop imaginärdelen för funktionen f och bilden för funktionen f , vi skriver båda som $\operatorname{Im}(f)$. Jag hoppas att detta inte ska röra ihop det för er, utan att det ska framgå från sammanhanget vilket Im jag menar. $\square$

Observera att grafen till $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, som man brukar beteckna med $\Gamma(f)$, är ett 4-dimensionellt reellt vektorrum.

Anmärkning 19. Grafen definieras genom

$$\Gamma(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(z) = w\}.$$

$\square$

Exempel 27. Låt oss uttrycka funktionen $f(z) = e^{3z}$ på formen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. För att göra detta, låt $z = x + iy$. Då är

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) = f(x, y) = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) = \\ &= e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y. \end{aligned}$$

Sätt $u(x, y) = e^{3x} \cos 3y$ och $v(x, y) = e^{3x} \sin 3y$, varvid $f = u + iv$. $\square$

Exempel 28. Låt $z = x + iy$ och betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$. Vi ska skriva f i termer av z och $\bar{z}$. För att göra detta så börjar vi att komma ihåg att

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

och

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Då får vi att

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right) - 2 + i\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right) = \dots \\ &\dots = |z|^2 + i\bar{z} - 2, \end{aligned}$$

så $f(x, y) = f(z) = |z|^2 + i\bar{z} - 2$. $\square$

Detta exempel ger oss en väg från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{C}$, och det är ett mycket mer ”komplext” vis att skriva funktioner i termer av z och $\bar{z}$, dvs se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som en funktion i z och $\bar{z}$. Eftersom vi håller på med komplex analys så tycker jag att det är bättre att få en komplex syn på det hela.

Antag nu att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är en deriverbar funktion. Skriv $f = u + iv$. Vi ska nu utreda vad deriverbarheten säger om u och v som är funktioner $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(w) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(w+h) + iv(w+h) - u(w) - iv(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(w+h) - u(w)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(w+h) - v(w)}{h} = u'(w) + iv'(w) \end{aligned}$$

Alltså måste även funktionerna u och v vara deriverbara. Det omvända gäller inte, som vi ska se snart.

Exempel 29. Betrakta funktionen $f(z) = f(x + iy) = x$. Vi har, för $w = u + iv$, att

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{x - u}{(x - u) + i(y - v)}.$$

Låt nu $z \rightarrow w$. Om vi går längs linjen $y = v$ så kommer gränsvärdet vara lika med 1, och om vi går längs linjen $x = u$ så är gränsvärdet lika med 0. Eftersom gränsvärden är unika så kan inte differenskvoten ovan inte existera då $z \rightarrow w$. Detta betyder att även fast funktionen f är deriverbar med avseende på $x \in \mathbb{R}$ så behöver det inte vara det med avseende på $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Exempel 30. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = \bar{z}$. Boken säger att denna funktion inte är deriverbar i origo, men vi ska visa att den inte är deriverbar någonstans (det är faktiskt samma bevis som står i boken). Låt $w \in \mathbb{C}$ vara godtycklig men fix. Då gäller att

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{\overline{w+h} - \bar{w}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Sätt $h = h_1 + ih_2$, och låt h gå mot noll längs realaxeln, dvs då $h_2 = 0$. Då är $\frac{h_1}{h_1} \rightarrow 1$. Låter vi istället h gå mot noll längs imaginäraxeln så får vi att $\frac{-ih_2}{ih_2} \rightarrow -1$. Eftersom gränsvärdena är unika så följer det att differenskvoten inte existerar då $h \rightarrow 0$, så f är inte deriverbar i någon punkt $w \in \mathbb{C}$. $\square$

Detta exempel ger en antydning till att för att vara en deriverbar komplexvärd funktion så får inte funktionen innehålla något $\bar{z}$. Detta är också fallet, men vi ska återkomma till detta snart.

Exempel 31. Betrakta nu funktionen $f(z) = z^n$ för $n \geq 0$. Vi ska se att denna funktion är deriverbar för alla n , och dess derivata är nz^{n-1} . Låt oss börja med $n = 0$, dvs då funktionen är konstant 1. Då är, för ett godtyckligt, men fixt, $w \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0,$$

så $f(z) \equiv 1$ är deriverbar med derivata noll. Låt nu $n = 1$. Låt $w \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt och fixerat. Då är

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{w+h-w}{h} = 1,$$

som visar att $f(z) = z$ är deriverbar med derivata lika med 1. Låt nu $n > 1$ vara godtyckligt. Då gäller, enligt binomialsatsen, att

$$\begin{aligned} \frac{(w+h)^n - w^n}{h} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^k - w^n}{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^k}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^{k-1}. \end{aligned}$$

Låt nu $h \rightarrow 0$ varvid vi ser att det ovanstående går mot $\binom{n}{1} w^{n-1} = nw^{n-1}$. $\square$

Det ovanstående exemplet visar att vi kan derivera monom som vanligt, vi kommer snart se att de gamla vanliga deriveringsreglerna gäller.

Exempel 32. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(x+iy) = x + i4y$. Då gäller att

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{h_1 + i4h_2}{h_1 + ih_2}.$$

Låt nu $h \rightarrow 0$ längs realaxeln, dvs då $h_2 = 0$. Då går differenskvoten mot 1. Om vi låter $h \rightarrow 0$ längs imaginäraxeln, dvs då $h_1 = 0$ så går differenskvoten mot 4. Eftersom differenskvoten går mot olika värden så följer det att f inte är deriverbar i någon punkt. Om vi skriver om funktionen i z och $\bar{z}$ så får vi att

$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} + 4i \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \frac{5z - 3\bar{z}}{2}.$$

Alltså innehåller funktionen ett $\bar{z}$, så det ska inte vara förvånande att f inte är deriverbar. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 31. Visa att funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$ är deriverbar endast i origo.

INLÄMNINGSUPPGIFT 32. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Om f och $\bar{f}$ är deriverbar i en punkt $w \in \Omega$, visa att då är $f'(w) = 0$.

Innan vi går vidare så tänkte jag dra en definition till.

Definition 2.2. Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Vi säger att f är en $\mathcal{C}^k$ -funktion, $k \in \mathbb{N}$ fixt, om alla dess k stycken partiella derivator existerar och är kontinuerliga. Vi skriver detta som $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Anmärkning 20. Vi definierar $\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(U)$, och säger att $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ är **slät** på U , eller bara $\mathcal{C}^\infty$ på U . $\square$

Så hur gör man då för en funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, där $U \subset \mathbb{C}$ är öppen. Jo, vi säger att $f \in \mathcal{C}^k(U)$ om $u, v \in \mathcal{C}^k(U)$, där $f = u + iv$.

Anmärkning 21. Det mest fascinerande, som vi kommer se senare, är att varje deriverbar funktion är faktiskt till och med $\mathcal{C}^\infty$. Jämför detta mot det reella fallet, där en deriverbar funktion inte ens behöver ha en kontinuerlig derivata eller vara deriverbar två gånger, exempelvis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad genom $f(x) = x^{3/2}$ är deriverbar i $x = 0$ men $f'(x) = 3/2x^{1/2}$ är inte deriverbar i $x = 0$. $\square$

Antag att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar i punkten $w \in \Omega$. Definiera

$$R(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w).$$

Eftersom f är deriverbar i w så följer det omgående att $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$. Omvänt, om $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$ så är det klart att f är deriverbar i w . Alltså är f deriverbar i w om och endast om $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$. Vidare så är det inte så svårt att se $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$ är ekvivalent med $f(z) - f(w) = f'(w)(z - w) + \rho(z)$ och $\lim_{z \rightarrow w} \frac{\rho(z)}{|z - w|} = 0$. Detta säger att funktionen $z - w \mapsto f(z) - f(w)$ kan approximeras med den linjära funktionen $z - w \mapsto f'(w)(z - w)$, och felet vi får går mot noll även då vi delar med $|z - w|$, dvs att felet går mot noll snabbare än vad $|z - w|$ gör.

Låt oss nu se att de derivatan är linjär och att deriveringsreglerna från den reella analysen gäller även i det komplexa fallet.

Proposition 2.3. Låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara funktioner på en öppen mängd Ω och låt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Då gäller att

1. $\alpha f + \beta g$ är deriverbar med derivata $\alpha f' + \beta g'$.

2. fg är deriverbar med derivata $f'g + fg'$.

3. Om $g \neq 0$ så är f/g deriverbar med derivata $(f'g - fg')/g^2$.

Bevis. (1): Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(w+h) - (\alpha f + \beta g)(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(f(w+h) - f(w)) + \beta(g(w+h) - g(w))}{h} = \alpha f'(w) + \beta g'(w). \end{aligned}$$

(2): Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{fg(w+h) - fg(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h)g(w+h) - f(w)g(w+h) + f(w)g(w+h) - f(w)g(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w+h)(f(w+h) - f(w))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w)(g(w+h) - g(w))}{h} = f'(w)g(w) + f(w)g'(w). \end{aligned}$$

Sista likheten följer från att g är deriverbar, så den är kontinuerlig, dvs att $\lim_{h \rightarrow 0} g(w+h) = g(w)$.

(3): Låt nu $g \neq 0$. Betrakta f/g , som helt enkelt är f multiplicerat med $1/g$. Det följer från (2) att

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'(1/g) + f(1/g)'$$

Vi måste därför hitta derivatan för $1/g$. Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/g)(w+h) - (1/g)(w)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w) - g(w+h)}{hg(w+h)g(w)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(w+h)g(w)} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \frac{-1}{(g(w))^2} g'(w), \end{aligned}$$

ty g är kontinuerlig. Det följer direkt att

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

Det följer från ovanstående sats och exempel 31 att alla polynom är deriverbara. Vidare så följer det från exempel 30 att ingen funktion på formen $\bar{z}^k z^m$ för alla $k \geq 1, m \geq 0$ är deriverbar.

Proposition 2.4. (Kedjeregeln)

Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara funktioner på öppna mängder $U, V \subset \mathbb{C}$ så att $f(U) \subset V$. Då är $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ deriverbar och

$$(g \circ f)'(w) = g'(f(w))f'(w).$$

Bevis. Låt $w_0 = f(z_0)$ och definiera för $w \in V$,

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0) & \text{om } w \neq w_0 \\ 0 & \text{om } w = w_0 \end{cases}.$$

Då är h kontinuerlig, ty g är deriverbar så även kontinuerlig. Eftersom sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig så gäller att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = h(w_0) = 0,$$

ty $w_0 = f(z_0)$. Låt nu $w = f(z)$ varvid

$$(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot (f(z) - f(z_0)).$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(f(z)) + g'(w_0)}{1} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 + g'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

□

Exempel 33. Betrakta funktionen $f(z) = (3z + i)^{100}$. Då är enligt kedjeregeln $f'(z) = 100(3z + i)^{99} \cdot 3$. □

Vi ska nu göra en karakterisering av deriverbarhet i termer av de reell-värda funktionerna u och v , om vi delar upp f i $u + iv$. Så antag att $f = u + iv$ är deriverbar i $w = x + iy$. Då gäller att

$$f'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

där h kan gå mot noll hur det vill. Säg att den går mot noll längs realaxeln, dvs om vi låter $h = h_1 + ih_2$ så är $h_2 = 0$. Då är

$$\begin{aligned} f'(w) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h_1, y) + iv(x+h_1, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h_1} = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=w} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=w}. \end{aligned}$$

Låter vi nu h gå mot noll längs imaginäraxeln så är $h_1 = 0$, dvs $h = ih_2$. Gör vi samma uträkning som ovan så får vi att

$$f'(w) = -i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=w} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=w}.$$

Eftersom gränsvärdena är unika så måste dessa ekvationer vara lika. Jämför nu real och imaginär varvid man ser att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dessa ekvationer i termer av partiella derivator av u och v brukar kallas för **Cauchy-Riemanns ekvationer**. Vi har visat följande:

Sats 2.5. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen, vara en funktion. Om $f = u + iv$ är deriverbar på Ω så är Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda på Ω .

Men hur är det med omvändningen. Om $f = u + iv$ uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer, kommer då f vara deriverbar. Följande sats svarar bitvis på denna fråga.

Sats 2.6. Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Om $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, och om f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer då är f deriverbar på Ω .

Bevis. Se boken för ett bevis. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 33. Analysera beviset för Sats 2.6. Kolla speciellt på när villkoret att $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ kommer in. Kan man konstruera en funktion $f = u + iv$ där u, v är deriverbara så att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda, men så att f inte är deriverbar? Utred. Visa eller motbevisa.

Följd 2.7. Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Då är f deriverbar om och endast om u, v är $\mathcal{C}^1(\Omega)$ och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

Exempel 34. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = z^2$. Vi vet sedan tidigare att denna är deriverbar, men låt oss se att den uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Vi har, om vi skriver om $z = x + iy$, att

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy := u(x, y) + iv(x, y).$$

Detta betyder att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så Cauchy-Riemanns ekvationer är verkligen uppfyllda. □

Exempel 35. Låt $z = x + iy$, och betrakta $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom $f(z) = x^2 + y + i(y^2 - x) := u(x, y) + iv(x, y)$. Det är klart att u, v är båda $\mathcal{C}^1$. Vidare så gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så Cauchy-Riemanns ekvationer är inte uppfyllda överallt, utan endast på linjen $y = x$. Men mängden $\{(x, y) : y = x\}$ innehåller ingen disk, så f är inte deriverbar någonstans. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 34. Låt $f = u + iv$. Då vet vi hur Cauchy-Riemanns ekvationer se ut, åtminstone i rektangulära koordinater. Visa att Cauchy-Riemanns ekvationer är ekvivalent med att säga att

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

i polära koordinater.

Vi ska nu visa satsen i boken som säger att om derivatan är identiskt noll för en funktion så är funktionen konstant. Bokens bevis bygger egentligen på en sats från den reella analysen, så vi har valt att bevisa satsen med mer komplexa metoder. Lägg märke till bevismetoden för satsens bevis, som är ofta vanlig; man visar en sak lokalt först (i en boll), och därefter använder man detta för att visa det generella resultatet.

Sats 2.8. Antag att $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, där $D \subset \mathbb{C}$ är ett område, är deriverbar och att $f' \equiv 0$ på D , då är f konstant på D .

Bevis. Låt $B(a, r)$ vara en boll kring $a \in D$ med radie r . Då ligger denna boll helt inne i D , eftersom D är öppen, och kom ihåg att en boll är sammanhängande. Tag nu en godtycklig punkt $b \in B(a, r)$. Om vi visar att $f(a) = f(b)$ så kommer detta betyda att f är konstant. Eftersom $B(a, r)$ är sammanhängande så kan vi hitta en kurva mellan a och b , som bara består av vertikala och horisontella linjer, som ligger helt inne i $B(a, r)$. Om det finns en hörnpunkt, kalla denna c . Då är $c = a + h$ och $b = c + ik$ för några $h, k \in \mathbb{R}$. Vi kan anta att $h \geq 0$, eftersom annars är det bara att byta roll på a och c . Sätt

$$g(x) = f(a + x).$$

Detta är en funktion i en reell variabel och är definierad i en omgivning av $[0, h]$. För $x \in [0, h]$ betrakta

$$g'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(a + y) - f(a + x)}{y - x} = f'(a + x) = 0,$$

eftersom $f \in \mathcal{O}(B(a, r))$ och $f' \equiv 0$ på $B(a, r)$. Alltså är g konstant på $[0, h]$, eftersom g är reell. Detta ger att

$$f(c) = g(h) = g(0) = f(a).$$

På samma sätt så får vi att $f(b) = f(c)$ så $f(a) = f(b)$, vilket ger att f är konstant på $B(a, r)$.

Låt oss nu betrakta vårt område D . Fixera ett $a \in D$ och tag en godtycklig $b \in D$. Eftersom D är sammanhängande så kan vi hitta en kurva γ mellan a och b . Välj nu, för varje $p \in \gamma$, en boll $B(p, r)$ som ligger helt inne i D . Detta är förståeligt eftersom D är öppen. Observera att alla dessa bollar kommer att täcka γ , och eftersom $\text{Im}(\gamma)$ är kompakt (γ är ju kontinuerlig och definierad på ett kompakt intervall) så kan vi välja ut ett ändligt antal av dessa bollar. Enligt vårt lokala resultat för en boll så kommer f vara konstant på alla dessa bollar. Eftersom vi har ett ändligt antal bollar så kommer f vara konstant på hela γ . På grund av att b var godtyckligt vald, så drar vi slutsatsen att f är konstant på hela D . $\square$

Villkoret med en sammanhängande mängd är viktigt i satsen ovan. För t.ex. om f är konstant 0 på en öppen mängd A och 1 på en annan öppen mängd B , och A och B är disjunkta, så är $f' \equiv 0$ på $A \cup B$ men $f(a) \neq f(b)$ för alla $a \in A$ och $b \in B$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 35. Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett område och låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara. Visa att om $f' = g'$ så är $f - g$ konstant.

INLÄMNINGSUPPGIFT 36. Antag att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω ett område i $\mathbb{C}$, är deriverbar. Antag vidare att $|f(z)|$ är konstant på Ω . Visa att f är konstant på Ω .

Resten av avsnitt 2.1 kan ni läsa själva. Märk väl att det är OK att derivera innanför summationstecknet så länge hela serien definierar en deriverbar funktion. Observera också att determinanten av Jacobianen för en deriverbar funktion alltid är lika med beloppet av derivatan i kvadrat, dvs $|J(f)| = |f'|^2 \geq 0$.

Integration, Green-Gauss integralsats, Cauchys integralsats och Cauchys integralformel

Integration definieras genom Riemannsummor, dvs via över- och undersummor. Detta är ni välbekanta med, så jag ska inte plåga er med det. Däremot så ska jag dra en annan definition av integral. Låt $f = u + iv$ vara en kontinuerlig

funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, där u och v är kontinuerliga funktioner på $[a, b]$. Vi definierar **integralen** över $[a, b]$ genom

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Detta ligger i grund för definitionen av kurvintegraler, men först tänkte jag dra lite mer terminologi och egenskaper för kurvor.

Definition 2.9. En kurva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kallas för en **styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva** om det finns en ändlig partition

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$$

så att för varje $j = 0, 1, \dots, n-1$ gäller att

$$\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]} \in \mathcal{C}^1([a_j, a_{j+1}]).$$

Exempel 36. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + (1 - 8t)i & 0 \leq t \leq 1/4 \\ (3 - 8t) - i & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ -1 + (5 - 8t)i & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ -(7 - 8t) + i & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Detta är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva på $[0, 1]$. Om ni ritar en bild av denna kurva så ser ni att det är en kvadrat med hörn i $(1 + i)$, $(-1 + i)$, $(-1 - i)$ och $(1 - i)$. $\square$

Om vi definierar summan av två kurvor $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ och $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ genom

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & , t \in]b, c] \end{cases}$$

så ser vi att om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, så är

$$\gamma = \gamma|_{[a_0, a_1]} + \dots + \gamma|_{[a_{n-1}, a_n]}.$$

Kan man lägga ihop kurvor så kan man förstås dra ifrån kurvor, och en negativ kurva är inget annat än samma kurva fast åt motsatt håll, dvs om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en kurva så definierar vi $(-\gamma): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ genom

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

som genomlöper samma punkter fast i omvänd ordning.

Något som är viktigt men väldigt enkelt och intuitivt är Jordans kurvsats som ger oss en orientering av kurvor. Jordans kurvsats säger att en sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}$ delar planet i två områden, nämligen i det inre och det yttre. Om

det inre är till vänster då man rör sig längs en kurva så säger vi att kurvan är **positivt orienterad**, annars så är den **negativt orienterad**.

Slutligen så kan man mäta längden av en kurva, som borde inte vara förvånande för någon. Det är nämligen precis samma sak som ni har lärt er under tidigare analyskurser. Längden av en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ges av

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

En viktig egenskap hos längdfunktionen är att den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ . (Längdfunktionen är alltså invariant definierad!) Låt oss visa detta.

Proposition 2.10. *Låt $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en parametrisering av en kurva, och låt $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ vara en strikt växande funktion så att $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$. Då är $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)): [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ en annan parametrisering av samma kurva som γ_1 och*

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2).$$

Bevis.

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_2'(t)| dt = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)| dt$$

enligt kedjeregeln. Eftersom φ är växande så är $\varphi'(t) > 0$, vilket ger att

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt.$$

Gör nu variabelsubstitutionen $s = \varphi(t)$, så $ds = \varphi'(t)dt$. Då blir de nya integrationsgränserna $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$, så

$$l(\gamma_2) = \int_a^b |\gamma_1'(s)| ds = l(\gamma_1).$$

□

Exempel 37. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^1 |2\pi i e^{2\pi it}| dt = 2\pi \int_0^1 1 dt = 2\pi.$$

□

Låt oss göra en annan parametrisering av enhetscirkeln:

Exempel 38. Låt $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Så längden av en kurva är oberoende av parametrisering, som propositionen ovan visade. □

Definition 2.11. Antag att $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion definierad på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva med $\gamma([a, b]) \subset U$. Då definierar vi **integralen** av f längs med γ genom

$$\int_{\gamma} f = \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

där $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ är partitionen av $[a, b]$ från definitionen av en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva.

Anmärkning 22. Man använder ibland beteckningen $\oint$ för att säga att det är en kurvintegral. $\square$

Denna definition visar sig vara ”vettig”, eftersom den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ . Jag lämnar detta som en övningsuppgift (jämför Proposition 2.10).

INLÄMNINGSUPPGIFT 37. Visa att definitionen av integralen av f längs γ inte beror på val av parametrisering av γ , dvs om $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ är en strikt växande funktion och $\tau = \gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ är en annan parametrisering av γ så är

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tau} f.$$

Exempel 39. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Om i deriverar γ så får vi $\gamma'(t) = ie^{it}$. Då blir, enligt definition,

$$\oint_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$\square$

Nu till ett exempel som är väldigt viktigt, som speciellt kommer vara viktigt för oss senare.

Exempel 40. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$, så

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt.$$

Vi får då två fall:

Fall 1: ($n \neq -1$)

Då är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1} (e^{(n+1)i2\pi} - e^0) = 0.$$

Fall 2: ($n = -1$)

Då är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Alltså är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1. \end{cases}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 38. Låt $z_0 \in \mathbb{C}$ och $c > 0$ vara fixerade. Låt $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kurvan parametriserad genom

$$\gamma(t) = z_0 + itc.$$

För $x \geq 0$ låt $\alpha = z_0 + x$ och $\beta = z_0 - x$. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) dz.$$

Om $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, så definierar man att integralen över γ att vara samma sak som att integrera över de olika delarna och lägga ihop delresultaten, dvs

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Speciellt betyder detta att om vi vill beräkna integralen över en kurva γ som vi genomlöper n gånger, så blir

$$\int_{n \cdot \gamma} f = n \int_{\gamma} f ,$$

där $n \cdot \gamma$ är kurvan γ som genomlöps n gånger.

Anmärkning 23. Om vi vill beräkna $\oint_{(-\gamma)} f$ så är detta samma sak som att beräkna $-\oint_{\gamma} f$. □

Två olikheter som är användbara lite då och då är

$$\left| \int f dz \right| \leq \int |f| dz$$

och $|f(z)| \leq M$ för alla z så är $\int |f| dz \leq \int M$. Vi ska nu använda dessa olikheter för att visa följande välkända sats:

Sats 2.12. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en kontinuerlig funktion, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva på $[a, b]$. Antag att det existerar en konstant $M \geq 0$ så att $|f(z)| \leq M$ för alla z på γ . Då gäller

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot l(\gamma) , \end{aligned}$$

så

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

□

Följd 2.13. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kontinuerlig funktion på den öppna $U \subset \mathbb{C}$, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då gäller

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma(t)} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Exempel 41. Låt oss visa att $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$ då γ är övre halvan av enhetscirkeln. Vi ska använda oss av Sats 2.12. Vi börjar beräkna längden av γ :

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

Därefter så måste vi hitta en övre gräns för $\frac{e^z}{z}$ på γ . z på γ kan skrivas som $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, så

$$\left| \frac{e^z}{z} \right| = \left| \frac{e^{\cos t + i \sin t}}{e^{it}} \right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \leq e ,$$

eftersom $0 \leq \cos t \leq 1$. Så om vi sätter $M = e$ så får vi att

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq M \cdot l(\gamma) = \pi e.$$

□

Exempel 42. Låt γ vara linjesegmentet från 0 till $1+i$, som kan definieras genom $\gamma(t) = (1+i)t$ för $t \in [0, 1]$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^1 |1+i| dt = \sqrt{2}.$$

Vidare, på γ så gäller att $|z^2| = |z|^2 \leq |1+i|^2 = 2$. Detta ger att

$$\left| \int_{\gamma} z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2}.$$

□

Exempel 43. Låt γ vara cirkeln $|z| = R$ för $R > 1$. Låt $m \geq 1$ och $n \geq 0$. Vi har att

$$|z|^n = R^n$$

på γ samt att

$$|z^m - 1| \geq |z^m| - 1 = R^m - 1$$

på γ . Detta ger att

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^m - 1} dz \right| \leq \frac{2\pi R^{n+1}}{R^m - 1}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 39. Visa att

a) Om γ är cirkeln $|z| = 3$, så är

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - i} \right| \leq \frac{3\pi}{4}.$$

b) Om $\gamma = R + 2\pi it$, $0 \leq t \leq 1$, $R > 0$, så är

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^{3z} dz}{1 + e^z} \right| \leq \frac{2\pi e^{3R}}{e^R - 1}.$$

c) Om $\gamma = it$, $0 \leq t \leq 1$, så är

$$\left| \int_{\gamma} e^{\sin z} dz \right| \leq 1.$$

d) Om $R \neq |a|$ så gäller att

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{(z+a)(z-a)} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

Nu är det dax för en höjdpunkt, nämligen en variant av Integralkalkylens huvudsats:

Sats 2.14. Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är en öppen mängd och att $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva så att $\gamma([a, b]) \subset U$. Om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar så gäller att

$$\oint_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bevis. Det är tillräckligt att visa satsen för en del av kurvan γ , så vi antar att γ är en $\mathcal{C}^1$ -kurva. Vi börjar med att observera att $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en $\mathcal{C}^1$ -funktion. Låt $f \circ \gamma = u + iv$. Då ger kedjeregeln att

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_z &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b u'(t)dt + i \int_a^b v'(t)dt = \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = u(b) + iv(b) - (u(a) + iv(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Låt oss kolla på ett lätt exempel på denna sats.

Exempel 44. Låt γ vara enhetscirkeln e^{it} , $0 \leq t \leq 2\pi$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$. Om $f(z) = \frac{z}{2}$ så är $f'(z) = \frac{1}{2}$. Låt oss kolla på höger respektive vänsterledet i satsen:

$$VL = \oint_{\gamma} f'(z)dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}ie^{it}dt = i \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{2}[e^{2it}]_0^{2\pi} = 0.$$

$$HL = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i})^2 - \frac{1}{2}(e^0)^2 = 0,$$

så $\oint_{\gamma} z dz = 0$, men det visste vi redan.

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 40. Låt $f \in \mathcal{C}^1(B(0, 1))$ vara sådan att $|f'(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0, 1)$. Visa att

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$$

för alla $z_1, z_2 \in B(0, 1)$.

Vi kan nu ge ytterligare ett bevis av att Sats 2.8.

Följd 2.15. Antag att U är ett område i $\mathbb{C}$ och antag att $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar med $f'(z) \equiv 0$ på U . Då är f konstant på U .

Bevis. Få en $z_0 \in U$. För $z \in U$ så finns det en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ så att $\gamma(0) = z_0$ och $\gamma(1) = z$ (Varför?). Då ger föregående sats att

$$f(z_0) - f(z) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1)) = \oint_{\gamma} f'(z)dz = \oint_{\gamma} 0dz = 0,$$

så $f(z_0) = f(z)$. Men eftersom z var godtycklig så är f konstant.

□

Låt oss nu diskutera Green-Gauss Integralsats ett tag. Sätt

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}.$$

Observera att detta är en öppen mängd. Om ni ritar en bild över denna mängd så ser ni att det är en rektangel utan sidor, en så kallad öppen rektangel. Låt $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, dvs f är kontinuerlig på den slutna rektangeln. Betrakta dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} f dx dy.$$

Kom nu ihåg Fubinis sats:

Sats 2.16. (Fubinis sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara en öppen rektangel som ovan, och antag att $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Sats 2.17. (Starkare Fubinis sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

- (a) Om Ω är mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)\}$ så gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- (b) Om Ω är mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) < x < h_2(y), c < y < d\}$ så gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Använder vi nu Fubinis sats och Integralkalkylens huvudssats så får vi Green-Gauss integralsats för rektanglar.

Sats 2.18. (Green-Gauss integralsats för rektanglar)

Antag att Ω är en öppen rektangel och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d f(b, y) dy - \int_c^d f(a, y) dy = \int_c^d f(b, y) dy + \int_d^c f(a, y) dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_a^b f(x, c) dy + \int_a^b f(x, d) dy = - \int_a^b f(x, c) dy - \int_b^a f(x, d) dy.$$

Låt nu $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara en begränsat område. Då är det klart att $\partial\Omega$ utgör en kurva. Vi säger att $\partial\Omega$ är $\mathcal{C}^k$ om kurvan som utgör randen är $\mathcal{C}^k$ för $1 \leq k \leq \infty$. Om rand-kurvan endast är styckvis $\mathcal{C}^k$, så säger vi att randen är styckvis $\mathcal{C}^k$. Om randkurvan är positivt (negativt) orienterad så säger vi att randen är positivt (negativt) orienterad. Denna terminologi gör att vi kan formulera en Green-Gauss sats för mer generella områden:

Sats 2.19. (Green-Gauss integralsats för områden)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f dx.$$

Eftersom randen för en rektangel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ är lika med en kurva som går från (a, c) till (a, d) till (b, d) till (b, c) till (a, c) , så följer Green-Gauss sats för rektanglar direkt från den generella Green-Gauss sat. Gör detaljerna själv. Låt oss nu kolla på en tillämpning av Green-Gauss sats.

Sats 2.20. (Cauchys integralsats)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. Om $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ så gäller att

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

Bevis. Låt $f = u + iv$. Bokens Proposition 22 ger att

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\partial\Omega} (u dx - v dy) + i \int_{\partial\Omega} (v dx + u dy).$$

Green-Gauss sats ger att

$$\int_{\partial\Omega} (u dx - v dy) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \right).$$

Cauchy-Riemanns ekvationer ger att $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ så

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \right) = 0.$$

Använder vi Green-Gauss sats på $\int_{\partial\Omega} (v dx + u dy)$ och därefter Cauchy-Riemanns ekvationer så får vi att även denna integral blir noll, så

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

□

Anmärkning 24. Vi kommer se en starkare formulering av Cauchys integralsats senare, nämligen att f endast behöver vara kontinuerlig upp till randen och $\mathcal{C}^1$ på det inre. $\square$

En följd till Cauchys integralsats är följande proposition:

Proposition 2.21. *Antag att $\text{Ann}(z_0, R_1, R_2)$ är en öppen annulus i $\mathbb{C}$, och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Då gäller att*

$$\int_{|z-z_0|=r} f dz$$

inte beror på valet av r .

Bevis. Se boken. $\square$

Cauchys integralformel är kanske den mest viktiga satsen inom denna kurs. Den säger att vi kan uttrycka en deriverbar funktion som en integral av sig själv. Ett sådant resultat finns inte inom den reella analysen, som kanske gör komplexanalysen så speciell. Här kommer en formulering och ett bevis.

Sats 2.22. (Cauchys integralformel)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller för varje $z \in \Omega$ att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Anmärkning 25. Blanda inte ihop Cauchys integralsats och Cauchys integralformel. $\square$

Anmärkning 26. Cauchys integralformel säger att randvärdena för en deriverbar funktion bestämmer funktionen fullständigt på hela området. $\square$

Bevis. Betrakta integranden $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Denna funktion är inte definierad för $\zeta = z$. Låt för $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\zeta, \varepsilon).$$

Då ger Cauchys integralsats att

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g d\zeta = 0.$$

Observera att $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \{|\zeta - z| = \varepsilon\}$, där $\partial\Omega$ är positivt orienterad och $|\zeta - z| = \varepsilon$ är negativt orienterad. Detta betyder att

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g d\zeta = \int_{\partial\Omega} g d\zeta - \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} g d\zeta.$$

Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\begin{aligned}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \\ &= \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.\end{aligned}$$

Eftersom $f(z)$ inte är en funktion av ζ , så får vi att

$$\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Om vi visar att $\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0$ så är vi klara. Kalla den nya cirkeln för γ_ε . Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Sätt $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$. Då gäller att

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M 2\pi i \varepsilon}{\varepsilon} = M 2\pi.$$

Eftersom $f \in \mathcal{C}^1$, så är den speciellt kontinuerlig, så

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

så satsen följer. □

Anmärkning 27. Delen $\frac{1}{\zeta-z}$ av integranden brukar kallas för **Cauchy-kärnan**. □

Exempel 45. Låt oss beräkna $\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2}$ där γ är kurvan $|z+1|=2$. Vi börjar med att skriva om integranden:

$$\frac{z^2}{4-z^2} = \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}.$$

Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{2-z}$ är $\mathcal{C}^1$ innanför γ , så Cauchys integralformel ger att

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2} dz ,$$

så

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{4-z^2} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2} dz = f(-2)2\pi i = \frac{(-2)^2}{2-(-2)} \cdot 2\pi i = 2\pi i.$$

□

Exempel 46. Betrakta integralen

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z-3)(z+1)(z-1)} dz ,$$

där γ är cirkeln $|z-3|=1$. Då ligger $z=3$ innanför γ men $z=\pm 1$ ligger utanför γ . Detta betyder att $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ är $\mathcal{C}^1$ innanför γ . Nu ger Cauchys integralformel att

$$f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-3} dz.$$

Vi får alltså

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z-3)(z+1)(z-1)} dz = 2\pi i f(3) = \frac{5\pi i}{2}.$$

□

Vi har även en Cauchys integralformel för derivator, men först så måste vi komma ihåg en sats inom analysen:

Sats 2.23. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ ett område med $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att f är $\mathcal{C}^1$ med avseende på y . Då gäller att

$$F(y) = \int_{\partial\Omega} f(x, y) dz$$

är $\mathcal{C}^1$ med avseende på y och

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dz.$$

Sats 2.24. Antag att f beror kontinuerligt på $z \in \mathbb{C}$ och antag att f är deriverbar i $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. Antag vidare att f är $\mathcal{C}^1$ med avseende på ξ och η . Då är

$$f(\zeta) = \int_{\partial\Omega} f(z, \zeta) dz$$

deriverbar i ζ och

$$\frac{df}{d\zeta}(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\zeta}(z, \zeta) dz.$$

Anmärkning 28. Bevisen av dessa satser hittar ni i början av kapitel 4. $\square$

Den ovanstående satsen säger att under gynnsamma omständigheter så kan vi derivera under integraltecknet. Detta ger oss möjligheten att formulera och bevisa Cauchys integralformel för derivator:

Sats 2.25. (Cauchys integralformel för derivator)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller för varje $z \in \Omega$ att

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta ,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Bevis. Vi kan derivera under integraltecknet i Cauchys integralformel, och eftersom

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} = \frac{k! f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

så följer resultatet omedelbart. $\square$

Anmärkning 29. Resultatet ovan säger att varje deriverbar komplex funktion till och med har derivator av alla ordningar. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 41. Beräkna

a)

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-3} dz$$

b)

$$\int_{|z-1|=5/2} \frac{1}{(z-4)(z+1)} dz$$

c)

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^k} d\bar{z}$$

för alla $k \in \mathbb{Z}$

Kapitel 3

Läsanvisningar till kapitel 3

Den moderna vägen till holomorficitet och dess konsekvenser

Vi ska i detta kapitel definiera ett begrepp som kallas holomorficitet, och det kommer visa sig att vara precis samma sak som deriverbarhet. Därefter så ska vi formulera om vissa satser vi visade i förra kapitlet samt visa några kompletterande satser. Vi vill börja med att försöka definiera de komplexa deriveringsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Vad vill man att dessa ska uppfylla? Jo, det är naturligt att de ska uppfylla

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1.$$

Ansätt, för $z = x + iy$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y}.$$

Då gäller att

$$1 = \frac{\partial}{\partial z} z = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = a + ib$$

och

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (x - iy) = a - ib.$$

Dessa ekvationsystem ger $a = 1/2$ och $b = -i/2$. Liknande uträkningar ger att $c = 1/2$ och $d = i/2$. Alltså så definierar vi

Definition 3.1. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion och låt $z = x + yi$. Då definierar vi

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f.$$

Observation 3. Observera att minustecknet hamnar på $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ och inte på $\frac{\partial}{\partial z}$. $\square$

Anmärkning 30. Ni har sett detta sätt att definiera saker tidigare, nämligen när vi definierade e^z . Man definierar ett objekt utifrån vad man vill att de ska uppfylla. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 42. Visa att differentialoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ är båda komplexlinjära, dvs

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial}{\partial z} f + \beta \frac{\partial}{\partial z} g$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ och $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$, och samma sak för $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Vi kan nu definiera holomorficitet på ett nytt sätt.

Definition 3.2. Låt $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen. Vi säger att f är **holomorf** om

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0.$$

Detta betecknar vi med $f \in \mathcal{O}(U)$.

Observation 4. Ett annat sätt att säga att f är holomorf är att den ligger i kärnan till operatoren $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 43. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område och låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Betrakta $f \circ g$ där det är definierat, och utred kedjereglererna:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g),$$

dvs hitta formler för dessa. Förenkla dessa formler då

$$(a) \quad f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$(b) \quad g \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$(c) \quad \bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Som ni ser så bygger holomorficitet på att det inte får finnas något $\bar{z}$ i funktionen. Detta har vi sett tidigare då vi definierade deriverbarhet. Vi kan nu lätt visa att

Sats 3.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Då är följande ekvivalent:

(a) f är holomorf

(b) f är deriverbar

(c) f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

Bevis. Vi har redan sett ekvivalensen mellan (b) och (c) i förra kapitlet. Vi ska nu visa ekvivalensen mellan (c) och (a).

Antag först att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Då gäller att

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

dvs att $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Omvänt om Cauchy-Riemanns ekvationer håller på Ω , så betyder det att

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

så $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

Anmärkning 31. Det är oftast $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ som kallas för Cauchy-Riemanns ekvationer i komplex analys branschen. Då skriver man $\bar{\partial}f = 0$, där $\bar{\partial}$ uttalas d-streck. Ekvationen $\bar{\partial}f = 0$ kallas även för den homogena Cauchy-Riemann ekvationen, ty man kan ha ett högerled som inte är noll utan en annan funktion g . Då kallas ekvationen $\bar{\partial}f = g$ för den inhomogena Cauchy-Riemann ekvationen. □

Följd 3.4. Om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, så är

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Bevis. Eftersom f är holomorf så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f,$$

dvs $\frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial}{\partial y} f$. Vidare så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f$$

så $\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 44. Låt $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ och antag att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Visa att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.5. En funktion som är holomorf på hela $\mathbb{C}$ kallas för en **hel funktion**.

Exempel 47. Exempel på hela funktioner är e^z , $\sin z$, $\cos z$ och alla polynom. $\square$

Exempel 48. Vi ska visa att $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Sätt $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Eftersom $\sin z$ och $\cos z$ är hel så är även $\sin^2 z$ och $\cos^2 z$ hel, vilket ger att $f(z)$ är hel. Derivering ger att

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \cos z \sin z = 0,$$

så eftersom $\mathbb{C}$ är sammanhängande och öppen så betyder det att f är konstant. Eftersom $f(0) = 1$ så betyder det att $f(z) = 1$ för alla z . Alltså är $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. $\square$

Låt oss betrakta Green-Gauss integralsats igen. Vi betraktar alltså ett begränsat område Ω med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. För en snäll funktion f så gäller då att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f dx.$$

Lägger vi till $i/2$ gånger andra ekvationen till halva den första så får vi att

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(dx + idy) = \int_{\partial\Omega} f dz.$$

På samma sätt så kan vi lägga till $-i/2$ till halva den första, varvid man ser att

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(dx - idy) = \int_{\partial\Omega} f d\bar{z}.$$

Observation 5. Man definierar alltså $dz = dx + idy$ och $d\bar{z} = dx - idy$, som är precis tvärtom som vi definierade deriveringsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Anledningen till detta är att man vill att $dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1$ och $d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 1$, och att $dz \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0$ och $d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0$. Mer om hur sådanhära operationer görs kan ni läsa i en differentialgeometri kurs. $\square$

Gå nu igenom bokens framställning av ett annat bevis av Cauchys integralformel. Beviset är en aning tekniskt så koncentrera er på att förstå idéerna bakom beviset. Därefter så kommer en väldigt viktig sats.

Sats 3.6. (Generella Cauchys integralformel) Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. Om $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ så gäller att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta},$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Anmärkning 32. Med konventionen att $dx dx = 0$ och $dy dy = 0$ och att $dx dy = -dy dx$ så blir $d\zeta d\bar{\zeta} = (dx + idy)(dx - idy) = -2i dx dy$. Detta betyder att den generella Cauchys integralformel tar formen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f}{\zeta - z} dx dy,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad. Det är denna framställning boken har. □

Observation 6. Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ så är $\bar{\partial}f = 0$ så vi får tillbaka den gamla hederliga Cauchys integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad. □

Det jag inte har tagit upp i dessa läsanvisningar kan ni läsa själva i boken. Gör sedan följande inlämningsuppgifter:

INLÄMNINGSUPPGIFT 45. Gör uppgift 45 i boken.

INLÄMNINGSUPPGIFT 46. Gör uppgift 47 i boken.

Grenar för logaritmen och potenser

Eftersom boken inte gör någon vidare framställning av grenar och holomorficitet av grenar för logaritmen och potenser, så tänkte jag dra några exempel och satser (utan bevis), och ge några uppgifter på det.

Sats 3.7. $\text{Log } z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0])$ och $\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}$.

och

Sats 3.8. Varje gren av $\log z$ är holomorf.

och

Sats 3.9. *Det finns ingen gren av $\log z$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Exempel 49. Vi ska bestämma ett område där $f(z) = \text{Log}(3z - i)$ är holomorf. Låt $g(z) = 3z - i$. För principalgenen så får inte $g(z) \leq 0$, så vi ska bestämma de punkter där detta händer till att börja med. Låt $z = x + iy$ varvid

$$3x + i3y - i \leq 0$$

betyder att $x \leq 0$ och $y = 1/3$. Så f är holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 1/3\}$. $\square$

Exempel 50. Vi ska finna en gren till $\log(z^2 + 1)$ som är holomorf i $z = 0$ och antar värdet $2\pi i$ där. Låt $f(z) = \log g(z)$ där $g(z) = z^2 + 1$. Det är tillräckligt att hitta en gren av logaritmen som är holomorf i $g(0) = 1$ och antar värdet $2\pi i$ där. Vi vet att varje gren av logaritmen är holomorf. Låt

$$\mathcal{L}_\tau(z) = \ln|z| + i\arg_\tau,$$

där $\arg_\tau$ är grenen $]\tau, \tau + 2\pi]$. Då är $\mathcal{L}_\tau(z)$ en holomorf gren till logaritmen. Vi ska alltså hitta τ så att $\mathcal{L}_\tau(g(z)) = 2\pi i$ i $z = 0$, dvs vi ska lösa ekvationen

$$2\pi i = \ln|1| + i\arg_\tau 1 = i\arg_\tau 1 \iff 2\pi = \arg_\tau 1.$$

Denna har lösning $\tau = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så vi kan t.ex. välja $\tau = \pi$. Alltså är $\mathcal{L}_\tau(g(z))$ en holomorf gren till $f(z)$ som antar värdet $2\pi i$ i $z = 0$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 47. *Betrakta exemplet ovan, och hitta en gren till $\log(z^3 - 2)$ som är holomorf i $z = 0$.*

Exempel 51. Vi ska nu hitta en gren till $(z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$. Vi ska alltså hitta en funktion $w = (z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$ så att $w^2 = z^2 - 1$. Observera att vi inte kan välja principalgrenen, som är

$$e^{1/2 \cdot \text{Log}(z^2 - 1)},$$

ty $z^2 - 1 \leq 0$ betyder att $-1 \leq x \leq 1$ och hela y -axeln. Betrakta istället $z(1 - 1/z^2)^{1/2}$. Den uppfyller att $w^2 = z^2 - 1$. Principalgrenen för denna är

$$e^{1/2 \cdot \text{Log}(1 - 1/z^2)}.$$

Denna är definierad för $x \in [-1, 1]$, ty $1 - 1/z^2 \leq 0$ ska vara uppfyllt. Så funktionen $w = f(z) = z(1 - 1/z^2)^{1/2}$ är en gren till $(z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$. $\square$

Exempel 52. Vi ska bestämma den största öppna mängd Ω så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf. Per definition så ges Ω av de $z \in \mathbb{C}$ så att $1 - z^2 \notin]-\infty, 0]$, så vi ska

börja kolla vilka z som uppfyller att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$. Sätt $z = x + yi$, då får vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2xyi.$$

För att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$ så måste $xy = 0$, vilket ger två fall:

Fall 1: ($x = 0$)

Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 + y^2 \geq 1.$$

Fall 2: ($y = 0$)

Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2,$$

så $1 - x^2 = 0$, vilket betyder att $|x| \geq 1$.

Om vi slår ihop fall 1 och 2 så får vi att den största mängden så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf är

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |x| < 1 \text{ och/eller } y = 0\}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 48. Var är $f(z) = (e^z + 1)^{1/2}$ holomorf? Hitta mängden där f är holomorf.

Kapitel 4

Läsanvisningar till kapitel 4

Taylors sats samt Cauchyuppskattningar och några konsekvenser

Taylorserier är något ni är bekant med sedan era reellanalyskurser. Höjdpunkten i detta avsnitt säger att holomorfa funktioner har en Taylorutveckling. Men låt oss börja lite lugnt.

Om $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en $\mathcal{C}^\infty$ funktion, då har f en formell serieutveckling

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (x-p)^j$$

för fixt $p \in \mathbb{R}$. Det som kanske bör noteras är att det inte är någon garanti att denna serie konvergerar för något x förutom $x = p$. Om serien konvergerar för något $x \neq p$ så kan vi *inte* säga att serien är lika med $f(x)$.

Exempel 53. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Vi har att f är $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med $0 = f'(0) = f''(0) = \dots$. Alltså är Taylorserien av f kring $p = 0$ lika med

$$0 + 0x + 0x^2 + \dots .$$

Denna är konvergent för alla x och summan är identiskt lika med noll. Men $f(x) = 0$ endast om $x = 0$. □

Efter denna utveckling låt oss kasta oss in i Taylors sats.

Sats 4.1. (Taylors sats)

Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ så har f :s Taylorserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

konvergensradie åtminstone R . Vidare så konvergerar Taylorserien mot $f(z)$ för varje $z \in B(z_0, R)$.

Bevis. Vi ska först visa att Taylorserien konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$ om $0 < r < R$. Tag därför ett $r < \rho < R$ och låt γ vara cirkeln runt z_0 med radie ρ , så γ är enkel, sluten, positivt orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då ger Cauchys integralformel att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

om $|z - z_0| \leq r$. Vi ska börja med att skriva om integranden. Vi har att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

och eftersom vi integrerar de ζ som ligger på γ har vi att

$$|z - z_0| \leq r < \rho = |\zeta - z_0|$$

dvs

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Nu kan vi använda oss av en geometrisk serie, dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Detta ger att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Sätt nu $M = \sup_{|z - z_0| \leq r} |f(z)|$. Då är $M < \infty$. Låt

$$f_k(\zeta) = \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta).$$

Då är

$$|f_k(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \leq \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k.$$

Vi har nu skrivit om integranden som

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta).$$

Eftersom $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k$$

en konvergent geometrisk serie. Nu ger Weierstrass M -test att

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)$$

konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, \rho)}$.

Vi får nu att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta$$

eftersom serien konvergerar likformigt. Vidare så får vi att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right)^{k+1} d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) \end{aligned}$$

enligt Cauchys integralformel för derivator. Detta ger att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

□

Anmärkning 33. Beviset för Taylors sats är viktigt, eftersom det innehåller så många delar av kursen. □

Observation 7. Beviset ger att Taylorserien konvergerar på varje sluten boll med mindre radie. Eftersom en sluten boll är kompakt, så konvergerar Taylorserien likformigt på kompakta delmängder till $B(z_0, R)$. □

Anmärkning 34. En Taylorserie kring origo brukar kallas för en **Maclaurinserie**. □

Exempel 54. Låt oss börja kolla på $f(z) = e^z$, och låt oss försöka hitta en Maclaurinserie för f . (Boken definierar e^z i termer av dess Taylorserie, men låt oss se att vi får samma resultat här.) Vi har att $f(0) = 1$, $f^k(0) = 1$ för alla $k \geq 1$, så

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

□

Exempel 55. Låt oss försöka hitta en holomorf funktion f som uppfyller att

$$\frac{df}{dz} = 3if(z)$$

i en omgivning till origo, så att $f(0) = 1$.

Eftersom f är holomorf så måste den ha en Maclaurinserie. Vi har att $f(0) = 1$ och $f'(0) = 3i \cdot f(0) = 3i$. Deriverar vi $\frac{df}{dz} = 3if(z)$ igen så får vi att $f^k(0) = (3i)^k$, så

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3iz)^k}{k!}.$$

Använder vi oss av det ovanstående exemplet så får vi att $f(z) = e^{3iz}$. □

Exempel 56. Låt $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kontinuerlig och definiera

$$F(z) = \int_0^2 e^{zt} g(t) dt.$$

Vi ska visa att F är holomorf och hitta dess Maclaurinserie.

Låt z vara fixt och definiera $h(t) = e^{zt}$ för alla $t \in \mathbb{C}$. Då är h en holomorf funktion i t , så

$$h(t) = e^{zt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k}{k!}$$

konvergerar likformigt på varje slutna disk $B(0, r)$, så konvergensen är speciellt likformig för $t \in [0, 2]$. Eftersom g är begränsad, ty den är definierad på en kompakt, så kan vi multiplicera h med g utan att störa konvergensen. Detta betyder att

$$e^{zt} g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k g(t)}{k!},$$

som konvergerar likformigt för $t \in [0, 2]$ och fixa z . Då får vi att

$$F(z) = \int_0^2 e^{zt} h(t) dt = \int_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k g(t)}{k!} dt.$$

Eftersom vi har likformig konvergens så kan vi byta plats på summationen och integralen så vi får att

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^2 t^k g(t) dt \right) z^k.$$

Detta är Maclaurinserien för F och den konvergerar för varje z , så F är hel. $\square$

Exempel 57. Låt oss nu titta på funktionen $f(z) = \log(1+z)$. Välj principalgrenen för $\log z$ varvid f blir holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq -1\}$. Taylors sats ger att konvergensraden för Taylorserien kommer vara ≥ 1 . Vi ska visa att konvergensraden är precis 1. Vi vet att

$$f(0) = \log 1 = 0.$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{så} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} \quad \text{så} \quad f''(0) = -1$$

och

$$f^k(z) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+z)^k} \quad \text{så} \quad f^k(0) = (k-1)!(-1)^{k-1}.$$

Alltså är f 's Taylorserie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}z^k}{k}.$$

Om $z = -1$ så får vi en serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, vilket betyder att serien divergerar då. Detta betyder att konvergensraden är ≤ 1 , så eftersom vi redan visste att konvergensraden var ≥ 1 så får vi att konvergensraden precis är 1. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 49. Låt $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ och definiera $f(z) = (1+z)^\alpha$, där potensen tolkas som principalgrenen. Bestäm om möjligt Taylorutvecklingen av f kring $z_0 = 0$ och diskutera dess konvergensradie. Beror utvecklingen av vilket α vi har?

INLÄMNINGSUPPGIFT 50. Finns det en potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ som konvergerar i $z = 2 + 3i$ och divergerar i $z = 3 - i$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 51. Låt $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kontinuerlig och definiera

$$H(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{1-zt^2} dt$$

för $|z| < 1$. Visa att H är holomorf på $B(0, 1)$.

Nu kommer jag att avvika lite från boken ett tag. Jag kommer att gå igenom den kallade Cauchyuppskattningen och därefter så kommer jag gå igenom vissa följder av denna. Boken går också igenom dessa resultat men först i kapitel 5.

Sats 4.2. (Cauchyuppskattningar)

Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara holomorf på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $p \in U$ och antag att $\overline{B(p, r)} \subset U$, $r > 0$. Sätt $M = \sup_{z \in \overline{B(p, r)}} |f(z)|$. Då gäller

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{Mk!}{r^k}$$

för $k = 1, 2, 3, \dots$

Bevis. Cauchys integralformel för derivator ger att

$$f^k(p) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} d\zeta.$$

Vi har att

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{r^{k+1}}.$$

Eftersom längden av randen är precis $2\pi r$ så får vi att

$$|f^k(p)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{Mk!}{r^k}.$$

□

Exempel 58. Låt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ uppfylla att $|f(z)| \leq e^{|z|^2}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Vi ska visa att $|f^{(4)}(0)| < 70$. Cauchyuppskattningen ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!M}{r^4},$$

där $M = \sup_{z \in \overline{B(0, r)}} |f(z)|$. Vi behöver bara ha ett $r > 0$ så låt oss ta $r = 1$. Detta ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!e^{1^2}}{1^4} = 24e < 70.$$

□

Liouvilles sats säger att en begränsad hel funktion är konstant, dvs det finns inga icke-konstanta holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$ som är begränsade.

Sats 4.3. (Liouvilles sats)

En begränsad hel funktion är konstant.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ så att $|f(z)| \leq C$, för något $C \geq 0$. Fixera ett $p \in \mathbb{C}$, och låt $r > 0$. Använd Cauchyuppskattningen med $k = 1$:

$$|f'(p)| \leq \frac{C1!}{r^1} = \frac{C}{r}.$$

Eftersom denna olikhet gäller för alla $r > 0$ så måste $f'(p) = 0$. Men eftersom p var godtyckligt, så är $f' \equiv 0$ på $\mathbb{C}$. Men då vet vi att f måste vara konstant. $\square$

Vad ska nu detta vara bra för? Jo, man kan visa följande inlämningsuppgift.

INLÄMNINGSUPPGIFT 52. Visa att om f är en hel icke-konstant funktion så finns det för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ en punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ så att $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Observera vidare att man använder Liouvilles sats för att visa algebrans fundamentalsats.

Sats 4.4. (Algebrans fundamentalsats)

Varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter har minst ett nollställe.

Bevis. Antag att $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, med $a_n \neq 0$, inte har något nollställe. Då kommer $f(z) = 1/p(z)$ vara en hel funktion. Observera att

$$p(z) = z^n(a_n + a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n),$$

så

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z)/z^n = a_n.$$

Detta ger att

$$|p(z)/z^n| \geq |a_n|/2$$

för tillräckligt stora $|z|$, säg för $|z| \geq r$. Då gäller att

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|z|^n |a_n|} \leq \frac{2}{r^n |a_n|}$$

för $|z| \geq r$. För $|z| \leq r$ så kommer f att vara begränsad, men då ger Liouvilles sats att $f(z) = 1/p(z)$ är konstant. Därför måste p vara konstant, som betyder att de enda polynomen som inte har några nollställen är de konstanta polynomen. $\square$

Låt oss återgå till bokens upplägg. Ni kan nu hoppa över avsnitten 4.2.4 och 4.2.5.

Isolerade nollställen och Weierstrass konvergenssats

Vi börjar med en definition:

Definition 4.5. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion definierad på ett område Ω . Låt w vara ett nollställe till f . Vi säger att w är **isolerad** om det finns en boll $B(w, r)$ så att $f|_{B(w, r)} \neq 0$ förutom i w .

En viktig sats inom komplex analysen är att varje nollställe till en holomorf funktion är isolerad, om inte funktionen är identiskt noll i en omgivning till punkten.

Proposition 4.6. Låt $f: \omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på ett område Ω . Låt $w \in \Omega$ vara sådan att $f(w) = 0$. Om f inte är identiskt noll i en omgivning till w så kommer w att vara ett isolerat nollställe.

Bevis. Se boken. □

Anmärkning 35. Beviset ger att om w är ett nollställe till f , så finns det ett $k \geq 1$ så att $f(z) = (z - w)^k g(z)$ så att $g(w) \neq 0$. Talet k kallas för **ordningen för nollstället** w . □

Som vi har sett tidigare så bevarar likformig konvergens kontinuitet. Vi ska nu se att likformig konvergens bevarar även holomorficitet.

Sats 4.7. (Weierstrass konvergenssats)

Låt f_n vara holomorfa på ett område Ω . Om $f_n \rightarrow f$ likformigt på Ω så är f holomorf. Vidare så $f_n^k \rightarrow f^k$ likformigt på kompakter.

Bevis. Se boken. □

Boken går därefter igenom den så kallade Laplace-ekvationen. Denna kommer vi gå igenom senare då vi diskuterar harmoniska funktioner. Sen kommer den så kallade Goursats sats:

Sats 4.8. (Goursats sats)

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbar. Då är $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Beviset är ganska långt och bygger på ett antal teknikaliteter. Läs detta översiktligt. Läs även resten av kapitlet översiktligt.

Kapitel 5

Läsanvisningar till kapitel 5

Analytisk fortsättning

Först så tänkte jag säga något om ordet analytisk. Man säger att en funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är **analytisk** om den lokalt kan representeras av en potensserie. Taylors sats ger att varje holomorf funktion är analytisk, och man kan även visa omvändningen. Detta ger att analyticitet och holomorficitet är precis samma sak. Nu till definitionen av analytisk fortsättning:

Definition 5.1. Låt $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ vara områden så att $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Låt $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ för $j = 1, 2$. Vi säger att f_2 är en **analytisk fortsättning** av f_1 om $f_2|_{\Omega_1} = f_1|_{\Omega_1}$, dvs om f_1 och f_2 överensstämmer på det mindre området Ω_1 .

Anmärkning 36. En del av sporten är att hitta ett så stort område Ω_2 som möjligt. □

Exempel 59. Betrakta funktionen $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}.$$

Man kan visa att f inte kan utvidas till någon större mängd än $B(0, 1)$. Jämför detta med bokens exempel 97. Detta exempel visar att $B(0, 1)$ är ett så kallat holomorfiområde, men mer om detta kan ni läsa i någon lämplig doktorandkurs. □

Exempel 60. Låt oss utvidga exempel 97 i boken lite grann. Betrakta funktionen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$ definierad på $\Omega_1 = B(z_0, 1)$. Eftersom , för $z \in B(z_0, 1)$,

$$\frac{1}{1 - (z - z_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$$

så kommer $g(z) = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$ vara en analytisk fortsättning av f till $\mathbb{C} \setminus \{1 + z_0\}$. □

Nästa fråga vi ska försöka besvara är om vi har två analytiska fortsättningar av en funktion f , vad kan vi då säga om dessa analytiska fortsättningar? Det kommer visa sig att de måste vara lika, så en analytisk fortsättning är unik. Vi behöver en sats för att besvara denna fråga:

Sats 5.2. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Om $f|_U \equiv 0$ för någon öppen $U \subset \Omega$ så är $f \equiv 0$ på Ω .

Bevis. Vi kan anta att U är en boll $B = B(z_0, r)$, eftersom varje öppen mängd är en union av bollar. Antag att $f(z) = 0$ för alla $z \in B$. Antag nu för en motsägelse att det finns en punkt $z_1 \in \Omega$ så att $f(z_1) \neq 0$, låt γ vara en kurva från z_0 till z_1 helt inne i Ω . Då vi går längs γ så måste det finnas en punkt w så att

1. För alla z på γ efter w så gäller att $f(z) = 0$
2. Det finns punkter z på γ som ligger godtyckligt nära w så att $f(z) \neq 0$.

Observera att (1) implicerar att $f'(z) = 0$ för z som finns i (1), ty

$$f'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

och går vi längs γ så kommer $f(\zeta) = f(z) = 0$. Detta kan vi göra för alla derivator, så $f^k(z) = 0$ för z i (1). Kontinuitet ger att $f^k(w) = 0$ för alla $k \geq 1$. Detta implicerar i sin tur att koefficienterna i Taylorutvecklingen kring $z = w$ är alla noll. Så f måste vara noll i en omgivning till w . Detta motsäger (2), så antagandet att f inte är identiskt noll är fel. $\square$

Anmärkning 37. Jämför med beviset som boken ger. $\square$

Följd 5.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Om $f|_U \equiv c$ för någon öppen $U \subset \Omega$ och någon konstant c så är $f \equiv c$ på Ω .

Bevis. Betrakta $g(z) = f(z) - c$. Då är $g|_U \equiv 0$, så föregående sats ger att $g \equiv 0$ på Ω . Därför är $f \equiv c$ på Ω . $\square$

Följd 5.4. Antag att $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ är områden med $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Antag att $g, h: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ är båda analytisk fortsättningar av $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$. Då är $g \equiv h$.

Bevis. Vi har att $g - h \equiv 0$ på Ω_1 , så satsen ovan ger att $g - h \equiv 0$ på Ω_2 , så $g \equiv h$. $\square$

Anmärkning 38. Följden säger att om det finns en analytisk fortsättning så är den unik. $\square$

Resten av avsnitt 5.1 kan ni läsa översiktligt.

Maximumprincipen och hela funktioner med diverse resultat

Nästa viktiga resultat är maximumprincipen, i två olika versioner. För beviset av satsen så behöver vi att holomorfa funktioner har en medelvärdesegenskap: Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ så är

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Detta följer direkt från ett variabelbyte och Cauchys integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Sats 5.5. (Maximumprincipen (version 1))

Om Ω är ett område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $|f|$ har ett lokalt maximum i Ω så måste f vara konstant i Ω .

Anmärkning 39. Ett lokalt maximum betyder att för alla $p \in \Omega$ så gäller att $|f(p)| \geq |f(z)|$ för alla $z \in \Omega$. $\square$

Bevis. Låt oss först bevisa resultatet i fallet av boll $B(z, R)$. Antag att $B(z, R)$ är sådan att $|f(z)| = \sup_{w \in B(z, R)} |f(w)|$. Tag ett $0 < r < R$. Medelvärdesegenskapen för holomorfa funktioner ger att

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta = \\ &= |f(z)| \frac{2\pi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Alltså har vi likhet hela vägen, så speciellt har vi att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta,$$

så

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})|) d\theta.$$

Eftersom $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| \geq 0$, så ger det att $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| = 0$ för alla θ . På grund av att detta är sant för alla $r < R$ så betyder det att $|f|$ är konstant på $B(z, R)$ och eftersom f är holomorf så betyder det att f är konstant.

Låt oss nu visa satsen i fallet av ett område. Antag att $|f|$ antar sitt maximum i $z \in \Omega$, och antag för en motsägelse att $|f|$ inte är konstant på Ω . Då finns det

en punkt $w \in \Omega$ så att $|f(w)| < |f(z)|$ (se ovan). Låt γ vara en kurva mellan z och w ; $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$. Låt

$$T = \inf\{t \in [0, 1] : |f(\gamma(t))| < |f(z)|\}.$$

Detta betyder att $|f(\gamma(t))| = |f(z)|$ om $t \in [0, T]$, men det finns punkter $t > T$ (godtyckligt nära T) där vi har olikhet. Tag nu en boll $B(\gamma(T), r) \subset \Omega$. Föregående argument ger att $|f|$ är konstant på $B(\gamma(T), r)$, vilket motsäger definitionen av T , så $|f|$ måste vara konstant, så f måste vara konstant, eftersom f är holomorf. $\square$

Sats 5.6. (Maximumprincipen (version 2))

Om Ω är ett begränsat område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och f är kontinuerlig på $\bar{\Omega}$, så antar $|f|$ sitt maximum på $\partial\Omega$.

Anmärkning 40. Det är denna sats som man brukar använda, så kom ihåg denna. $\square$

Bevis. Antag att $|f|$ inte antar sitt maximum på randen. Då måste $|f|$ anta sitt maximum på det inre, ty f är kontinuerlig, och då ger version 1 att f måste vara konstant. Därför måste $|f|$ anta sitt maximum på randen. $\square$

Exempel 61. Låt oss beräkna maximum för $|e^{z^2}|$ på enhetsdisken. Eftersom enhetsdisken är ett begränsat område och e^{z^2} är holomorf på enhetsdisken, samt e^{z^2} är kontinuerlig på $\bar{B}(0, 1)$. Nu ger maximumprincipen att $|e^{z^2}|$ antar sitt maximum på $|z| = 1$. Sätt därefter $z = e^{it}$. Då är

$$|e^{(e^{it})^2}| = |e^{e^{2it}}| = |e^{\cos 2t + i \sin 2t}| = e^{\cos 2t} \leq e,$$

eftersom $0 \leq \cos 2t \leq 1$. Detta maximum antar den för $z = \pm 1$. $\square$

Exempel 62. Vi ska hitta maximum för $|z^2 + 3z - 1|$ på $|z| \leq 1$. Enligt maximumprincipen så antas maximum på randen $|z| = 1$. Skriv z i polär form; $z = e^{i\theta}$. Då gäller att

$$|z^2 + 3z - 1|^2 = (e^{2i\theta} + 3e^{i\theta} - 1)(e^{-2i\theta} + 3e^{-i\theta} - 1) = \dots = (11 - 2\cos 2\theta).$$

Så maximum för $|z^2 + 3z - 1|$ är $\sqrt{13}$ i punkterna $\pm i$. $\square$

Exempel 63. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ är icke-konstant. Definiera $M(r) = \max |f(re^{i\theta})|$. Vi ska visa att M är strikt växande. Vi ska visa att $M(r) < M(s)$ om $r < s$. Eftersom $g = f|_{B(0,r)}$ är holomorf och icke-konstant så kommer maximumprincipen ge att $|f|$ antar sitt maximum på randen. Betrakta nu $h = f|_{B(0,s)}$ för $r < s$. Använder vi nu maximumprincipen så kommer $|h|$ anta sitt maximum på randen, men det är större än $|g|$'s maximum ty g och h kommer från f som antar alltid sitt maximum på randen till en begränsad mängd. $\square$

Läs även igenom bokens exempel, och gör sedan uppgifterna nedan.

INLÄMNINGSUPPGIFT 53. Låt $a_1, \dots, a_n$ vara punkter på enhetscirkeln S^1 . Visa att det existerar en punkt $z \in S^1$ så att

$$\prod_{j=1}^n |z - a_j| \geq 1.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 54. Fixera $R > 0$. Låt f vara en hel funktion som uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för z på $|z| = R$. Visa att

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq \frac{k!M}{(R-r)^k}$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$ och alla $0 \leq r < R$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 55. Gör uppgift 72 i boken.

Nu kommer boken in på hela funktioner, dvs funktioner som är holomorfa på hela $\mathbb{C}$. Vi har redan gått igenom Liouvilles sats samt hur man bevisar algebrans fundamentalsats med hjälp av den. Boken går även igenom ett flertal andra bevis av algebrans fundamentalsats. Läs igenom dessa och jämför de olika bevismetoderna.

Harmoniska funktioner

Jag tänkte nu lägga till ett avsnitt om harmoniska funktioner. Boken tar upp lite om den så kallade Laplace-ekvationen i kapitel 4, och sen i kapitel 7.6 och 12 så diskuterar man harmoniska funktioner litegrann. Jag tänkte göra en ganska bra genomgång, med relativt många exempel. Vi börjar med definitionen av en harmonisk funktion.

Definition 5.7. Harmoniska funktioner är de som ligger i kärnan till Laplace-operatorn

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mer precist, om $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ett område, så säger vi att f är **harmonisk** om

$$\Delta f = 0.$$

på D . Vi skriver mängden av harmoniska funktioner på D som $\mathcal{H}(D)$.

Laplaceoperatorn kan komplext uttryckas genom

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Detta följer direkt från definitionen av de komplexa partiella derivatorna. Från denna representation av Laplace-operatorn så ser vi direkt att varje holomorf funktion är harmonisk, dvs $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{H}(D)$. Däremot så har vi inte omvändningen:

Exempel 64. Låt $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2$. Då är f harmonisk. Låt $u(x, y) = x^2 - y^2$ och $v(x, y) = 0$, varvid $f = u + iv$. Cauchy-Riemanns ekvationer ger att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Alltså är inte Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda så f är inte holomorf, men den är harmonisk. $\square$

Vi har följande förhållande mellan holomorfa och harmoniska funktioner:

Sats 5.8. Låt $D \subset \mathbb{C}$ vara ett område och $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på D . Skriv $f = u + iv$, då är u och v harmoniska på D .

Bevis. Detta följer direkt från Cauchy-Riemanns ekvationer. $\square$

Men hur är det med omvändningen till denna sats. Om vi har en harmonisk funktion u , kan vi då hitta en harmonisk funktion v så att $f = u + iv$ blir holomorf? Svaret är ja, och då kallar man v för **harmoniska konjugatet** till u . Låt oss förklara hur det går till:

- Vi utgår från att u är en harmonisk funktion.
- Vi vill hitta en harmonisk v så att $f = u + iv$ blir holomorf, så utifrån Cauchy-Riemanns ekvationer har vi att

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

som genom integrering bestämmer v plus en konstant C som beror på x , så $v(x, y) = p(x, y) + C(x)$. (Detta beror på vilken ekvation vi integrerar).

- Cauchy-Riemanns ekvationer ger nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

som då bestämmer $C'(x)$, som i sin tur bestämmer $C(x)$.

- På detta sätt så har vi bestämt v så att $f = u + iv$ blir holomorf.

Exempel 65. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\operatorname{Re}(f) = u(x, y) = ax^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$ och $f(0) = i$, där $a \in \mathbb{R}$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6ax + 2 - 2x - 2 = 6ax - 12x.$$

Alltså är u harmonisk om och endast om $6ax - 12x = 0$, dvs om $a = 2$. Vi har alltså bestämt a så att u blir harmonisk.

För att bestämma ett harmoniskt konjugat till u betraktar vi Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy + 2y + 1 \end{cases}.$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2x$ så kan vi integrera med avseende på y , vilket ger att

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C(x),$$

där $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bara beror på x . Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy + 2y + C'(x) = 12xy + 2y + 1$$

enligt ekvationerna ovan. Alltså måste $C'(x) = 1$, så $C(x) = x + d$, för $d \in \mathbb{R}$. Detta ger att alla harmoniska konjugat till u ges av

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d.$$

Alltså är de holomorfa funktioner som uppfyller $u = \operatorname{Re}(f)$:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i(6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d).$$

Utifrån $f(0) = i$ så får vi att $d = 1$, och om vi uttrycker f i termer av z och $\bar{z}$ så får vi att $f(z) = 2z^3 + z^2 + iz + i$. Detta bekräftar att f verkligen är holomorf. $\square$

Exempel 66. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\operatorname{Re}(f) = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 + y$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6x - 6x = 0$$

Alltså är u harmonisk. Vi vill nu hitta ett harmoniskt konjugat v till u , så att $f = u + iv$ blir holomorf. För att detta ska vara möjligt så måste Cauchy-Riemanns ekvationer vara uppfyllda. Vi måste alltså ha

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1 \end{cases}.$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ så kan vi integrera med avseende på y , vilket ger att

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C(x) ,$$

där $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bara beror på x . Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + C'(x) = 6xy - 1.$$

Alltså är $C'(x) = -1$, så $C(x) = -x + a$, där a är en konstant. Vi får alltså att

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x + a ,$$

där a är en konstant. Så den holomorfa funktionen vi söker är

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 + y + i(3x^2y - y^3 - x + a) ,$$

där a är en konstant. □

Exempel 67. Vi ska hitta en funktion $f(x, y)$ som är harmonisk i området i det högra halvplanet som begränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = 2$ och $x^2 - y^2 = 4$ som antar värdet 3 på vänstra sidan och 7 på högra sidan, dvs antar värdet 3 på $x^2 - y^2 = 2$ och 7 på $x^2 - y^2 = 4$.

Observera att $x^2 - y^2$ är realdelen av z^2 . Vi provar med ansatsen

$$f(x, y) = A(x^2 - y^2) + B = \operatorname{Re}(Az^2 + B) ,$$

där A, B är reella tal. Eftersom vi kräver att $f = 3$ då $x^2 - y^2 = 2$ så får vi ekvationen $2A + B = 3$, och på andra sidan så får vi ekvationen $4A + B = 7$. Löser vi detta ekvationssystem, så får vi att $A = 2$ och $B = -1$, dvs

$$f(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 1$$

är den harmoniska funktionen vi söker. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 56. Visa att $\ln|z|$ är harmonisk.

Exempel 68. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1 + i)| < 2\}$. Vi ska hitta en harmonisk funktion $\phi(x, y)$ på A så att $\phi = 0$ på $|z - (1 + i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1 + i)| = 2$.

Enligt ovan så vet vi att $A \ln|z - (1 + i)| + B$ är harmonisk. Enligt förskrivet randdata så måste vi ha att

$$A \ln 1 + B = 0 \quad \text{och} \quad A \ln 2 + B = 10 ,$$

som ger att $B = 0$ och $A = \frac{10}{\ln 2}$. Detta ger att funktionen

$$\phi(x, y) = \phi(z) = 10 \frac{\ln|z - (1 + i)|}{\ln 2}$$

är harmonisk så att $\phi = 0$ på $|z - (1 + i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1 + i)| = 2$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 57. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara sådan att f och f^2 är harmonisk. Visa att f är holomorf eller att $\bar{f}$ är holomorf.

INLÄMNINGSUPPGIFT 58. Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Bestäm en holomorf funktion $f(z)$ så att

$$u = \operatorname{Re}(f) \text{ och } f(1) = i.$$

Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 59. Visa att $\operatorname{Re}\left(\frac{\cos z}{e^z}\right)$ är harmonisk på $\mathbb{C}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 60. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < 3\}$. Hitta en harmonisk funktion $\phi(z) = \phi(x, y)$ på A så att $\phi = 10$ på $|z - i| = 1$ och $\phi = 100$ på $|z - i| = 3$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 61. a) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen

$$u(x, y) = x^2 + ax + by^2 + cy + dxy.$$

Bestäm de reella konstanterna a, b, c och d och en holomorf funktion $f(z)$ så att

$$u = \operatorname{Re}(f), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 0, \quad f(0) = 1 \text{ och } u(1, 1) = -2.$$

Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

b) Är f entydigt bestämd? Motivera!

INLÄMNINGSUPPGIFT 62. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att $|f| \in \mathcal{H}(\Omega)$, visa att f är konstant.

Det finns mycket att säga om harmoniska funktioner. De uppfyller en maximumprincip, de uppfyller medelvärdesegenskapen, etc. Jag nöjer mig här, ni kan läsa om mera egenskaper hos harmoniska funktioner i någon annan kurs.

Kapitel 6

Läsanvisningar till kapitel 6

Jag kommer att ha ett litet annat upplägg än boken, det mesta står redan i boken, och allt som står i boken tar jag inte upp. De flesta detaljerna kan ni läsa i boken. Vi börjar med Laurentserier:

Taylorserier gav oss en möjlighet att uttrycka holomorfa funktioner i en potensserie. I detta avsnitt vill vi uttrycka en holomorf funktion med singulariteter, dvs där den inte är definierad, i en potensserie.

Låt $0 \leq r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2 \leq +\infty$ och låt $z_0 \in \mathbb{C}$. Sätt

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

och

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Antag att $f \in \mathcal{O}(A)$. Då är

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j ,$$

där serierna är absolutkonvergenta och konvergerar likformigt på mängder av typen B . Serieutvecklingen kallas för **Laurentserieutvecklingen** av f på A kring z_0 .

Om γ är en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då ges koeficienterna i Laurentserieutvecklingen av

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{j-1} d\zeta \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Observation 8. Observera att beviset av denna sats är liknande av beviset av Taylors sats. $\square$

Anmärkning 41. Det är lockande att skriva

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$$

som i Taylorutvecklingen, med det vore fel ty $f^{(j)}(z_0)$ behöver nödvändigtvis ej vara väldefinierat. $\square$

Observation 9. Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r_2))$, då blir Laurentserieutvecklingen precis Taylorutvecklingen av f kring z_0 . $\square$

Anmärkning 42. Laurentserieutvecklingen är entyigt bestämd enligt en sats i boken, och detta faktum använder man bland annat i uträkningar. $\square$

Definition 6.1. Låt

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

vara Laurentserieutvecklingen av en funktion f . Vi kallar då $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j}$ för **principaldelen** av Laurentserien.

Anmärkning 43. Principaldelen berättar hur singular f är i punkten z_0 . $\square$

Låt oss göra några exempel. Innan ni kollar på dessa, se till att ni har koll på geometriska serier.

Exempel 69. Låt

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \text{ och } A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

och

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(A_1)$ och $f \in \mathcal{O}(A_2)$. Låt oss Laurentserieutveckla f i de olika områdena. För det första har vi att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j,$$

där vi använde en geometrisk serie, eftersom $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ är precis samma sak som $|z| > 1$ (dvs vi befinner oss i området A_1 .) Så denna serie konvergerar på A_1 .

Låt oss nu hitta en Laurentserieutveckling på A_2 för f . Vi har att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^j = -\frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j,$$

där vi har använt oss av en geometrisk serie, eftersom $|z| < 1$. Så serien konvergerar på A_2 . $\square$

Exempel 70. Låt oss Laurentserieutveckla $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}$ i området

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}.$$

Vi har att

$$\frac{1}{z^2+4z+3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3}$$

om vi använder partialbråksuppdelning.

Termen $\frac{1}{z+1}$ är holomorf på $|z| > 1$. Vi har, om vi använder en geometrisk serie, att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}}$$

som konvergerar för $|z| > 1$.

Vidare så är termen $\frac{1}{z+3}$ holomorf på $|z| < 3$. Vi har att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}.$$

Även här har vi använt oss av en geometrisk serie. De båda fallen ovan ger nu att

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}$$

som är Laurentserieutvecklingen av f i området A . □

Exempel 71. Vi ska Laurentserieutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ kring $z_0 = 3$, och därefter bestämma dess konvergensradie.

Vi ser att $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ är holomorf på $0 < |z-3| < 2$ och på $|z-3| > 2$. Därför måste vi bestämma en Laurentserieutveckling på båda dessa områden. Vi börjar med att göra en partialbråksuppdelning av $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$. Då får man att

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5}.$$

Nu kan vi börja Laurentserieutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $0 < |z-3| < 2$. Vi behöver inte utveckla $\frac{1}{z-3}$ eftersom denna term redan finns med i Laurentserieutvecklingen kring $z_0 = 3$. Vidare har vi att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-3}{2}\right)}.$$

Eftersom

$$\left| -\frac{(z-3)}{2} \right| < 1 \iff |z-3| < 2$$

så är vi rätt område, vilket betyder att vi kan använda oss av en geometrisk serie. Då får vi att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z-3}{2} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}}.$$

På samma sätt så får vi att

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{2-(z-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-3}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-3}{2} \right)^j = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}}.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5} = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} - \frac{5}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}} = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+4}} ((-1)^j - 5), \end{aligned}$$

som är Laurentseriutvecklingen vi sökte.

Låt oss nu Laurentseriutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $|z-3| > 2$. Vi har att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z-3}\right)} = \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{2}{z-3} \right)^j$$

och

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{(z-3)-2} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-3} \right)^j.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5} = \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{2}{z-3} \right)^j - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-3} \right)^j = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{(z-3)^{j+1}} ((-1)^j + 5), \end{aligned}$$

vilket är Laurentseriutvecklingen för $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $|z-3| > 2$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 63. Låt A vara annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r \leq |z| \leq R\}$ och låt $f \in \mathcal{O}(A)$. Visa att det finns funktioner f_1, f_2 så att f_1 är holomorf för $|z| \leq R$, f_2 är holomorf för $|z| \geq r$ och

$$f = f_1 + f_2$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 64. Laurentserieutveckla $\frac{z}{z+2}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 65. Laurentserieutveckla $\frac{1}{z-3}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 66. Laurentserieutveckla $\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-5)}$ i områdena

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2| < 3\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 3\}$

Singulariteter är, precis som vi har nämnt förut, punkter där en funktion inte är definierad. Man kan däremot ha olika typer av singulariteter, och man använder sig av Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner för att klassificera de olika typerna av singulariteter. Mer precist har vi:

Definition 6.2. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och antag att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$, $r > 0$. Om $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ så säger vi att f har en **isolerad singularitet** i z_0 .

Eftersom $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ så har f följande Laurentserieutveckling

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

åtminstone på $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Vi ska använda oss av koefficienterna c_j till denna Laurentserieutveckling för att klassificera de olika singulariteterna.

1. Om $c_j = 0$ för alla $j < 0$ så säger vi att f har en **hävbar singularitet** i z_0 .
2. Om det finns ett $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, så att $c_k \neq 0$ och $c_j = 0$ för alla $j < -k$, så säger vi att f har en **pol** i z_0 av ordning k .
3. Om $c_j \neq 0$ för oändligt många *negativa* j , då säger vi att f har en **väsentlig singularitet** i z_0 .

Anmärkning 44. Koefficienten c_{-1} kallas för f :s **residue** i punkten z_0 . Detta kommer bli mer klart i kapitel 8. $\square$

Låt oss gå igenom dessa olika typer av singulariteter.

- Antag att f har en hävbar singularitet i z_0 . Detta är faktiskt ingen singularitet, utan man häver verkligen den. Då är Laurentserieutvecklingen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ inget annat än Taylorutvecklingen för f som är holomorf i $B(z_0, r)$ förutsatt vi definierar $f(z_0) = c_0$. Vidare så har vi att f är begränsad i någon omgivning $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. En annan viktig egenskap hos hävbara singulariteter är att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

existerar och är ändlig. Vidare så är

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Vi sammanfattar att z_0 är en hävbar singularitet för f om $|f|$ är begränsad nära z_0 om $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar och är ändlig om vi kan omdefiniera f så att f blir holomorf i z_0 (detta är den så kallade Riemanns sats för hävbara singulariteter).

- Antag nu att f har en pol av ordning k i z_0 . Då har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Vidare så kan vi skriva f som

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

där g är en holomorf funktion med $g(z_0) \neq 0$. Detta betyder speciellt att $1/f$ kommer ha ett nollställe i z_0 av ordning k . Vidare så har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$$

och att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

existerar och är ändlig.

- Låt oss slutligen diskutera väsentliga singulariteter. Dessa punkter är konstiga punkter, och gränsvärdet $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar inte, vare sig det blir ändligt eller oändligt. Vidare så har vi Picards sats som säger att $f(z)$ antar alla komplexa tal i en omgivning till z_0 med ett möjligt undantag. Detta betyder, med topologiska termer, att värdemängden för f är tät i $\mathbb{C}$.

Definition 6.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. En funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ som är holomorf förutom i poler kallas **meromorf**.

Exempel 72. Betrakta funktionen

$$f(z) = \begin{cases} \cos z & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Laurentserieutvecklingen av f kring z_0 är

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j}}{(2j)!} z^{2j}$$

på mängden $0 < |z|$. Per definition så har f en hävbar singularitet i $z_0 = 0$. $\square$

Exempel 73. Funktionen $f(z) = e^{-1/z}$ har en väsentlig singularitet i $z_0 = 0$. I varje omgivning $B(0, r) \setminus \{0\}$ så antar denna funktion alla komplexa värden utom 0. Detta är standardexemplet på en funktion med en väsentlig singularitet. $\square$

Exempel 74. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$. Vi ser att f har en isolerad singularitet i $z = 0$. Vidare har vi att

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 0.$$

Eftersom $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$ existerar inte så har f en pol av ordning 2. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 67. Visa att de enda singulariteterna en rationell funktion, dvs en funktion på formen $p(z)/q(z)$ där $p, q \in \mathbb{C}[z]$, har är hävbara eller poler.

INLÄMNINGSUPPGIFT 68. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 69. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \frac{1 - \cos(z^5)}{\sin(z^3)}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 70. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$.

Resten av kapitlet kan ni läsa själva.

Kapitel 7

Läsanvisningar till kapitel 7

I detta kapitel så fortsätter vår studie av kurvintegraler. Som boken visar så beror inte en kurvintegral av vilken väg man tar mellan ändpunkterna. Detta förutsätter att integranden är holomorf, se exempel 122 för ett motexempel då integranden inte är holomorf. Därefter så visar boken, i exempel 123 att vi inte kan ha vilket område som helst heller. Det kommer visa sig att de områden som fungerar är precis de områden som inte har några hål. För att kunna ge en mer precis matematisk definition så måste vi studera kurvor en aning mer.

Definition 7.1. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$ och $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ vara kurvor. Antag att $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ och $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$. Vi säger att γ_0 och γ_1 är **homotopa** i Ω , som vi skriver som $\gamma_0 \sim \gamma_1$, om det finns en kontinuerlig funktion $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ så att

1. $H(0, t) = \gamma_0(t)$
2. $H(1, t) = \gamma_1(t)$
3. $H(s, 0) = p$
4. $H(s, 1) = q$

för alla $s, t \in [0, 1]$. Funktionen H kallas för en **homotopi** av γ_0 och γ_1 .

En homotopi är helt enkelt en kontinuerlig deformation av γ_0 till γ_1 , dvs kurvan γ_0 deformerar på ett ”bra” sätt till kurvan γ_1 . Rita egna bilder och försök få en bättre förståelse för detta koncept.

INLÄMNINGSUPPGIFT 71. Visa att ”vara homotop med” är en ekvivalensrelation.

Exempel 75. Låt $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierade genom

$$\gamma_0(t) = t + it$$

och

$$\gamma_1(t) = t + it^2.$$

Då är $\gamma_0 \sim \gamma_1$ via homotoping $H(s, t) = t + it^{1+s}$. En annan homotopi är given av $H(s, t) = t + i(st^2 + (1-s)t)$. $\square$

En viktig sats nu är att

Sats 7.2. (Homotopiinvarians av kurvintegraler)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Om $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ är homotopa kurvor, så gäller att

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Bevis. Se boken. $\square$

Vi kan även formulera en annan viktig sats:

Sats 7.3. Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är ett område och f är kontinuerlig på U . Då är följande ekvivalent

1. f har en primitiv funktion i U
2. $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$ -kurvor γ i U .
3. $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$ -kurvor med samma start- och ändpunkt.

Om ni kommer ihåg satsen om konservativa vektorfält från någon flervariabelkurs så är den analog med satsen ovan, den säger nämligen

Sats 7.4. Antag att $U \subset \mathbb{R}^n$ är ett område och F är ett kontinuerligt vektorfält på U . Då är följande ekvivalent

1. F är konservativ på U
2. $\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$ -kurvor γ i U .
3. $\oint_{\gamma_1} F \cdot dr = \oint_{\gamma_2} F \cdot dr$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$ -kurvor med samma start- och ändpunkt.

Denna sats om konservativa vektorfält ingår förstås inte i kursen, utan jag tyckte det vore kul att se analogin bara. En sak som man bör observera är att Sats 7.3 gäller för kontinuerliga funktioner, så den gäller speciellt för holomorfa funktioner.

Definition 7.5. Ett område $\Omega \subset \mathbb{C}$ kallas för ett **enkelt sammanhängande område** om varje enkel sluten kurva i Ω är homotop med en punkt.

Denna definition leder fram till en ny variant av Cauchys integralsats:

Sats 7.6. (Cauchys integralsats för enkelt sammanhängande områden)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Då gäller att

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

för alla slutna kurvor γ i Ω .

Bevis. Låt γ vara en godtycklig enkel sluten kurva i Ω . Då finns det en punkt $p \in \Omega$ så att $\gamma \sim \{p\}$. Då ger homotopiinvarianssatsen att

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\{p\}} f dz = 0,$$

ty integralen över en punkt är noll. □

Exempel 76. Låt oss betrakta integralen $\int_{|z|=1} z^n dz$ igen, fast den är gången med hjälp av Cauchys integralsats. Vi vet att

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}$$

Låt oss kolla på tre fall:

Fall 1: ($n \geq 0$)

Då är z^n holomorf på $\mathbb{C}$ som är enkelt sammanhängande, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$.

Fall 2: ($n = -1$)

Då är $z^n = \frac{1}{z}$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ men har ingen primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 2\pi i$.

Fall 3: ($n < -1$)

Då är z^n holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ och har en primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$. □

Exempel 77. Låt oss beräkna $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ där γ är en cirkel med positiv orientering. Om a ligger utanför γ så är $\frac{1}{z-a}$ holomorf i γ , så Cauchys integralsats ger att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

Antag nu att a ligger innanför γ . Deformera nu γ till en cirkel runt a med radie 1, dvs $|z-a|=1$. Då får vi enligt homotopisatsen att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=1} \frac{dz}{z-a} = \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$

enligt föregående exempel. Alltså är

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & , \text{ om } a \in \text{Ext}(\gamma) \\ 2\pi i & , \text{ om } a \in \text{Int}(\gamma) \end{cases} ,$$

där $\text{Int}(\gamma)$ är det inre av γ och $\text{Ext}(\gamma)$ är det yttre av γ . $\square$

Det är speciellt viktigt med detta exempel för att beräkna vissa kurvintegraler.

Exempel 78. Låt oss beräkna $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)}$. Eftersom

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

så blir

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)} = \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)} + \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i ,$$

enligt exemplet ovan. $\square$

Med de nya kunskaperna så kan vi modifiera beviset av Cauchys integralformel:

Sats 7.7. (Cauchys integralformel) *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är öppen och att $f \in \mathcal{O}(U)$. Låt $z_0 \in U$ och $r > 0$ vara sådan att $B(z_0, r) \subset U$. Då gäller för varje $z \in B(z_0, r)$ att*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Bevis. Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta. \end{aligned}$$

Eftersom $z \in B(z_0, r)$ och eftersom $f(z)$ inte är en funktion av ζ , så får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Om vi visar att $\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0$ så är vi klara. Deformera nu $|z-z_0|=r$ till en cirkel $|z-z_0|=\varepsilon$. Kalla den nya cirkeln för γ_ε . Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0.$$

Sätt $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$. Då gäller att

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M2\pi i \varepsilon}{\varepsilon} = M2\pi.$$

Eftersom $f \in \mathcal{O}(U)$, så är den speciellt kontinuerlig, så

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta \right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0,$$

så satsen följer. □

Boken formulerar och bevisar därefter den så kallade Monodromysatsen. Ni behöver inte läsa detta, om ni inte vill förstås. Däremot så ska ni läsa och förstå en typ av omvändning till Cauchys integralsats:

Sats 7.8. (Moreras sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område och låt $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Om

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

för varje sluten, enkel $\mathcal{C}^1$ -kurva i Ω , så är f holomorf på Ω .

Bevis. Se Boken. □

Hoppa sedan över avsnitt 7.9, och gör därefter några inlämningsuppgifter.

INLÄMNINGSUPPGIFT 72. Visa att funktionen

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1-tz}$$

är holomorf på $B(0,1)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 73. Som ni redan har visat så är att vara homotop med en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna till denna ekvivalensrelation kallar vi för en **homotopiklass**, och vi skriver $[\gamma]$ som ekvivalensklassen under γ . Betrakta nu slutna kurvor γ och τ . Att vara homotop med betyder då förstås samma sak som förut. Säg nu att $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$. Vi kallar då z_0 för **baspunkten** till kurvan γ . Vi skriver mängden av ekvivalensklasser $[\gamma]$ av slutna kurvor med baspunkt z_0 som $\pi_1(\Omega, z_0)$, om γ är en kurva i ett område Ω . $\pi_1(\Omega, z_0)$ brukar kallas den **första fundamentalgruppen** för Ω i punkten z_0 . Definiera produkten av två kurvor γ och τ genom

$$\gamma \cdot \tau(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

- Definiera en operation $\cdot$ på $\pi_1(\Omega, z_0)$. Visa att $[\gamma \cdot \tau] = [\gamma] \cdot [\tau]$ är en väldefinierad operation.
- Hitta en bijektiv avbildning från $\pi_1(\Omega, z_0)$ till $\pi_1(\Omega, z_1)$.

Den sista punkten visar att $\pi_1(\Omega, z_0)$ är oberoende av baspunkt, så vi kan skriva $\pi_1(\Omega)$ istället.

- Beräkna $\pi_1(\Omega)$ om Ω är enkelt sammanhängande.
- Hitta en bijektiv avbildning från $\pi_1(S^1)$ till $\mathbb{Z}$, där $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Kapitel 8

Läsanvisningar till kapitel 8

Ni kommer att märka att vissa resultat i detta kapitel har jag redan nämnt i tidigare läsanvisningar. Jag tänkte presentera detta avsnitt på ett litet annorlunda vis, men jag börjar som boken med vridningstal men med ett exempel:

Exempel 79. Låt γ vara enhetscirkeln paramteriserad genom $\gamma(t) = e^{it}$ för $t \in [0, 2\pi]$. Då gäller att

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Om vi låter τ vara enhetscirkeln fast vi låter τ genomlöpa cirkeln n gånger, dvs vi parametriserar den genom $\tau(t) = e^{it}$ för $t \in [0, 2\pi n]$. Då gäller att

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{dz}{z}.$$

Vi säger att τ snurrar runt 0 n gånger. □

Ett mer generellt exempel är

Exempel 80. Låt γ vara en positivt orienterad kurva som genomlöps n gånger kring en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Då gäller att

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Här snurrar γ n gånger kring z_0 . □

Observation 10. Om vi byter orientering på kurvan γ , säg till negativ orintering så får vi att

$$-n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

□

Observation 11. Om punkten z_0 ligger utanför kurvan γ så blir integralen noll, och det är ju klart att kurvan kan inte kan snurra kring en punkt om inte punkten ligger innanför kurvan. □

Definition 8.1. Låt $\gamma: [0, 1]$ vara en sluten kurva och låt z_0 vara en fixerad punkt som inte ligger på kurvan. Vi definierar **vridningstalet** för γ med avseende på z_0 genom

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Vi säger att γ **snurrar kring** z_0 $I(\gamma, z_0)$ gånger.

Anmärkning 45. Jämför bokens definition med denna. Kolla även på bilderna på sidan 246 för att på lite intuition om vad det hela handlar om. $\square$

Proposition 8.2. Låt γ, τ vara två enkla, slutna kurvor i $\mathbb{C}$, och antag att z_0 inte ligger på γ eller τ . Om γ är homotop med τ i $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ så gäller att $I(\gamma; z_0) = I(\tau; z_0)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 74. Visa propositionen ovan.

Om vi har en kurva som går runt en punkt, så kan vi inte säga att den snurrar runt denna punkt $\sqrt{2}$ gånger. Följande sats säger att detta inte kan inträffa.

Sats 8.3. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en styckvis, sluten $\mathcal{C}^1$ -kurva. Antag att z_0 är en punkt som inte ligger på kurvan. Då är $I(\gamma; z_0)$ ett heltal.

Bevis. Låt

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

I punkter där integranden är kontinuerlig så får vi att

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Vidare så gäller att

$$\frac{d}{dt} e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) = 0$$

där $g'(t)$ existerar. Därför måste $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ vara styckvis konstant på $[0, 1]$, och eftersom $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ är kontinuerlig så måste den vara konstant på $[0, 1]$ (se en sats från första läsanvisningen). Detta konstanta värde är

$$e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0),$$

så $e^{-g(1)} (\gamma(1) - z_0) = e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0)$. Eftersom γ är sluten så måste $e^{g(1)} = e^{-g(0)}$. Eftersom $g(0) = 0$ så gäller att $e^{-g(0)} = 1$. Enligt en sats om den komplexa exponentialen så gäller att $g(1) = 2\pi i n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Resultatet följer. $\square$

Om ni kommer ihåg avsnittet om Laurentserieutvecklingar, så kallas koefficienten c_{-1} i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för **residuen** i z_0 . Eftersom koefficienten i en Laurentserieutveckling definieras genom en integral så kan vi använda residuer till att beräkna integraler. Men varför just koefficienten c_{-1} ? Låt oss motivera detta intresse av residuer.

Låt γ vara en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva kring origo. Då är

$$\int_{\gamma} z^n = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}.$$

Antag nu att f är en holomorf funktion med en singularitet i origo. Då har f en Laurentserieutveckling i någon annulus A kring 0; $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$. Denna konvergerar likformigt på γ , förutsatt γ ligger helt i A och innehåller origo. Då är

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \int_{\gamma} z^j dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Alltså är koefficienten c_{-1} viktig, och det leder till följande definition. (Denna definition har ni sett förrut, i alla fall mer eller mindre, men jag tänkte vara mera precis här).

Definition 8.4. Låt f vara en funktion med en isolerad singularitet i punkten z_0 . Då kallas koefficienten c_{-1} i f :s Laurentserieutveckling $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för f :s **residue** i punkten z_0 . Detta skriver vi som

$$\text{Res}(f, z_0) \text{ eller } \text{Res}(z_0).$$

Observation 12. Enligt definition så har vi att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

då $r > 0$ är tillräckligt litet. □

Vi kan även göra några fler fundamentala observationer:

1. Om f har en hävbar singularitet i z_0 så är $\text{Res}(f, z_0) = 0$ enligt Cauchys integralsats.
2. Om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j.$$

Detta ger att

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)f_1(z)$$

där $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$. Derivera nu $(k - 1)$ gånger, då får vi

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)f_1(z).$$

Låt nu $z \rightarrow z_0$. Då blir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + 0.$$

Alltså om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z).$$

Exempel 81. Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2}$ har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Detta ger att

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} 1 = 0.$$

□

Exempel 82. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^3}$ som har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Då är

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^3}{(e^z - 1)^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^3 = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \frac{d}{dz} \frac{z}{(e^z - 1)} = 3 \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \cdot \frac{(e^z - 1) - ze^z}{(e^z - 1)^2} = \dots = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

För att inse detta, kolla på Taylorutvecklingen av e^z . □

Om vi har flera singulariteter som ligger innanför en kurva, kan vi då använda oss av residuer för att beräkna en integral? Svaret är ja, och besvaras av Cauchys residuesats.

Sats 8.5. (Cauchys residuesats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ förutom i de isolerade singulariteterna $z_1, \dots, z_n$. Antag att γ är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis C^1 -kurva i Ω och att $z_1, \dots, z_n$ ligger inuti γ . Då gäller

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

Bevis. Vi ska använda induktion över antalet singulariteter.

Om $n = 0$:

Då är f holomorf i ett enkelt sammanhängande område som innehåller γ . Då ger Cauchys integralsats att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Vidare så har vi att $HL = 0$ så det stämmer i fallet $n = 0$, dvs inga singulariteter.

Antag nu att satsen är sann för $(n - 1)$ stycken singulariteter. Låt $\varepsilon > 0$ vara så litet så att $|z - z_n| \leq \varepsilon$ ej innehåller någon av $z_1, \dots, z_{n-1}$. Tag därför två punkter p_1 och p_2 på $|z - z_n| = \varepsilon$. Förbind p_1 och p_2 med kurvan γ i punkterna q_1 respektive q_2 . Kalla dessa γ_1 respektive γ_2 . Låt C_1 vara övre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$ från p_1 till p_2 , och låt C_2 vara undre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$. Vidare låt γ_3 vara den del av γ som går från q_1 till q_2 och låt γ_4 vara den del av γ som förbinder q_2 med q_1 , så $\gamma = \gamma_3 + \gamma_4$. (Rita en bild över detta!) Bilda nu

$$\tilde{\gamma} = \gamma_3 - \gamma_2 - C_2 - \gamma_1 + \gamma_1 - C_1 + \gamma_2 + \gamma_4$$

som är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då har vi att

$$\int_{\gamma} f - \int_{|z-z_n|} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_j).$$

Alltså är

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

så satsen är sann för n stycken singulariteter. □

Anmärkning 46. Bokens residuesats säger att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \cdot I(\gamma; z_j).$$

Så den tar hänsyn till hur många gånger γ snurrar kring z_j . Man får en liten annan formulering av satsen då, man kan inte anta att kurvan är enkel då. □

Exempel 83. Vi ska beräkna $I = \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z-1)} dz$ där γ är en "snäll" kurva som innehåller 0 och 1. Cauchys residuesats ger att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(0) + \text{Res}(1)).$$

Vi har att $z = 1$ är en enkel pol, ty $\cos \pi \neq 0$, så

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2} = -1.$$

Vidare så är $z = 0$ en pol av ordning 2, ty $\cos 0 \neq 0$, så

$$\text{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z - 1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\pi \sin(\pi z)(z - 1) - \cos(\pi z)}{(z - 1)^2} = \frac{0 - 1}{(-1)^2} = -1.$$

Detta ger att

$$I = 2\pi i(-1 - 1) = -4\pi i.$$

□

Exempel 84. Vi ska hitta residuen i $z = 0$ för funktionen $f(z) = ze^{3/z}$ och beräkna $\int_{|z|=4} f(z)dz$. Använder vi Taylorutvecklingen av e^z så får vi att

$$ze^{3/z} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{3^k}{z^k} = z + 3 + \frac{3^2}{2!z} + \frac{3^3}{3!z^2} + \dots$$

Alltså är $\text{Res}(0) = 3^2/2! = 9/2$, och enligt Cauchys residuesats så får vi att

$$\int_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi i \cdot 9/2 = 9\pi i.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 75. Låt $f(z) = p(z)/q(z)$ där p och q är holomorfa i z_0 . Antag att q har ett enkelt nollställe i z_0 , dvs av ordning 1, medan $p(z_0) \neq 0$. Visa att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 76. Bestäm alla isolerade singulariteter för följande funktioner och beräkna residuerna i singulariteterna:

(a) $\frac{e^{3z}}{z-2}$

(b) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$

(c) $\frac{\cos z}{z^2}$

(d) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

(e) $\frac{e^z}{z(z+1)^3}$

(f) $\sin\left(\frac{1}{3z}\right)$

(g) $\tan z$

(h) $\frac{z-1}{\sin z}$

(i) $\frac{z^2}{1-\sqrt{z}}$, där $\sqrt{z}$ ska tolkas som principalgrenen

INLÄMNINGSUPPGIFT 77. Antag att f har en isolerad singularitet i z_0 . Visa att $\text{Res}(f', z_0) = 0$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 78. Finns det en funktion f med en pol av ordning 1 i z_0 med $\text{Res}(f, z_0) = 0$? Finns det en funktion med en pol av ordning 2 i z_0 med $\text{Res}(f, z_0) = 0$?

Kapitel 9

Läsanvisningar till kapitel 9

Detta kapitel handlar om två olika saker. För det första så går boken igenom den så kallade argumentprincipen och Rouches sats. Därefter så beräknar man olika reella integraler med komplexa metoder. Allt bygger dock på residuer, så se till att ni har koll på Cauchys residuesats och hur man beräknar residuer. Jag tänke börja med integralerna och därefter köra argumentprincipen och Rouches sats, som vanligt så kan min framställning vara en aning annorlunda än bokens.

Trigonometriska integraler över $[0, 2\pi]$

Vi ska i detta avsnitt beräkna integraler på formen $\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ med hjälp av Cauchys residuesats. Antag att funktionen U ovan är en rationell funktion i $\cos \theta, \sin \theta$ med reella koefficienter som är ändlig på $[0, 2\pi]$. Låt $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kurva som ges av $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Observera att $e^{-i\theta} = \frac{1}{\gamma(\theta)}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$. Kom nu ihåg Eulers formler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Då gäller att

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad , \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

där $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Gör nu substitutionen $d\theta = \frac{dz}{iz}$ så får vi

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}.$$

Och nu är vi i ett läge där vi kan använda Cauchys residuesats. Låt oss kolla på ett exempel.

Exempel 85. Låt $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, och betrakta

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}.$$

Vi ska beräkna I . Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Gör nu variabelsubstitution i I . Då får vi, om vi använder $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{1 + a^2 - \frac{2a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{idz}{(z - a)(az - 1)}.$$

Vi ser nu att integranden har enkla poler i $z = a$ och $z = \frac{1}{a}$. Residuen i dessa punkter är

$$\text{Res}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{i}{a \left(z - \frac{1}{a} \right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

och

$$\text{Res}\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{i}{a(z - a)} = \frac{i}{1 - a^2}.$$

Vi måste nu kolla på olika fall för a :

Om $0 < a < 1$, då ligger a innanför γ och $1/a$ utanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Om $a > 1$, då ligger a utanför γ och $1/a$ innanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{1 - a^2} \right) = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

□

Exempel 86. Vi ska beräkna, för $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}.$$

Vi börjar med att observera att

$$a^2 + \sin^2 \theta = a^2 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}(2a^2 + 1 - \cos 2\theta).$$

Gör nu variabelbytet $2\theta = \alpha$, varvid

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{a d\alpha}{1 + 2a^2 - \cos \alpha}.$$

Låt nu $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. För $z \in \gamma([0, 2\pi])$ så är $\frac{1}{z} = e^{-it}$. Eulers formler ger att

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad ,$$

för $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Sätt nu $z = e^{it}$, varvid $dz = ie^{it}dt = izdt$. Detta ger nu att

$$\int_0^{2\pi} \frac{ad\alpha}{1 + 2a^2 - \cos \alpha} = \int_\gamma \frac{adt}{iz \left(1 + 2a^2 - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)} = \int_\gamma \frac{2aidt}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}.$$

Vi ser nu att de enkla polerna till integranden är

$$1 + 2a^2 \pm 2|a|\sqrt{1 + a^2}.$$

Vi måste nu avgöra vilken/vilka av dessa som ligger innanför γ , dvs innanför enhetscirkeln. Vi ser att

$$1 + 2a^2 + 2|a|\sqrt{1 + a^2} \geq 1$$

för alla a , så denna pol ligger utanför γ . Vidare så är det klart att

$$1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} < 1 \quad ,$$

så för att beräkna integralen så behöver vi $\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}$:s residue i denna punkt. Vi har att

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}, 1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} \right) &= \\ &= \frac{2ai}{2(1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2}) - (2 + 4a^2)} = -\frac{2ai}{4|a|\sqrt{1 + a^2}} = -\frac{i}{2\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{ad\theta}{a^2 + \sin^2 \theta} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}, 1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{1 + a^2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

□

Exempel 87. Vi ska beräkna

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} \quad , \quad a > 0.$$

Eftersom $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$ så är

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)))^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos(2\theta))^2}$$

Sätt $t = 2\theta$ varvid $dt = 2d\theta$. Då blir

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos t)^2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \cos t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ så är $a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t \neq 0$. Låt nu $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. För $z \in \gamma([0, 2\pi])$ så är $\frac{1}{z} = e^{-it}$. Eulers formler ger att

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

för $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Sätt nu $z = e^{it}$, varvid $dz = ie^{it} dt = iz dt$. Detta ger nu att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos t)^2} &= \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{dz}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} (z + \frac{1}{z}))^2 iz} = \\ &= \frac{1}{2i} \int_\gamma \frac{dz}{z (-\frac{1}{4z} (z^2 - 4(a + \frac{1}{2})z + 1))^2} = \frac{1}{2i} \int_\gamma \frac{16z^2 dz}{z (z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{8z dz}{(z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Betrakta nu nämnaren $z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1$. Kvadratkomplettering ger att

$$\begin{aligned} z^2 - 4\left(a + \frac{1}{2}\right) + 1 &= (z - (2a + 1))^2 - (2a + 1)^2 + 1 = (z - (2a + 1))^2 - (2\sqrt{a^2 + a})^2 = \\ &= (z - (2a + 1) - 2\sqrt{a^2 + a})(z - (2a + 1) + 2\sqrt{a^2 + a}). \end{aligned}$$

Låt $p_1 = (2a + 1) + 2\sqrt{a^2 + a}$ och $p_2 = (2a + 1) - 2\sqrt{a^2 + a}$, varvid vi får att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \int_\gamma \frac{z dz}{(z - p_1)^2 (z - p_2)^2}.$$

Betrakta polerna p_1 och p_2 som funktioner av $a > 0$. Då är $p_1(a)$ strikt växande på $]0, \infty[$ och $p_2(a)$ är strikt avtagande på $]0, \infty[$. Vidare så har vi att

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} p_1(a) = 2 \cdot 0 + 1 + 2\sqrt{0^2 + 0} = 1$$

och

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} p_2(a) = 2 \cdot 0 + 1 - 2\sqrt{0^2 + 0} = 1.$$

Detta betyder att $p_1(a)$ hela tiden kommer ligga utanför γ och att $p_2(a)$ hela tiden kommer ligga innanför γ . Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2}, p_2 \right).$$

Eftersom p_2 är en pol av ordning 2 så får vi att

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2}, p_2 \right) &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{d}{dz} (z - p_2)^2 \frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{(z - p_1)^2 - 2(z - p_1)z}{(z - p_1)^4} = \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{(z - p_1) - 2z}{(z - p_1)^3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{-(z + p_1)}{(z - p_1)^3} = \frac{-(p_2 + p_1)}{(p_2 - p_1)^3} = \frac{-2(2a + 1)}{-4^3(\sqrt{a^2 + a})^3} = \frac{2a + 1}{32(\sqrt{a^2 + a})^3}. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{2a + 1}{32(\sqrt{a^2 + a})^3} = \frac{\pi(2a + 1)}{2(\sqrt{a^2 + a})^3}.$$

□

Exempel 88. Låt oss beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$$

Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Då blir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \int_\gamma \frac{\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2}{5 + 4 \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} \frac{dz}{iz} = \dots = -\frac{1}{4i} \int_\gamma \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz.$$

Man kan se att integranden har enkla poler i $z = -1/2$ och i $z = -2$, och en pol av ordning 2 i origo. De enda som ligger innanför enhetscirkeln är $-1/2$ och 0. En uträkning ger att residuen för integranden i $-1/2$ är lika med $3/4$ och i 0 är den lika med $-5/4$. Nu ger Cauchys residuesats att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 2\pi i \frac{-1}{4i} (3/4 - 5/4) = \frac{\pi}{4}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 79. Beräkna

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} d\theta$$

för alla $n \geq 1$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 80. Beräkna

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta.$$

Obestämda integraler av speciella funktioner över $]-\infty, \infty[$

Vi ska försöka beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ genom att använda komplex analys. Detta gör vi genom att helt enkelt låta $f(z)$ vara den reella funktionen $f(x)$ fast i den komplexa variabeln z , så t.ex. om $f(x) = x^2 + 1$ så är $f(z) = z^2 + 1$. Låt $I_R = [-R, R]$ och låt $C_R = Re^{i\theta}$, för $0 \leq \theta \leq \pi$. Sätt $\gamma_R = C_R + I_R$. Låt nu $R > 0$ vara tillräckigt stort så att $f(z)$:s isolerade singulariteter med $\text{Im}(z) > 0$ ligger innanför γ_R . Då vet vi att

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz$$

och enligt Cauchys residuesats så har vi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

där $z_1, \dots, z_n$ är f :s isolerade singulariteter så att $\text{Im}(z_j) > 0$. Vi får då att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz.$$

Låt nu $R \rightarrow \infty$, så vi betraktar

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(z)dz.$$

Eftersom vi befinner oss på realaxeln i integralen över I_R så kan vi gå tillbaka till den reella funktionen, dvs

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(x)dx.$$

Om nu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig, så brukar vi kalla detta för (Cauchys) principalvärde och skriver

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

Observation 13. Exemplet i boken om att $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$ är viktigt, eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ inte existerar. $\square$

Så om $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig så får vi att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Alltså om vi kan visa att $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ så skulle vi ha beräknat $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Lyckligtvis så finns det ett lemma som hjälper till här:

Lemma 9.1. Om $f(z) = p(z)/q(z)$, där p och q är polynom så att

$$\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Bevis. Låt $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ och låt $q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$. Då gäller att

$$|f(z)| = \frac{|a_0/z^m + \cdots + a_m||z^m|}{|b_0/z^n + \cdots + b_n||z^n|}.$$

Så då $n \geq 2 + m$ så gäller att

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \left(\frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \right) R^{m-n} \cdot \pi R = \left(\frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \right) \pi R^{1+m-n} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$, ty $n \geq m + 2$. $\square$

Exempel 89. Låt oss beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Ni får själva kolla att I är konvergent, så

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Låt oss nu gå över till den komplexa funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$. Observera att $\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$ så lemmat ovan ger att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 ,$$

där C_R är halvcirkeln $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Eftersom ekvationen $z^4 + 1 = 0$ har lösningarna $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$ och $z_4 = e^{7\pi i/4}$, så z_1 och z_2 ligger innanför $\gamma_R = C_R + I_R$. Detta betyder att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2)).$$

Vi har att

$$\text{Res}(z_k) = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

för $k = 1, 2, 3, 4$. Detta betyder att

$$I = \frac{2\pi i}{4} (e^{-\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Denna metod blir ofta lättare än den gamla metoden med integralkalkylens huvudsats.

Anmärkning 47. Metoden som har beskrivits i detta avsnitt fungerar inte om singulariteterna ligger på $\text{Im}(z) = 0$, utan detta ska vi få lära oss i senare avsnitt.

□

Exempel 90. Vi ska beräkna

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

Vi betraktar funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

där $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ och $z_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. Låt l_r^1 vara linjesegmentet från origo till r , där $r > 0$. Vidare låt C_r vara bågen med radie r och av längd $\pi/2 + \pi/6$. Slutligen låt l_r^2 vara linjesegmentet från slutet av bågen ner till origo. Vi har följande parametriseringar av dessa kurvor

$$l_r^1(t) = t \quad 0 \leq t \leq r \Rightarrow (l_r^1)'(t) = 1$$

$$C_r(t) = re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi/3$$

och

$$l_r^2(t) = te^{i2\pi/3} \quad r \leq t \leq 0 \Rightarrow (l_r^2)'(t) = e^{i2\pi/3}.$$

Låt $\gamma_r = l_r^1 + C_r + l_r^2$ varvid vi får att

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{l_r^1} f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{l_r^2} f(z)dz.$$

Då $r > 0$ är stort nog så kommer bara polen z_2 ligga innanför γ_r , så Cauchys Residuesats ger att

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_2).$$

Eftersom polen z_2 är enkel så får vi att

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} = \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1)(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))} = \frac{1}{i\sqrt{3}(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1)} = \\ &= -\frac{1}{6}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Vi ska nu uppskatta integralen av f över C_r . Låt $z = re^{it}$ varvid $dz = rie^{it}dt$ ger att

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi/3} f(re^{it})rie^{it}dt \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \left| \frac{1}{(re^{it})^3 + 1} rie^{it}dt \right| = \\ &= \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{|r^3 e^{3it} + 1|} dt. \end{aligned}$$

Eftersom $|r^3 e^{3it} + 1| \geq |r^3 e^{3it}| = r^3$ så får vi att

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{r^3} dt = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0,$$

då $r \rightarrow \infty$. Detta betyder att $\int_{C_r} f(z) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$.

Per definition av integralen längs en kurva så får vi att

$$\int_{l_r^1} f(z)dz = \int_0^r f(l_r^1(t))(l_r^1)'(t)dt = \int_0^r f(t)dt$$

och

$$\begin{aligned} \int_{l_r^2} f(z)dz &= \int_r^0 f(l_r^2(t))(l_r^2)'(t)dt = \int_r^0 f(te^{i2\pi/3})e^{i2\pi/3}dt = \\ &= -e^{i2\pi/3} \int_0^r \frac{1}{(te^{i2\pi/3})^3 + 1} dt = -e^{i2\pi/3} \int_0^r \frac{1}{t^3 + 1} dt = -e^{i2\pi/3} \int_{l_r^1} f(z)dz. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$(1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) ,$$

dvs

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = -\frac{2\pi i(1 + i\sqrt{3})}{6(1 - e^{i2\pi/3})} = -\frac{2\pi i(1 + i\sqrt{3})}{6(\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3}))} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 81. *Beräkna*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 82. *Beräkna*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Obestämda integraler av trigonometriska funktioner

Vi ska fortsätta med att beräkna principalvärdet för integraler på formen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx ,$$

där P och Q är polynom. För att beräkna dessa integraler så använder vi samma metod som i föregående avsnitt. Det man observerar är att

$$\operatorname{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad \operatorname{Im}(e^{it}) = \sin t ,$$

så

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right)$$

och

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right).$$

Konstruktionen med kurvan $\gamma = C_R + I_R$ kan man använda även här, och Jordans lemma hjälper en på traven:

Lemma 9.2. (Jordans lemma)

Om $m > 0$ och P och Q är polynom så att

$$\text{grad}(Q) \geq 1 + \text{grad}(P)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz = 0 ,$$

där C_R är en halvcirkel med radie R .

Bevis. Parametrisera C_R så att

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz = \int_0^\pi g(t) dt ,$$

där

$$g(t) = e^{im(Re^{it})} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} Rie^{it} .$$

Vi har att

$$|e^{im(Re^{it})}| = e^{-mR \sin t} .$$

Från antagandet i lemmat så vet vi att det finns en konstant K så att

$$\left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \leq \frac{K}{R}$$

för stora R . Detta ger att

$$|g(t)| \leq e^{-mR \sin t} \frac{K}{R} R = K e^{-mR \sin t} .$$

Så

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz \right| \leq K \int_0^\pi e^{-mR \sin t} dt .$$

Man kan visa att, och jag uppmanar er att göra det,

$$\int_0^\pi e^{-mR \sin t} dt < \frac{\pi}{mR} .$$

Då får vi att

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz \right| \leq K \frac{\pi}{mR} \rightarrow 0 ,$$

då $R \rightarrow \infty$.

□

Exempel 91. Vi ska beräkna P. V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$. Sätt

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2},$$

så har f poler i $\pm i$. Eftersom

$$\text{grad}((z^2+1)^2) \geq 1 + \text{grad}(z^3)$$

så kan vi använda oss av Jordans lemma, så

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0,$$

där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet. Eftersom i är den enda polen i övre halvplanet, så ger Cauchys residuesats att

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \text{Im}(2\pi i \text{Res}(i)).$$

Om man beräknar residuen så får man $\text{Res}(i) = \frac{1}{4e}$, vilket betyder att

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \text{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{1}{4e} \right) = \frac{\pi}{2e}.$$

□

Exempel 92. För $a > 0$ låt oss beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx.$$

Eftersom $\sin x$ är en udda funktion så kommer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+a^2)^2} dx = 0.$$

Detta ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(x^2+a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx.$$

Låt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{iz}}{(z+ia)^2(z-ia)^2}.$$

Observera att enda polen f har i övre halvplanet är ia . Låt nu C_R vara en halvcirkel kring origo i övre halvplanet med radie R , och låt l_R vara linjesegmentet

från $-R$ till R . Slutligen låt $\gamma = C_R + l_R$, så γ är en sluten kurva som innehåller polen ia . Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ia).$$

Vidare så ser vi att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{l_R} f(z) dz.$$

Men eftersom graden till polynomet i nämnaren i f är större än 1 plus graden av polynomet i täljaren så ger Jordans lemma i boken att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Vidare så ser vi att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{l_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx ,$$

så vi behöver bara beräkna residuen för f enligt ovan. Vi ser att polen ia är av ordning 2, så

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} (z - ia)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z + ia)^2} = \\ \lim_{z \rightarrow ia} \frac{ie^{iz}(z + ia)^2 - 2(z + ia)e^{iz}}{(z + ia)^4} &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{ie^{iz}(z + ia) - 2e^{iz}}{(z + ia)^3} = \\ &= \frac{-2ae^{-a} - 2e^{-a}}{-i8a^3} = \frac{e^{-a}(a + 1)}{i4a^3}. \end{aligned}$$

Lägger vi ihop allting så får vi att

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ia) = 2\pi i \frac{e^{-a}(a + 1)}{i4a^3} = \\ &= \frac{\pi(a + 1)}{2a^3 e^a}. \end{aligned}$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 83. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(3x)}{x^4 + 4} dx.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 84. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x - 3i} dx.$$

Integraler med singulariteter på reella axeln

Detta avsnitt handlar om hur man beräknar integraler med singulariteter på den reella axeln. Det man gör är att man lägger en halvcirkel med godtyckligt liten radie runt singulariteten och därefter så använder man Cauchys residuesats. För att beräkna integralen längs denna halvcirkel, eller någon cirkelbåge, kring en singularitet använder man följande lemma:

Lemma 9.3. Om f har en enkel pol i $z = c$ och T_r är en cirkelbåge kring c definierad genom $c + re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, då gäller att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, c).$$

Bevisidé. Eftersom f har en enkel pol så har den en Laurentserie på formen

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k$$

in någon punkterad omgivning till c , säg $0 < |z - c| < R$. För $0 < r < R$ så är

$$\int_{T_r} f(z) dz = a_{-1} \int_{T_r} \frac{dz}{z - c} + \int_{T_r} g(z) dz,$$

där

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k.$$

Då är g holomorf i en omgivning till c och det finns ett M så att

$$|g(z)| \leq M$$

för $|z - c| < R_1$. Så för $0 < r < R_1$ så har vi

$$\left| \int_{T_r} g(z) dz \right| \leq M(\theta_2 - \theta_1)r \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow 0^+$. Använder vi nu parametriseringen av T_r så får vi att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, c).$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 85. Fyll i detaljerna i beviset av lemmat ovan, dvs skriv ner hela beviset i detalj.

Dessa metoder lär man sig lättast om man räknar lite. Därför ger jag ett exempel.

Exempel 93. Låt oss beräkna $I = \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x+1} dx$. Vi har att Jordans lemma ger oss

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = 0.$$

Vidare så ger lemmat från detta avsnitt att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = -\pi i \text{Res}(-1),$$

där S_r är en halvcirkel kring singulariteten $z = -1$. Eftersom

$$\text{Res}(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{e^{2iz}}{z+1} = e^{-2i}$$

så får vi att

$$I = \pi i e^{-2i}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 86. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 87. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Integraler av ”flervärda” funktioner

Även i detta avsnitt så beräknar vi integraler, fast nu är integranden en ”flervärd” funktion. Jag tycker att ni ska gå igenom detta avsnitt och räkna några uppgifter. Jag kommer här bara gå igenom några exempel så jag hoppas det är tillräckligt.

Exempel 94. Vi ska beräkna $\int_0^\infty \frac{\ln(px)}{q^2+x^2} dx$ för $p, q > 0$. Sätt $g(z) = \frac{\text{Log}(pz)}{q^2+z^2}$. Då gäller att $\text{Re}(\text{Log}(z)) = \ln|z|$. Då är $\text{Log}(z)$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Observera att g har en enkel pol i iq . Då är

$$\text{Res}(g, iq) = \frac{\ln(pq)}{2qi} + \frac{\pi}{4q}.$$

Observera att vi inte behöver något belopp på pq då vi tar den naturliga logaritmen, eftersom både p och q är icke-negativa. Låt $0 < r < q < R$ och låt S_r vara en halvcirkel kring origo med godtyckligt liten radie r i övre halvplanet, och låt C_R vara en halvcirkel kring origo med stor radie R . Låt $\gamma = C_R + [-R, r] + S_r + [r, R]$. Då ger Cauchys residuesats att

$$\int_\gamma g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, iq) = \frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q}.$$

Vi har att

$$\int_r^R g = \int_r^R \frac{\log(pz)}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot $\int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2+z^2} dz$ då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Vidare har vi att

$$\int_{-R}^{-r} g = \int_{-R}^{-r} \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz = \int_R^r \frac{\text{Log}(-pz)}{q^2 + (-z)^2} (-dz) = \int_r^R \frac{\text{Log}(pz) + \pi i}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$.

Vi gör nu ett variabelbyte, som ger att

$$\left| \int_{C_R} g \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\text{Log}(Re^{i\theta})}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\ln|R| + i\theta}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - q^2} \pi R \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$. Jag lämnar åt er att visa att $\left| \int_{S_r} g \right| \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0^+$. Detta ger att

$$\int_\gamma g \rightarrow \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Så vi får att

$$\frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q} = 2 \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz.$$

Om vi jämför real och imaginärdel så får vi att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(px)}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi \ln(pq)}{2q}$$

och

$$\int_0^\infty \frac{1}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2q}.$$

□

Exempel 95. Vi ska beräkna

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{1+x^2} dx.$$

Låt $f(z) = \frac{z^{2/3}}{1+z^2}$. Välj grenen för $z^{2/3}$ att vara den positiva real-axeln. Vi ska nu bilda en sluten kurva γ som innehåller f 's enkla poler $\pm i$. Låt γ_1 vara linjestycket från r till R , där $0 < r < 1 < R$, på ovensidan av realaxeln, dvs $\gamma_1(t) = t$ där $r \leq t \leq R$. Vidare låt C_R vara cirkeln med radie R som är orienterad moturs och slutar på undersidan av real-axeln. Därefter låter vi γ_2 vara linjestycket på undersidan av real-axeln från R till r (dvs $\gamma_2(t) = te^{2\pi i}$ för $R \leq t \leq r$), och slutligen låt C_r vara den medurs orienterade cirkeln med radie r (här är det förstås inte någon cirkel utan en cirkelformad kurva som C_R). För stora R så kommer $\gamma = \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_r$ innehålla polerna $\pm i$. Vi vill använda Cauchys Residuesats, och eftersom polerna ligger innanför γ så beräknar vi residuerna i dessa punkter. Vi får att

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{2/3}}{z+i} = \frac{i^{2/3}}{2i} = \frac{e^{\pi i/3}}{2i}$$

och

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^{2/3}}{z-i} = \frac{(-i)^{2/3}}{-2i} = -\frac{e^{\pi i}}{2i} = \frac{1}{2i}$$

Cauchys Residuesats ger nu att

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi i/3}}{2i} + \frac{1}{2i} \right) = \pi(e^{\pi i/3} + 1).$$

Vi börjar med att observera att

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt \rightarrow \int_0^\infty \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt$$

då $r \rightarrow 0$ och $R \rightarrow \infty$. Vidare så observerar vi att

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_R^r \frac{(te^{2\pi i})^{2/3}}{(te^{2\pi i})^2+1} e^{2\pi i} dt \rightarrow -e^{4\pi i/3} \int_0^\infty \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt$$

då $r \rightarrow 0$ och $R \rightarrow \infty$.

Vi vill alltså uppskatta $\left| \int_{C_r} f \right|$ och $\left| \int_{C_R} f \right|$. Vi börjar på C_R : Eftersom $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1$ så är

$$\left| \frac{z^{2/3}}{z^2+1} \right| \leq \frac{|z|^{2/3}}{|z|^2-1} = \frac{R^{2/3}}{R^2-1},$$

på C_R . Detta ger, eftersom $l(C_R) = 2\pi R$, att

$$\left| \int_{C_R} f(z) \right| \leq \frac{R^{2/3} 2\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$.

På C_r så har vi att

$$\left| \frac{z^{2/3}}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{|z|^{2/3}}{1 - |z|^2} = \frac{r^{2/3}}{1 - r^2},$$

pga att $|z^2 + 1| \geq 1 - |z|^2$. Detta ger att

$$\left| \int_{C_r} f(z) \right| \leq \frac{r^{2/3} 2\pi r}{1 - r^2} \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow 0$.

Alla uträkningar ovan ger att

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = (1 - e^{4\pi i/3}) \int_0^{\infty} \frac{t^{2/3}}{t^2 + 1} dt.$$

Enligt Cauchys Residuesats så får vi att

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2/3}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi(e^{\pi i/3} + 1)}{1 - e^{4\pi i/3}} = \pi.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 88. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/e}(x+1)^2}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 89. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/3}}{t^2 + 1} dt.$$

Argumentprincipen och Rouches sats

Meromorfa funktioner är holomorfa funktioner med poler. Med dessa så kan vi med hjälp av nollställen och poler beräkna en viss typ av integraler. Mer precist har vi:

Sats 9.4. (Argumentprincipen)

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en meromorf funktion, där Ω är ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{C}$. Låt γ vara en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Antag att f saknar poler och nollställen på γ . Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f),$$

där $N_p(f)$ är summan av ordningen av poler innanför γ och $N_0(f)$ är summan av ordningen av nollställena innanför γ .

Bevis. Se boken. □

Denna sats ska vi använda till att visa Rouches sats som uttalar sig om nollställen för funktioner.

Sats 9.5. (Rouches sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att

$$|f(z)| < |g(z)|$$

på en enkel, sluten styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva γ i Ω . Då måste f och g ha samma antal nollställen innanför γ (räknat med multiplicitet).

Bevis. Säg att $g = f + h$, där $|h| < |f|$ på γ . Detta ger att $f \neq 0$ på γ . Betrakta homotopin $F_t(z) = F(t, z) = f(z) + th(z)$, $0 \leq t \leq 1$, som överför f till g . På γ har vi att

$$|F_t| \geq |f| - t|h| \geq |f| - |h| > 0.$$

Låt $N(t)$ vara antalet nollställen till F_t i det inre av γ . Då ger argumentprincipen att

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F'_t(z)}{F_t(z)} dz.$$

Eftersom N är definierad av en integral av en kontinuerlig funktion, så måste N vara kontinuerlig. Vidare så antar N bara heltalsvärden (den räknar ju antal!). Därför måste $N(0) = N(1)$ vilket betyder att antalet nollställen hos $F_0 = f$ är samma som antalet nollställen hos $F_1 = g$. □

Rouches sats säger att vi kan göra "små" holomorfa störningar och även ha lika många nollställen.

Exempel 96. Vi ska undersöka hur många nollställen $f(z) = z^3 + 2 + e^{-z}$ har i det högra halvplanet. Låt $g(z) = z^3 + 2$ och $h(z) = e^{-z}$. Då är $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Låt γ vara den slutna kurva som går i en halvcirkel C_R från iR till $-iR$ och därefter linjen l_R från iR till $-iR$. Då gäller att

$$|g(z)| = |z^3 + 2| \geq |z|^3 - 2 = R^3 - 2$$

då $R^3 > 2$ på C_R , och

$$|h(z)| = |e^{-z}| = \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z}} \leq 1$$

på C_R . På linjen l_R så gäller att

$$|g(iy)| = |(iy)^3 + 2| = \sqrt{y^6 + 4} \geq 2$$

och

$$|h(iy)| = |e^{-iy}| = 1.$$

Alltså är $|g(z)| > |h(z)|$ på γ .

Vi kollar nu på hur många nollställen g har innanför γ . Löser vi $g(z) = 0$ så ser vi att den har 2 stycken nollställen innanför γ om $R > 2^{1/3}$. Då ger Rouches sats att g och f har samma antal nollställen innanför γ . Eftersom $R > 2^{1/3}$ är godtycklig så följer det att f har två nollställen i högra halvplanet. $\square$

Exempel 97. Betrakta $p(z) = z^3 + 3z - 1$. Vi påstår att p har alla sina nollställen i $B(0, 2)$. Vi ser att p har exakt tre nollställen enligt algebrans fundamentalsats. Låt $r(z) = z^3$ som har alla sina nollställen i origo, så speciellt i $B(0, 2)$. På $\partial B(0, 2)$ så är $|r(z)| = 8$. Vidare så är $q(z) = 3z - 1$ en liten störning av $r(z)$. På $\partial B(0, 2)$ så är

$$|q(z)| = |3z - 1| \leq 3 \cdot 2 + 1 < |r(z)|.$$

Rouches sats ger att r och p har lika många nollställen i $B(0, 2)$. $\square$

Exempel 98. Låt $f \in \mathcal{O}(B(0, 1 + \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Antag att $f(0) = 3$ och att $|f(z)| > 7$ då $|z| = 1$. Vi påstår att f har ett nollställe i $B(0, 1)$. Låt $h(z) = -3$. Vi har att $|f(z)| > |h(z)|$ på $\partial B(0, 1)$ så har f och $g = f + h$ lika många nollställen i $B(0, 1)$. Men $g(0) = f(0) + h(0) = 0$ så f måste ha ett nollställe i $B(0, 1)$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 90. Bestäm antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $f(z) = z^4 + 4z^3 - 4z^2 - 4z - 5$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 91. Bestäm antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $f(z) = 2 - 2z^2 + z^4 + e^{-z}$.

Rouches sats ger i sin tur följande sats

Sats 9.6. (Öppna avbildningssatsen)

En holomorf, icke-konstant funktion är öppen, dvs bilden av öppna mängder är öppna.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, där Ω är ett område i $\mathbb{C}$. Tag $V \subset \Omega$ öppen. Vi ska visa att $f(V)$ är öppen. Eftersom V är öppen så finns det en boll $\overline{B(a, r)} \subset V$ där $a \in V$. Enligt identitetssatsen så finns det ett r så att $B(a, r)$ är en sådan boll, och så att om vi definierar

$$m = \inf\{|f(z) - f(a)| : z \in \partial B(a, r)\}$$

så är $m > 0$. Detta är inget annat än avståndet från $f(a)$ till $f(\partial B(a, r))$. Tag en $w \in B(f(a), m)$ och sätt $g(z) = f(z) - w$. Vi ska nu använda Rouches sats:

Sätt $g_0(z) = f(z) - f(a)$. Denna har minst ett nollställe i $B(a, r)$. Sätt $g_1(z) = f(a) - w$ som då är konstant. För $z \in \partial B(a, r)$ är nu

$$|g_0(z)| = |f(z) - f(a)| \geq m > |f(a) - w| = |g_1(z)|$$

och därför har $g_0 + g_1 = g$ samma antal nollställen i $B(a, r)$ som g_0 , dvs minst 1. Vad betyder nu detta? Jo, för vårt godtyckliga val av $w \in B(f(a), m)$ så finns ett $z_0 \in B(a, r)$ så att $0 = g(z_0) = f(z_0) - w$, så $f(z_0) = w$. Därför är $B(f(a), m) \subset f(B(a, r)) \subset f(V)$, så $f(V)$ innehåller en boll, så $f(V)$ är öppen. $\square$

Följd 9.7. Låt f vara en holomorf avbildning definierad på ett område Ω . Då är $f(\Omega)$ ett område.

INLÄMNINGSUPPGIFT 92. Använd öppna avbildningssatsen för att visa maximumprincipen.

Slutligen så kan ni läsa avsnittet om serier själva.

Kapitel 10

Läsanvisningar till kapitel 10

De avsnitt som ingår i detta kapitel är 10.2.1 (åtminstone definitionen av konform avbildning), 10.2.5 (denna sats har ni sett förrut), 10.2.7 och 10.3.1 – 10.3.5. Jag kommer här gå igenom vissa bitar och lämna resten åt er själva att läsa.

Låt oss introducera så kallade konforma avbildningar, dvs avbildningar som bevarar vinklar mellan två kurvor i en speciell punkt. Detta betyder att om γ_1 och γ_2 möts i en punkt z , så är vinkeln mellan dessa lika med vinkeln mellan $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ i punkten $f(z)$. Avslutningsvis så bör man känna till, utan bevis, följande sats:

Sats 10.1. (Riemanns avbildningssats)

Om Ω och $\tilde{\Omega}$ är enkelt sammanhängande områden som inte är lika med $\mathbb{C}$, så finns en biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$.

Anmärkning 48. En avbildning f är **biholomorf** om den är holomorf med holomorf invers. $\square$

Anmärkning 49. Kom ihåg att detta bara är en existenssats, så vi vet inte hur denna avbildning ser ut! $\square$

Bokens sats säger att om $\Omega \subset \mathbb{C}$ är enkelt sammanhängande så att $\Omega \neq \mathbb{C}$ så finns det en biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow B(0, 1)$. Satsen jag formulerade följer från denna, ty om Ω och $\tilde{\Omega}$ är som ovan så finns det biholomorfa avbildningar $f: \Omega \rightarrow B(0, 1)$ och $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow B(0, 1)$. Detta ger att $\tilde{f}^{-1} \circ f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ också är biholomorf, som är min formulering av Riemanns avbildningssats.

Möbiusavbildningar

Låt oss börja med några exempel på avbildningar.

- Translation: Detta är en funktion $f(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$. En translation flyttar ett objekt c ”steg”.

- Rotation: Funktionen $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, roterar ett objekt med θ radianer moturs.
- Skalning: $f(z) = \rho z$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, är en skalningsfunktion, så den förminskar eller förstörar objekt. Speciellt har vi att om $w = f(z)$, för w_1, w_2 i w -planet

$$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)| = |\rho z_1 - \rho z_2| = \rho |z_1 - z_2|.$$

- Affina avbildningar: Detta är en avbildning på formen $f(z) = az + b$. Vi kan skriva f som en komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

där f_1 är en rotation, f_2 en skalning, och f_3 en translation.

- Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$. Denna vänder "ut-och-in" på områden.

Dessa olika typer av avbildningar är viktiga för så kallade Möbiusavbildningar, så det är dags att definiera dessa:

Definition 10.2. En Möbiusavbildning är en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som definieras genom

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$.

Anmärkning 50. Villkoret $ad - bc \neq 0$ betyder att determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ska vara nollskild. □

Observation 14.

- Om $c = 0$, då är $ad \neq 0$ och

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

är en affin avbildning.

- Om $c \neq 0$, då har $f(z)$ en pol i $z = -\frac{d}{c}$.
- Om $a \neq 0$, då har $f(z)$ ett nollställe i $z = -\frac{b}{a}$.

□

Anmärkning 51. Möbiusavbildningar är konforma avbildningar. $\square$

Affina avbildningar kan vi betrakta som avbildningar $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ med $\infty \mapsto \infty$. Då blir dessa avbildningar bijektiva. Om vi betraktar inversionsavbildningen som en avbildning $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ med $0 \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto 0$ så blir även denna bijektiv. Vad händer då om vi betraktar Möbiusavbildningar som avbildningar på $\mathbb{C}_\infty$? Jo, de blir också bijektiva, och om $c \neq 0$ så $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto \frac{a}{c}$. Vidare så ges dess derivata av

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz + d)^2}$$

och f :s invers av

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Observation 15. Notera att f^{-1} också är en Möbiusavbildning med $\infty \mapsto -\frac{d}{c}$ och $\frac{a}{c} \mapsto \infty$. $\square$

Vi har följande viktiga sats om Möbiusavbildningar:

Sats 10.3. Låt f vara en Möbiusavbildning. Då gäller att

1. f kan uttryckas som en sammansättning av en ändlig följd av translationer, rotationer, skalningar och inversioner.
2. $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ är bijektiva.
3. f avbildar mängden {linjer, cirklar} på sig själv.

Bevis. Se boken. $\square$

Slutsats (3) i satsen ovan betyder speciellt att en linje kan avbildas på en cirkel och vice versa. För Möbiusavbildningar har vi en annan viktig sats, nämligen:

Sats 10.4. (Avbildningsprincipen)

Låt f vara en Möbiusavbildning och låt γ vara en enkel styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}_\infty$. Då är $\mathbb{C} \setminus \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ en disjunkt union av två områden. Vidare så är $\gamma^* := f(\gamma)$ en kurva i $\mathbb{C}_\infty$ och $\mathbb{C} \setminus \gamma^* = f(\Omega_1) \cup f(\Omega_2)$.

Anmärkning 52. Rita en bild av avbildningsprincipen. $\square$

Möbiusavbildningar är tillräckliga för att avbilda tre valfria punkter på tre andra valfria punkter, mer precis har vi

Sats 10.5. Antag att $a_j \in \mathbb{C}_\infty$ för $j = 1, 2, 3$ är distinkta punkter och antag även att $b_j \in \mathbb{C}_\infty$ för $j = 1, 2, 3$ är distinkta punkter. Då finns det en Möbiusavbildning f så att $f(a_j) = b_j$.

Bevis. Se boken. $\square$

Anmärkning 53. Beviset av satsen är väldigt viktigt, eftersom den berättar precis hur Möbiusavbildningen ska se ut. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 93. Hitta en Möbiusavbildning som avbildar 0 på i , 1 på 2 och -1 till 4.

INLÄMNINGSUPPGIFT 94. Hitta en Möbiusavbildning som avbildar $\overline{B(0,1)}^c$ på $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Nu till några exempel.

Exempel 99. Betrakta $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Detta är en Möbiusavbildning eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Vi har att

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}.$$

Låt $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = 2z$ och $f_4(z) = z + 1$. Då är

$$f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z).$$

Låt oss kolla hur f avbildar $|z| = 1$. Först så translaterar f_1 cirkeln. Efter detta så blir cirkeln en linje via inversionen. Därefter så förlänger vi linjen med f_3 och slutligen så translaterar vi linjen igen. Alltså avbildar f cirkeln $|z| = 1$ på en linje. Eftersom en linje bestäms av två punkter så tar vi två punkter på enhetscirkeln och avbildar dessa med f :

$$i \mapsto \frac{i+1}{i-1} = i$$

och

$$-1 \mapsto 0.$$

Den enda linjen som går genom 0 och i är $\operatorname{Re}(z) = 0$. Så bilden av $|z| = 1$ under f är $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Låt oss kolla med avbildningsprincipen vart det inre av $|z| = 1$ och det yttre hamnar. Tag därför en punkt innanför, t.ex. $z = 0$. Denna avbildas av f till -1 , så vi drar slutsatsen att allt innanför cirkeln avbildas till vänstra halvplanet ($\operatorname{Re}(z) < 0$), och avbildar allt utanför cirkeln till högra halvplanet ($\operatorname{Re}(z) > 0$). (Tag en annan punkt och testa!) $\square$

Exempel 100. Vi ska beskriva bilden av $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ under avbildningen $f(z) = \frac{z-i}{z}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i \neq 0$$

så är f en Möbiusavbildning.

För att få koll på hur detta område avbildas med f ska vi använda oss av argumentprincipen. Problemet är att vi inte har några kurvor att avbilda. Därför kollar vi vad som händer med $\operatorname{Im} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = 1$.

Vi börjar med $\operatorname{Im} z = 0$. Eftersom f har en pol i $z = 0$ som ligger på $\operatorname{Im} z = 0$ så måste denna linje avbildas på en linje. En linje bestäms av två punkter på $\operatorname{Im} z = 0$, t.ex. $z = -1$ och $z = 1$. Dessa ger att

$$f(-1) = 1 + i$$

och

$$f(1) = 1 - i.$$

Vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z = 0$ på $\operatorname{Re} z = 1$. För att bestämma hur $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas, så tar vi en punkt med $\operatorname{Im} z > 0$ och använder avbildningsprincipen, Tag t.ex. $z = i$, då får vi att $f(i) = 0$, så vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z > 0$ på $\operatorname{Re} z < 1$. Låt oss nu kolla på hur f avbildar $\operatorname{Im} z = 1$. Funktionen f saknar pol på $\operatorname{Im} z = 1$, därför måste $\operatorname{Im} z$ avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter. Vi har att

$$\begin{aligned} f(-1 + i) &= \frac{1}{2}(1 + i), \\ f(i) &= 0 \end{aligned}$$

och

$$f(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - i)$$

där $-1 + i$, 0 och $1 + i$ ligger på $\operatorname{Im} z = 1$. Ur detta får man cirkelns ekvation, vi får räkna lite själva också, $|z - 1/2| = 1/2$. Men hur avbildas $\operatorname{Im} z < 1$. Tag en punkt med $\operatorname{Im} z < 1$, t.ex. $i/2$, så får vi att $f(i/2) = -1$, så z med $\operatorname{Im} z < 1$ avbildas utanför cirkeln $|z - 1/2| = 1/2$.

Alla uträkningar ovan ger att området A avbildas via f till

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1, |z - 1/2| > 1/2\}.$$

Rita en bild över vad som händer!

□

Exempel 101. Låt

$$f(z) = \frac{2 + z}{3 - 2z}.$$

Låt oss bestämma $f(B(0, 1))$.

Vi börjar med att konstatera att f är en Möbiusavbildning, ty

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 \neq 0.$$

Eftersom f inte har någon pol på $|z| = 1$ så kommer denna cirkel avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter, så vi får att

$$f(1) = 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{5}$$

$$f(i) = \frac{4}{13} + \frac{7i}{13}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{8}{5}| = \frac{7}{5}$. Eftersom $f(0) = \frac{2}{3}$, och $\frac{2}{3}$ ligger i $B(\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$ så ger avbildningsprincipen att

$$f(B(0, 1)) = B\left(\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

□

Exempel 102. Låt $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2, |z - 1| < 5\}$ och låt $f(z) = \frac{z-2i}{z-4}$. Låt oss bestämma $f(D)$.

Vi börjar med att konstatera att f är en Möbiusavbildning, ty

$$\begin{vmatrix} 1 & -2i \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2i \neq 0.$$

Det vi måste göra är att se vart linjen $\operatorname{Re} z = 2$ och vart cirkeln $|z - 1| = 5$ avbildas under f . Eftersom det inte finns någon pol på $\operatorname{Re} z = 2$ så kommer denna linje avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter, så låt oss ta tre punkter och se vart dessa avbildas:

$$f(2) = -1 + i$$

$$f(2 + 2i) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$f(2 - 2i) = \frac{1}{2} + \frac{5i}{4}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{i}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vidare, eftersom $f(3) = -3 + 2i$, som ligger utanför cirkeln, så ger avbildningsprincipen att

$$f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2\}) = \overline{B\left(\frac{i}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}^c.$$

Kvar att göra är att bestämma vart cirkeln $|z - 1| = 5$ avbildas. Eftersom f inte har någon pol på denna cirkel så kommer cirkeln avbildas på en cirkel. Som vi vet så bestäms en cirkel av tre punkter:

$$f(6) = 3 - i$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} + \frac{i}{4}$$

$$f(1-5i) = \frac{16}{17} + \frac{13i}{17}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{7}{4} + \frac{3i}{8}| = \frac{5\sqrt{5}}{8}$. Eftersom $f(0) = \frac{i}{2}$ så ger avbildningsprincipen att

$$f(B(1, 5)) = B\left(\frac{7}{4} - \frac{3i}{8}, \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^c.$$

Lägger vi ihop dessa två uträkningar så ser vi att

$$f(D) = B\left(\frac{7}{4} - \frac{3i}{8}, \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^c \cap B\left(\frac{i}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^c.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 95. Låt

$$f(z) = \frac{1}{2\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - 1}.$$

Bestäm $f(B(0, 1))$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 96. Låt $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| < 2\}$ och låt $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$. Bestäm $f(D)$.

Automorfier och Schwarz lemma

Vi ska studera en speciell typ av avbildningar ett tag, nämligen så kallade automorfier:

Definition 10.6. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. En biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow \Omega$ kallas för en **automorfi**. Vi skriver mängden av automorfier på Ω som $\operatorname{Aut}(\Omega)$.

Vi ska speciellt studera $\operatorname{Aut}(B(0, 1))$ och $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. För $\alpha \in B(0, 1)$ sätt

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Boken visar att $\varphi_\alpha: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ är en biholomorf avbildning i avsnitt 10.3.3.1 med invers $\varphi_{-\alpha}$. Man kan till och med visa följande sats:

Sats 10.7. $f \in \text{Aut}(B(0,1))$ om och endast om det finns $\omega, \alpha \in B(0,1)$ så att $f(z) = \omega \cdot \varphi_\alpha(z)$.

Bevis. Att $f(z) = \omega \cdot \varphi_\alpha(z)$ är en automorfi nämnde ovanför satsen. Å andra sidan, låt $f \in \text{Aut}(B(0,1))$. Sätt $b = f(0)$, och betrakta avbildningen $\varphi_b \circ f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$. Denna är då en automorfi av disken. Observera att $\varphi_b \circ f(0) = 0$. Det finns då ett $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ så att $\varphi_b \circ f = \omega z$ för alla $z \in B(0,1)$ (se nedan). Då gäller att

$$f(z) = \varphi_b^{-1}(\omega z) = \varphi_{-b}(\omega z) = \omega \frac{z + b\omega^{-1}}{1 + b\overline{\omega^{-1}}z}.$$

Alltså är $f(z) = \omega \varphi_\alpha$ där $\alpha = -b\omega^{-1}$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 97. Låt $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ vara en holomorf avbildning med $f(0) = 0$. Då är f biholomorf om och endast om det finns ett $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ så att $f(z) = \omega z$ för alla $z \in B(0,1)$.

Denna inlämningsuppgift säger att de enda biholomorfa avbildningar som fixerar origo måste vara en rotation, ty $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ precis är på formen $e^{i\theta}$.

Sats 10.8. (Schwarz lemma)

Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$. Antag att

(a) $|f(z)| \leq 1$ för alla z .

(b) $f(0) = 0$.

Då gäller att $|f(z)| \leq |z|$ och $|f'(0)| \leq 1$. Vidare om $|f(z)| = |z|$ för något nollskilt z eller om $|f'(0)| = 1$ då är f en rotation, dvs $f(z) = \omega z$ för $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$.

Bevis. Se boken. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 98.

(a) Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$ vara sådan att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0,1)$ och $f(z_0) = 0$, $z_0 \in B(0,1)$. Visa att

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \right|.$$

(b) Låt nu $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ vara holomorf. Visa att

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \right|.$$

Det avslutande resultatet karakteriserar automorfierna av $\mathbb{C}$:

Sats 10.9. $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ om och endast om $f(z) = az + b$ för $a, b \in \mathbb{C}$ med $a \neq 0$.

Anmärkning 54. Inget liknande resultat finns om automorfier av $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. $\square$