

Kapitel 0

Introduktion

Jag tänkte börja med en kort introduktion där jag kommer förklara hur dessa läsanvisningar är upplagda, samt ge några tips hur man läser matematik.

Låt mig börja att berätta om dessa läsanvisningar. De kommer att följa kursboken med inslag av andra exempel samt andra satser och bevis. Detta kommer att ge er möjligheten att, ibland, se två olika framställningar av kursmaterialet. I detta material kommer även inlämningsuppgifter vara inbakade. Materialet är utformat på sådant sätt att ni ska (ganska) lätt kunna följa boken och ge er mer insikt om kursmaterialet.

Boken förutsätter att ni har läst och kan elementär mängdlära. Definitioner av unioner, snitt, komplement och dylikt är ett måste för att kunna läsa denna kurs. Om ni inte har detta färskt i minnet så bör ni omedelbart kolla upp det.

Hur ska man läsa en matematikbok? Matematik, som ni redan vet, består av axiom, definitioner, satser och bevis av satser. När man ser en definition så ska man först analysera den och se vad som definieras. Därefter är det lämpligt att försöka ge ett exempel på ett objekt som uppfyller villkoren i definitionen. Därefter så kan man försöka analysera definitionen mera. Vad säger villkoren i definitionen? Försök skapa bilder och mer förståelse.

Efter definitioner så kommer satser. När man för första gången ser en sats så bör man först läsa satsen i lugn och ro, och försöka förstå all terminologi i satsen. Sen kan man försöka förstå vad satsen säger, dvs försök skapa en bild av vad satsen säger. Kan du hitta några enkla exempel som uppfyller antagandena och slutsatserna i satsen? Försök nu bevisa satsen utan att kolla på det befintliga beviset. Därefter är det dags att gå igenom det befintliga beviset. Då man läser ett bevis så ska man använda sig av papper och penna. Man skriver upp och går igenom varje liten detalj så att man har verkligen har förstått beviset. Därefter så går man igenom beviset igen och skriver upp en bevisidé, dvs den röda tråden i beviset. Bevisidén ska vara sådan att man lätt kan återskapa hela beviset.

Efter man har gjort allt detta så kan man börja fundera på antagandena i satsen. Kan man ta bort något/några av antagandena och ändå få samma slutsats? Får man en annan slutsats med de nya antagandena? Sådana här funderingar

ger en bra förståelse för satsen och beviset.

Kapitel 1

Läsanvisningar till kapitel 1

Första kapitlet består största delen av saker som ni borde veta, eller åtminstone känna till litegrann. Jag kommer att gå igenom så gott som allt som finns i detta kapitel och lämna vissa saker som övning.

I denna kurs kommer vi studera de komplexa talen $\mathbb{C}$. I en typisk abstrakt algebra kurs så får man lära sig att $\mathbb{C}$ är ett exempel på en **kropp** (eng. field), dvs en mängd K med två binära operationer $+$ och $\cdot$ som uppfyller att

1. K är sluten under $+$ och $\cdot$.
2. För varje $x \in K$ så finns det en unik $y \in K$ så att $x + y = y + x = 0$ (Additiv invers)
3. För varje $x, y \in K$ så är $x + y = y + x$ (Addition är kommutativ)
4. För varje $x \in K$ så gäller att $x + 0 = 0 + x = x$ (Additiv identitet)
5. För varje $x \in K$ så gäller att $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (Multiplikativ identitet)
6. $\cdot$ är en associativ operation, dvs $(xy)z = x(yz)$ för varje $x, y, z \in K$
7. För varje x, y, z så gäller att $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ och $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. (Distributiva lagar)
8. För varje $x \in K$ så finns det en unik $y \in K$ så att $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (Multiplikativ invers)
9. För varje $x, y \in K$ så gäller att $x \cdot y = y \cdot x$. (Multiplikation är kommutativ)

Andra exempel på kroppar är $\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$. Exempel på mängder som inte är kroppar är $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ni kan fundera på varför detta gäller. Kom nu ihåg att Algebras Fundamentalsats säger att varje icke-konstant polynom har ett nollställe.

Vi kommer skriva mängden av polynom över en kropp K i variabeln x som $K[x]$, dvs $p \in K[x]$ kan skrivas som

$$p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j ,$$

där $a_j \in K$.

Exempel 1. Vi har att $((1+i)z^2 + 2z + 3i) \in \mathbb{C}[z]$, men denna är inte ett element i $\mathbb{R}[z]$. $\square$

Exempel 2. Vi har att $(x^2 + 3x + 1) \in \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$. $\square$

Med notationen ovan så kan vi skriva Algebrans fundamentalsats som

$$\forall p \in \mathbb{C}[z] \text{ icke-konstant } \exists w \in \mathbb{C} : p(w) = 0.$$

En kropp som uppfyller att varje polynom över kroppen har ett nollställe kallas för en **algebraiskt sluten** kropp. Alltså är $\mathbb{C}$ ett exempel på en algebraisk sluten kropp, men mer om sånt här kan ni läsa i en abstrakt algebra kurs.

Avsnitt 1.1.2 - 1.1.4

Första delen bygger upp en representation av ett komplext tal som ett ordnat par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med vissa operationer som addition och multiplikation;

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) \text{ och } (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Eftersom $\mathbb{R}$ är kommutativ med både $+$ och $\cdot$ så följer det omgående att $\mathbb{R}^2$ är kommutativ med dessa operationer definierade ovan. Man definierar därefter $i := (0, 1)$ varvid man lätt hittar en avbildning $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom

$$(x, y) \mapsto x + iy.$$

Detta kommer även hjälpa oss att få en geometrisk syn på det komplexa talplanet senare.

INLÄMNINGSUPPGIFT 1. Låt V vara ett reellt vektorrum och låt $I: V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning. Om $I^2 = -\text{Id}$ så säger vi att I är en **komplex struktur** på V .

- (a) Visa att om I är en komplex struktur på V så är I bijektiv.
- (b) Visa att om I är en komplex struktur på V så är $\dim(V) = 2n$, dvs V är av jämn dimension.

- (c) Betrakta $\mathbb{R}^2$, som är ett reellt vektorrum. Definiera $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom $i(x, y) = (-y, x)$. Visa att i är en komplex struktur på $\mathbb{R}^2$. Det gäller faktiskt att $\mathbb{R}^2$ med denna komplexa struktur precis är $\mathbb{C}$.

Låt oss nu gå vidare att kolla på ytterligare en representation av ett komplext tal, denna gång via ekvivalensrelationer och polynom. Kom ihåg att en relation R på en mängd X kallas en **ekvivalensrelation** om

1. xRx för alla $x \in X$ (Reflexiv)
2. xRy implicerar att yRx för alla $x, y \in X$ (Symmetrisk)
3. xRy och yRz implicerar att xRz för alla $x, y, z \in X$ (Transitiv)

Låt nu $K \in \mathbb{R}[x]$ vara ett polynom med $\deg(K) = k$. Låt $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Vi säger att $P \sim_K Q$, dvs P och Q är ekvivalenta, om och endast om det finns ett polynom $S \in \mathbb{R}[x]$ så att

$$P - Q = S \cdot K.$$

Detta visar sig vara en ekvivalensrelation, se boken för ett bevis av detta. Låt mängden av ekvivalensklasser vara $\mathbb{R}[x]/\sim_K$, och skriv ekvivalensklassen där P ligger i som $[P]$. Definiera nu

$$[P] + [Q] := [P + Q]$$

och

$$[P] \cdot [Q] := [P \cdot Q].$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 2. Visa att dessa operationer är väldefinierade.

Låt oss nu utreda vad $\mathbb{R}[x]/\sim_K$ betyder. Jo, det betyder att vi kvotar bort allt som har med $K(x)$ att göra, säg att $K(x) = x$ då kommer $\mathbb{R}[x]/\sim_K = \mathbb{R}$, där likhetstecknet ska tolkas som att det finns en linjär avbildning från $\mathbb{R}[x]/\sim_K$ till $\mathbb{R}$ som är bijektiv (en sådan avbildning mellan vektorrum kallas för en **isomorfi**). Låt oss kolla på ett annat exempel som kanske belyser detta lite mera:

Exempel 3. Låt $r, s \in \mathbb{Z}$. Säg nu att $r \sim s$ om och endast om det finns ett $t \in \mathbb{Z}$ så att $r - s = t \cdot n$. Låt oss kolla lite närmare då $n = 3$. Detta betyder att differensen av två heltal ska vara en multipel av 3. Säg nu att $r = 0$. Då är $r \sim s$ om $s = \dots, -3, 0, 3, 6, \dots$. Om $r = 1$ så är $r \sim s$ om $s = \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots$, och om $r = 2$ så är $r \sim s$ om $s = \dots, -4, -1, 2, 5, \dots$. Eftersom dessa tre ekvivalensklasser partitionerar $\mathbb{Z}$ så finns det endast tre ekvivalensklasser, nämligen $[0]$, $[1]$ och $[2]$. Detta betyder att vi kan hitta en bijektiv avbildning från $\mathbb{Z}/\sim$ till $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$ genom att bara avbilda ekvivalensklassen $[i]$ till $i \in \mathbb{Z}_3$. Observera alltså att då $n = 3$ så kvotar vi verkligen bort allt som har med 3 att göra, dvs att 3 och 0 är ekvivalenta. $\square$

Låt oss återgå till ekvivalensrelationen $\sim_K$ då $K(x) = x$. Låt nu $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ vara ett polynom där $a_i \in \mathbb{R}$. Att $p \in \mathbb{R}[x]/\sim_K$ betyder, genom samma argument som i exemplet ovan, att $p(x) = a_0$. Eftersom $a_0 \in \mathbb{R}$ kan väljas godtyckligt så kan vi lätt hitta en isomorfi från $\mathbb{R}[x]/\sim_K$ till $\mathbb{R}$ genom att avbilda helt enkelt a_0 på sig själv.

Betrakta nu ekvivalensrelationen ovan med $K(x) = 1 + x^2$. Då är $x^2 = -1$ i $\mathbb{R}[x]/\sim_K$. Vidare så är $x^k = (-1)^{l_k} x^{k \bmod 2}$, där $l_{0 \bmod 4} = 0$, $l_{1 \bmod 4} = 0$, $l_{2 \bmod 4} = 1$ och $l_{3 \bmod 4} = 1$. Detta betyder att man endast kan få polynom på formen $a + bx$ i $\mathbb{R}[x]/\sim_K$, och det visar sig, se boken, att $a + bx \in \mathbb{R}[x]/\sim_K$ kan identifieras med det komplexa talet $a + bi$, som ger ytterligare en representation av ett komplext tal.

INLÄMNINGSUPPGIFT 3. Betrakta matrisen

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Visa att matriser på denna form kan identifieras med komplexa tal.

Avsnitt 1.2

Som vi såg förut så kan varje komplext tal $z = x + iy$ identifieras med vektorn $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En vektor har en längd och en riktning, så Pythagoras sats ger att längden av vektorn z , som vi skriver som $|z|$, precis är $\sqrt{x^2 + y^2}$. Observera att $|\cdot|$ är en funktion $\mathbb{C} \rightarrow [0, \infty[$ som helt enkelt mäter avståndet från z till origo.

INLÄMNINGSUPPGIFT 4. Kom ihåg att en relation R på en mängd X kallas en **partiell ordning** om

1. xRx för alla $x \in X$ (*Reflexiv*)
2. xRy och yRx implicerar att $x = y$ för alla $x, y \in X$ (*Antisymmetrisk*)
3. xRy och yRz implicerar att xRz för alla $x, y, z \in X$ (*Transitiv*)

Visa att $\mathbb{C}$ inte kan partiellt ordnas, dvs att det inte finns en partiell ordning på $\mathbb{C}$. (Ledning: Betrakta i och $-i$)

Övningen ovan ger att vi inte kan jämföra två komplexa tal, dvs vi kan inte säga att $z \geq w$ eller tvärtom. Däremot så är det fullständigt korrekt att skriva $|z| \geq |w|$.

Anmärkning 1. Hädanefter då vi skriver att $z \geq w$ så är det underförstått att $z, w \in \mathbb{R}$. $\square$

Absolutbeloppet $|\cdot|$ ska alltså tolkas som ett avstånd, och senare (i avsnitt 1.3) så ska vi se att $d(z, w) := |z - w|$ är en metrik, som är en avståndsfunktion, på $\mathbb{C}$. Här betyder $d(z, w)$ alltså avståndet från z till w . Några viktiga egenskaper som absolutbeloppet uppfyller är

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|zw| = |z||w|$

Låt oss nu se på ytterligare en representation av komplexa tal. Betrakta enhetscirkeln

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

På S^1 så kan vi skriva $x = \cos \theta$ och $y = \sin \theta$ för något θ . Om vi nu identifierar $(x, y) \in S^1$ med $x + iy \in \mathbb{C}$ så får vi att $\cos \theta + i \sin \theta$, och enligt trigonometriska ettan så är

$$|\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1.$$

Alltså $\cos \theta + i \sin \theta$ är en enhetsvektor med riktning θ . Betrakta nu $z = x + iy$. Eftersom detta är en vektor så har denna en riktning. Denna riktning kallas för **argumentet** för z och skrivs $\arg(z)$. Eftersom $|z|$ är längden på vektorn z så får vi att

$$z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta),$$

där $\theta = \arg(z)$. Då vi skriver ett komplext tal på sådant sätt så säger vi att vi har skrivit det på **polär form**.

Anmärkning 2. Egentligen så brukar man säga att $z = |z|e^{i\theta}$ är den polära formen för ett komplext tal, men denna representation kommer vi se på senare. $\square$

Eftersom $\cos \theta$ och $\sin \theta$ har en period med 2π så kommer $\arg(z)$ vara en mängd!!! Mer precist så är

$$\arg(z) = \{\theta : |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = z\}.$$

Observera att det jag skrev ovan ($\theta = \arg(z)$) är inte helt och hållet korrekt, utan en bättre notation är då att $\theta \in \arg(z)$. Ett annat sätt att skriva argumentet på är

$$\arg(z) = \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\},$$

där θ är vinkeln mellan vektorn z och realaxeln.

Exempel 4. Låt $z = 1 + i$. Då är

$$\arg(z) = \{\pi/4 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

Hoppas detta synsätt inte förvirrar alltför mycket. Låt oss förvirra lite mera: Om $z \in \mathbb{C}$ och om vi har beräknat mängden $\arg(z)$, så kan vi förstås välja att restringera denna mängd till ett halvöppet intervall istället, av längd t.ex 2π . Då man gör en sådan restriktion, så kommer det för alla $z \in \mathbb{C}$ finnas ett unikt θ så att $\arg(z) = \theta$. Ett val av ett sådant intervall, och observera att det verkligen är ett val man gör, brukar man kalla en **gren** av $\arg(z)$. Den speciella grenen $]-\pi, \pi]$ kallas för **principalgrenen** och då vi kollar på denna gren så brukar vi skriva $\arg(z)$ som $\text{Arg}(z)$, där det versala A:et är viktigt. Då brukar vi kalla Arg för **principalargumentet**. Med detta i bagaget så har vi att

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) ,$$

där $\theta = \text{Arg}(z)$. (Observera att här är det korrekt att skriva $\theta = \text{Arg}(z)$).

Avsnitt 1.3

Detta avsnitt är viktigt att förstå för att få bättre förståelse för topologiska argument som kommer göras senare i specialfallet $\mathbb{C}$. Här kommer vi studera mer abstrakta objekt än $\mathbb{C}$, nämligen så kallade metriska rum. Låt oss börja med en definition:

Definition 1.1. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd. Låt $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller att

1. $d(x, y) \geq 0$ för alla $x, y \in X$ (Positiv)
2. $d(x, y) = 0$ om och endast om $x = y$ för alla $x, y \in X$ (Definit)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ för alla $x, y \in X$ (Symmetrisk)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ för alla $x, y, z \in X$ (Triangelolikheten)

Vi kallar d för en **metrik** på X och paret (X, d) kallar vi för ett **metriskt rum**.

Anmärkning 3. Då metriken d är underförstådd så säger vi bara att X är ett metriskt rum. $\square$

En metrik ska uppfattas som en avståndsfunktion, som helt enkelt mäter avståndet mellan punkter i rummet X . (Vi kallar element i det metriska rummet X för **punkter**). Låt oss nu kolla på några exempel:

Exempel 5. Betrakta $\mathbb{C}$, och definiera $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ genom $d(z, w) = |z - w|$. Låt oss verifiera att detta verkligen blir en metrik på $\mathbb{C}$. Eftersom $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty[$, så är första punkten i definitionen klar. Låt oss nu betrakta (2) i definitionen ovan. Antag att $d(z, w) = 0$, dvs att $|z - w| = 0$, som helt enkelt betyder, om $z = x + iy$ och $w = u + iv$, att

$$\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = 0.$$

Men detta är samma sak som att $(x - u)^2 + (y - v)^2 = 0$. Men summan av två kvadrater är noll om och endast om båda termerna är noll, dvs att $x - u = 0$ och $y - v = 0$. Detta betyder att $z = w$, vilket visar (2). Vidare så är

$$d(z, w) = |z - w| = |(-1)(w - z)| = |-1||w - z| = |w - z| = d(w, z),$$

så d är symmetrisk. Slutligen så ska vi se att d uppfyller triangelolikheten. För att se det så måste man veta att $|z + w| \leq |z| + |w|$, och ett bevis av detta faktum kan ni hitta i boken på sidan 8. Detta ger att

$$d(z, a) = |z - a| = |(z - w) + (w - a)| \leq |z - w| + |w - a| = d(z, w) + d(w, a),$$

som visar att d är en metrik på $\mathbb{C}$. Denna metrik brukas kallas för den **Euklidiska metriken** på $\mathbb{C}$. $\square$

Man kan även definiera fler metriker på $\mathbb{C}$, och det är precis detta nästa inlämningsuppgift handlar om:

INLÄMNINGSUPPGIFT 5. Betrakta $\mathbb{C}$ och låt $z = x + iy$ och $w = u + iv$.

- (a) Definiera $d(z, w) = \frac{|z-w|}{1+|z-w|}$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.
- (b) Definiera $d(z, w) = |x - u| + |y - v|$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.
- (c) Definiera $d(z, w) = \max(|x - u|, |y - v|)$. Visa att $(\mathbb{C}, d)$ blir ett metriskt rum.

I uppgiften ovan så rekommenderar jag även att ni jämför de olika metriker samt med den Euklidiska metriken på $\mathbb{C}$. Ett annat viktigt exempel är

Exempel 6. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och definiera $d: X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ genom

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = y \\ 1 & \text{om } x \neq y \end{cases}.$$

Låt oss se att detta blir en metrik på X . Det är klart att $d(x, y) \geq 0$ och om $d(x, y) = 0$ så betyder det per definition att $x = y$. Det är även klart att d är symmetrisk. Slutligen så måste vi se om triangelolikheten gäller. Vi har att om $d(x, z) = 0$ så måste $x = z$, så $d(x, y) + d(y, z) \geq 0$ för alla $x, y, z \in X$, ty om $y = x = z$ så är $d(x, y) + d(y, z) = 0$ och om $y \neq x = z$ så är $d(x, y) + d(y, z) = 2$. Om istället $d(x, z) = 1$ så är $x \neq z$. Då måste vi betrakta några olika fall:

Fall 1: $y = x \neq z$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 1$,

Fall 2: $y = z \neq x$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 1$,

Fall 3: $y \neq x \neq z$, då är $d(x, y) + d(y, z) = 2$.

Uträkningarna ovan visar att d uppfyller triangelolikheten. Alltså är (X, d) ett metriskt rum. Metriken d brukar kallas för den **diskreta metriken**. $\square$

För att kunna göra någon analys överhuvudtaget så måste man veta vad en öppen mängd är. Större delen av analysen och dess satser bygger på öppna mängder och andra topologiska begrepp. Vi ska nu gå igenom några av de topologiska begrepp som vi kommer behöva framgent. Min terminologi kan skilja sig en del från bokens, och jag kommer att göra de topologiska begreppen i metriska rum istället för att endast betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken som boken gör. Jag kommer att göra anmärkningar där/om det skiljer sig allt för mycket.

Låt nu (X, d) vara ett metriskt rum. Vi definierar den öppna bollen kring $x \in X$ med radie $r > 0$ genom

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Observera att då $X = \mathbb{C}$ och $d(z, w) = |z - w|$ så är

$$B(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}.$$

Detta är då en disk kring z med radie r , och brukas skrivas som $D(z, r)$. Jag kommer både använda terminologin boll och disk då vi pratar om $\mathbb{C}$. Låt nu X vara ett generellt metriskt rum igen. Vi säger att en mängd $U \subset X$ är **öppen** om för varje $x \in U$ så finns det ett $r > 0$ så att $B(x, r) \subset U$. Den öppna bollen är även öppen:

Lemma 1.2. $B(x, r) \subset X$ är öppen.

Bevis. Låt $y \in B(x, r)$. Då är $d(x, y) < r$, säg att $d(x, y) = s$. Då är $y \in B(y, r-s)$ och $B(y, r-s) \subset B(x, r)$, ty om $z \in B(y, r-s)$ så är

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < s + r - s = r.$$

$\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 6. Vad är en öppen boll i ett metriskt rum med den diskreta metriken.

INLÄMNINGSUPPGIFT 7. Vad är en öppen boll med radie 1 i de metriska rummen i inlämningsuppgift 5.

Exempel 7. Betrakta $\mathbb{R}$ med metriken $d(x, y) = |x - y|$. Vi ska visa att varje intervall på formen $I =]a, b[$ är öppet. Tag $x \in I$. Då är $a < x < b$. Låt $r = \min\{x - a, b - x\}$. Då är $B(x, r) \subset I$, så I är öppen. $\square$

Exempel 8. Betrakta $\mathbb{R}$ med metriken $d(x, y) = |x - y|$. Vi ska visa att varje intervall på formen $I = [a, b]$ inte är öppet. Tag $a = x \in I$ och tag godtycklig $r > 0$. Betrakta $y = a - r/2$. Då är $y \in B(a, r)$, men $y \notin I$. Vi har alltså hittat en punkt $x \in I$ så att för varje $r > 0$ finns en punkt $y \in B(x, r)$ så att $y \notin I$. $\square$

I boken finns det flera exempel på mängder som är öppna, kolla på dessa och gör alla detaljer.

Proposition 1.3. *Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Då gäller*

1. *Ändliga snitt av öppna mängder är öppna.*
2. *Godtyckliga unioner av öppna mängder är öppna.*
3. *$\emptyset$ och X är öppna.*

Bevis. Beviset av (1) är precis samma som står i boken.

(2): Låt $V = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, där U_α är öppna. Låt nu $x \in V$. Då är $x \in U_\alpha$ för något $\alpha \in A$. Då finns det ett $r > 0$ så att $B(x, r) \subset U_\alpha$, ty U_α är öppen. Men då är $B(x, r) \subset V$, så V är öppen.

(3): Att $\emptyset$ och X är öppna är klart. $\square$

Följd 1.4. *En mängd $U \subset X$ är öppen om och endast om U är en union av öppna bollar.*

INLÄMNINGSUPPGIFT 8. *Visa följden ovan.*

Definition 1.5. *Låt $U \subset X$ vara en mängd. En punkt $x \in U$ sägs vara en inre punkt till U om det finns en boll $B(x, r)$ som ligger helt inne i U . Låt U° vara mängden av inre punkter till U .*

Observera att $U^\circ \subset U$, och de inre punkterna karakteriserar de öppna mängderna enligt följande proposition:

Proposition 1.6. *$U \subset X$ är öppen om och endast om $U^\circ = U$.*

Bevis. Börja antag att $U^\circ = U$. Då är det klart att U är öppen, ty varje punkt $x \in U^\circ = U$ har en boll $B(x, r)$ som ligger helt inne i $U^\circ = U$.

Å andra sidan, antag att U är öppen. Vi vet att $U^\circ \subset U$, så vi måste visa att $U \subset U^\circ$. Tag nu $x \in U$. Eftersom U är öppen så finns det en boll kring x som ligger helt inne i U , så $x \in U^\circ$, dvs $U \subset U^\circ$. $\square$

En annan viktig del av analysen är följder och konvergens. Konvergens ger även upphov till öppna mängder, men detta får ni lära er i en annan kurs. Här börjar vi med definitionen av en följd. En **följd** i en mängd X är en avbildning från $\mathbb{N}$ till X . Om $f(n) = x_n$ är en följd i X så kommer vi ofta skriva $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ då vi talar om följden, dvs vi kan tala om bilden av avbildningen och inte om följden själv. Vidare, om $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ är en följd och $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ är strikt växande, dvs $g(n) < g(m)$ så fort $n < m$, så säger vi att $f \circ g$ är en **delföljd** till f , som vi skriver ibland som $x_{g(n)}$ eller x_{n_k} .

Exempel 9. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Då är $\{x_{2n}\}_{n=1}^\infty$ och $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^\infty$ delföljder till $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. $\square$

Definition 1.7. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Vi säger att x_n konvergerar mot x , som vi skriver som $x_n \rightarrow x$, om $d(x_n, x) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$.

Skriver vi om denna definition litegrann, så säger vi att $x_n \rightarrow x$ om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $m \geq 0$ så att $d(x_n, x) < \varepsilon$ för alla $n \geq m$. Så, en följd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot en punkt x om följden förr eller senare ligger godtyckligt nära x .

Betrakta nu $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Då kommer en följd $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ konvergera mot en punkt z om $|z_n - z| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. I boken kan ni även läsa att $z_n = x_n + iy_n \rightarrow z = x + iy$ i $\mathbb{C}$ om och endast om $x_n \rightarrow x$ och $y_n \rightarrow y$ i $\mathbb{R}$. Vidare så har man att om $z_n \rightarrow z$ så är $|z_n| \rightarrow |z|$ och $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$.

Exempel 10. Betrakta följden $\{2^n/n! + in/2^n\}_{n=1}^\infty$ i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Det är klart att denna följd konvergerar mot 0. $\square$

Exempel 11. Betrakta följden $\{n^{1/n} + ib^n\}_{n=1}^\infty$, för $|b| < 1$, i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Eftersom $n^{1/n} \rightarrow 1$ och $b^n \rightarrow 0$ så får vi att följden går mot 1. $\square$

Exempel 12. Betrakta följden $\{a^{1/n} + i \sin 1/n\}_{n=1}^\infty$, för $a > 0$, i $\mathbb{C}$ med Euklidisk metrik. Eftersom $a^{1/n} \rightarrow 1$ och $1/n \rightarrow 0$ så får vi att följden går mot 1. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 9. Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i ett metriskt rum X . Antag att $x_n \rightarrow x$. Visa att varje delföljd till $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar mot x .

Proposition 1.8. Gränsvärden är unika i metriska rum, dvs om $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i ett metriskt rum och $x_n \rightarrow x$ och $x_n \rightarrow y$ då är $x = y$.

Bevis. Vi har att

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y).$$

Eftersom högerledet går mot 0 då $n \rightarrow \infty$ så följer det att $d(x, y) = 0$. Men detta betyder att $x = y$. $\square$

Definition 1.9. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ vara en följd i ett metriskt rum. Vi säger att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är **Cauchy** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N \geq 0$ så att $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ för alla $n, m \geq N$.

Ett annat sätt att se denna definition på är att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är Cauchy om $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ då $n, m \rightarrow \infty$.

Proposition 1.10. Varje konvergent följd är Cauchy.

Bevis. Antag att $x_n \rightarrow x$. Då gäller att

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \rightarrow 0$$

då $n, m \rightarrow \infty$, ty $d(x_n, x) \rightarrow 0$ och $d(x, x_m) \rightarrow 0$. $\square$

Om varje Cauchyföljd konvergerar så säger vi att det metriska rummet är **fullständigt**, dvs om konvergenta följder och Cauchyföljder är samma sak. Ett exempel på ett fullständigt metriskt rum är $\mathbb{C}$. Konvergens är viktigt, som jag har nämnt tidigare, inom analysen, så försök att få en bra förståelse för detta. Ibland är det bra att kunna jämföra konvergenser i olika metriker. Till exempel om man vill avgöra om ett metriskt rum är fullständigt i en metrik eller inte så behöver man bara hitta två metriker som är ekvivalenta (se nedan) och visa att det metriska rummet är fullständigt i den ena metriken. Om (X, d_1) och (X, d_2) är metriska rum, så säger vi att d_1 och d_2 är **ekvivalenta** om det finns konstanter $c_1, c_2 \geq 0$ så att

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

för alla $x, y \in X$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 10. Låt d_1 och d_2 vara ekvivalenta metriker, och låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd. Visa att om $\{x_n\}$ konvergerar i d_1 -metriken så konvergerar den även i d_2 -metriken. Visa även att vara ekvivalenta metriker är en ekvivalensrelation. Visa även att ekvivalenta metriker ger upphov till samma öppna mängder.

Nu till det som är motsatsen till öppna mängder, så kallade slutna mängder. Vi säger att en mängd $S \subset X$ är **sluten** och S^c är öppen. Här är S^c **komplementet** till S , dvs $X \setminus S := \{x \in X : x \notin S\}$. Det följer direkt från Proposition 1.3 att $\emptyset = X^c$ och $X = \emptyset^c$ är slutna mängder.

Proposition 1.11. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Då är

1. Ändliga unioner av slutna mängder är slutna.
1. Godtyckliga snitt av slutna mängder är slutna.

Bevis. (1): Låt $S_1, \dots, S_n$ vara slutna. Då är

$$\left(\bigcup_{j=1}^n S_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^n S_j^c.$$

Eftersom S_j^c är öppna så följer det från Proposition 1.3 att $\bigcup_{j=1}^n S_j^c$ är öppen.

(2): Låt S_α vara slutna där $\alpha \in A$. Då är

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha^c,$$

som är öppen enligt Proposition 1.3, så $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ är slutna. □

Låt oss även se ett på ett annat sätt som säger om en mängd är sluten eller ej. Vi börjar med en definition.

Definition 1.12. Låt $S \subset X$ vara en mängd i ett metriskt rum. Vi säger att x är en **hopningspunkt** till S om varje boll $B(x, r)$ innehåller oändligt många punkter i S .

Anmärkning 4. Börja med att komma ihåg att om X och Y är mängder så definierar vi

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y), \text{ card}(X) = \text{card}(Y), \text{ card}(X) \geq \text{card}(Y)$$

att betyda att det finns en funktion $f: X \rightarrow Y$ som är injektiv, bijektiv respektive surjektiv. Man säger att en mängd X är **uppräknelig** om $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$. Vi säger att en mängd X är **ändlig** om $\text{card}(X) = \{1, \dots, n\}$ för något n . En mängd som är uppräknelig men inte ändlig sägs vara **oändlig**. $\square$

Hopningspunkter karakteriserar slutna mängder:

Proposition 1.13. En mängd S är sluten om och endast om den innehåller alla dess hopningspunkter.

Bevis. Ett bevis hittar ni i boken. $\square$

Låt nu $S \subset X$ vara en mängd. Vi definierar $\bar{S}$ att vara det **slutna höljet** till S genom

$$\bar{S} = S \cup \{\text{hopningspunkter}\}.$$

Det är klart att $S \subset \bar{S}$.

Följd 1.14. $S \subset X$ är sluten om och endast om $S = \bar{S}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 11. Visa följden ovan.

Proposition 1.15. Låt X vara ett metriskt rum, låt $S \subset X$ och låt $x \in S$. Då är följande ekvivalent:

1. $x \in \bar{S}$.
2. $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ för alla $r > 0$.
3. Det finns en följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ som konvergerar mot x .

Bevis. Vi börjar med att visa att (2) implicerar (1). Antag, för en motsägelse, att $B(x, r) \cap S = \emptyset$. Då är $B(x, r)^c$ en sluten mängd som innehåller S , ty $(B(x, r)^c)^c = B(x, r)$ är öppen, men $x \notin S$, så $x \notin \bar{S}$. Detta ger motsägelsen, så $x \in \bar{S}$. Låt oss nu visa (1) implicerar (2). Antag för en motsägelse att $x \notin \bar{S}$. Eftersom $(\bar{S})^c$ är öppen så finns det en boll så att $B(x, r) \subset (\bar{S})^c \subset S^c$. Detta är en motsägelse, så $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$.

Antag nu att $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$. För varje $n \in \mathbb{N}$ så finns det ett $x_n \in B(x, 1/n) \cap S$ så att $x_n \rightarrow x$, ty

$$d(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$. Å andra sidan, antag att $B(x, r) \cap S = \emptyset$. Då gäller för alla $y \in S$ att

$$d(x, y) \geq r.$$

Detta betyder att inget följd i S kan konvergera mot x , vilket avslutar beviset. $\square$

Låt oss stanna upp ett tag. Denna proposition ger oss ett sätt att visa att en mängd S är sluten. Man gör så här: Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$ är en följd så att $x_n \rightarrow x \notin S$. Om man visar att $x \in S$ så ger propositionen att x är en hopningspunkt, så S innehåller alla sina hopningspunkter, dvs S är sluten.

INLÄMNINGSUPPGIFT 12. Visa att en sluten mängd till ett fullständigt metriskt rum är fullständigt, och visa att om en delmängd till ett metriskt rum är fullständigt så är den sluten.

Dax att införa ett nytt topologiskt begrepp. Låt S vara en mängd i ett metriskt rum X . Vi säger att x är en **randpunkt** till S om $x \in \bar{S} \setminus S^\circ$. Mängden av randpunkter till S skriver vi som ∂S .

Exempel 13. Betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Låt

$$A(z, r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C} : r_1 < |z - w| < r_2\}$$

vara en annulus med inre radie r_1 och yttre radie r_2 . Då är

$$\partial A(z, r_1, r_2) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r_1\} \cup \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r_2\}.$$

$\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 13. Låt S vara en mängd i ett metriskt rum X . Måste ∂S vara sluten eller öppen, eller kanske både öppen och sluten eller varken öppen eller sluten? Red ut detta. Där du inte kan bevisa påståendet ge motexempel.

Vi har nu bara några topologiska begrepp kvar att gå igenom. Vi säger att en mängd $S \subset X$ är **begränsad** om det finns en boll $B(x, r)$ så att $B(x, r) \supset S$ för alla $x \in S$. Definiera **diametern** för S genom

$$\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} d(x, y).$$

Det är lätt att se att S är begränsad om och endast om $\text{diam}(S) < \infty$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 14. Betrakta $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken. Visa att varje ändlig mängd är begränsad.

Boken inför därefter kompakthet genom att säga att varje följd ska ha en konvergent delföljd. Vi ska göra det på ett annat sätt, som också står i boken, och boken visar att dessa två definitioner är ekvivalenta. Låt $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ vara en familj av öppna mängder. Vi säger att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **täcker** en mängd S om $S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Man säger att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ är en öppen övertäckning av S . Vidare, om $B \subset A$ och $S \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$ så säger vi att $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ är en **delövertäckning** av S .

Definition 1.16. En mängd $K \subset X$ är **kompakt** om varje öppen övertäckning har en ändlig delövertäckning, dvs att det räcker med ett ändligt antal öppna mängder för att täcka K .

En mängd $K \subset X$ sägs vara **totalt begränsad** om för varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt antal bollar med radie ε som täcker K .

INLÄMNINGSUPPGIFT 15. Visa att varje totalt begränsad mängd är begränsad. Visa att om K är totalt begränsad så är också $\bar{K}$ totalt begränsad.

Nu kan vi karakterisera kompakthet.

Sats 1.17. Om K är en mängd i ett metriskt rum X så är följande ekvivalent:

1. K är kompakt.
2. Varje följd i K har en konvergent delföljd som konvergerar till en punkt i K .
3. K är fullständigt och totalt begränsad.

Bevis. Vi ska visa att (2) är ekvivalent med (3), och sen visa att (2) och (3) implicerar (1) och slutligen att (1) implicerar (2). Vi börjar med att anta att (3) gäller. Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd i K . Eftersom K är totalt begränsad så kan vi täcka K med ett ändligt antal bollar med radie $1/2$, och åtminstone en av dem måste innehålla x_n för oändligt många n , säg $x_n \in B_1$ för $n \in N_1$. Nu kan $K \cap B_1$ täckas med ett ändligt antal bollar med radie $(1/2)^2$, och åtminstone en av dem måste innehålla x_n för oändligt många $n \in N_1$, säg $x_n \in B_2$ för $n \in N_2$. Fortsätt nu på detta vis, varvid vi får en följd av bollar med radie $(1/2)^j$, dvs med avtagande radie, och en avtagande följd $N_j \subset \mathbb{N}$, dvs $N_1 \supset N_2 \supset \dots$, och $x_n \in B_j$ för $n \in N_j$. Välj nu $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots$, så att $n_1 < n_2 < \dots$. Betrakta nu $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$. Då är

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) < (1/2)^{1-j}$$

för $k > j$. Låt nu $k, j \rightarrow \infty$, varvid $d(x_{n_j}, x_{n_k}) \rightarrow 0$, så $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ är Cauchy. Eftersom K är fullständigt så kommer denna delföljd konvergera till en punkt i K , varvid vi har kommit fram till (2).

Vi ska nu visa att (2) implicerar (3). Vi ska visa att om något av villkoren i (3) inte är uppfylld så kommer inte (2) gälla. Vi börjar med att anta att K inte är fullständigt. Då finns det en Cauchyföljd $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ som inte konvergerar. Ingen delföljd till denna Cauchyföljd kan inte heller konvergera i K för annars skulle följden konvergera mot samma sak. Antag nu istället att K inte är totalt begränsad. Då finns det ett $\varepsilon > 0$ så att K inte kan täckas med ett ändligt antal bollar med radie ε . Välj nu $x_n \in K$ induktivt på följande sätt: Börja med en godtycklig $x_1 \in K$. Då man har valt $x_1, \dots, x_n$ välj $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$. Då kommer

$$d(x_n, x_m) > \varepsilon$$

för alla n och m , så $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ har ingen konvergent delföljd, vilket visar påståendet.

Vi ska nu visa att (2) och (3) implicerar (1). Det är tillräckligt att visa att om (2) gäller och $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ är en öppen övertäckning av K , så finns det ett $\varepsilon > 0$ så att varje boll med radie ε som skär K är innehållen i någon V_α , för K kan täckas med ett ändligt antal sådana bollar enligt (3). Antag för en motsägelse att för varje $n \in \mathbb{N}$ finns en boll B_n med radie $(1/2)^n$ så att $B_n \cap K \neq \emptyset$ och B_n är innehållen i ingen V_α . Välj nu $x_n \in B_n \cap K$, varvid vi får en följd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Enligt (2) så har denna följd en delföljd som konvergerar till någon punkt $x \in K$. Vi har att $x \in V_\alpha$ för något α , ty V_α :orna täcker K . Vidare eftersom V_α är öppen så finns det ett $\varepsilon > 0$ så att $B(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$. För n stort nog så att $(1/2)^n < \varepsilon/3$ så gäller

$$d(x_n, x) < \varepsilon/3.$$

Detta betyder att $B_n \subset B(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$, som motsäger valet av B_n . Detta avslutar denna implikation.

Slutligen så ska vi visa att (1) implicerar (2). Antag att $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ är en följd i K med ingen konvergent delföljd. Då finns det för varje $x \in K$ en boll B_x centrerad kring x som innehåller x_n för endast ändligt många n , för annars skulle någon delföljd konvergera mot x . Då är $\{B_x\}_{x \in K}$ en öppen övertäckning av K , men den har ingen ändlig delövertäckning. $\square$

Anmärkning 5. Jämför satsen ovan med bokens framställning, och kolla om ni hittar skillnader/likheter. $\square$

Då vi talar om det metriska rummet $\mathbb{C}$ med den Euklidiska metriken så har man ytterligare en karakterisering av kompakthet, nämligen

Sats 1.18. (Heine-Borels sats)

$K \subset \mathbb{C}$ är kompakt om och endast om K är sluten och begränsad.

Bevis. Se boken för ett bevis. $\square$

Anmärkning 6. Om K är en kompakt i något $\mathbb{R}^n$ så gäller även Heine-Borels sats. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 16. Låt K vara en kompakt i ett metriskt rum X . Vad gäller då? Har man motsvarigheten till Heine-Borels sats ovan, eller gäller bara en implikation, eller kanske ingen. Utred och ge eventuella motexempel.

Avsnitt 1.4

Detta avsnitt börjar lite lätt med definitionen av funktioner/avbildningar och vad det betyder att en funktion är injektiv och surjektiv. Dessa faktum är jag

säker på att ni redan vet så jag lämnar detta till er att läsa i boken. Därefter, i avsnitt 1.4.1.6 så tar man upp den så kallade Riemannytan till funktionen $\sqrt{z}$. Riemannytan är ett komplext område som ni kan läsa en hel kurs om på doktorandnivå, så därför lämnar jag detta och lämnar det öppet för den intresserade läsaren att läsa detta avsnitt själv.

Nu till något helt nytt för de flesta, nämligen den så kallade Riemannsfären, (som också är en Riemannyta). Den så kallade Riemannsfären är inget annat än det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med en extra punkt som vi har format en sfär av (Egentligen så är detta något topologiskt som kallas enpunkts-kompaktifiering). Den punkten som vi lägger till är ∞ , och denna punkt låter vi vara nordpolen på sfären. Vi identifierar denna sfär med enhetssfären, dvs den med radie 1, och det är enhetssfären som vi brukar kalla Riemannsfären. Vi kommer beteckna det utvidgade komplexa talplanet med $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. I $\mathbb{C}_\infty$ har vi följande räkneregler:

- $z + \infty = \infty$
- $z \cdot \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{z}{\infty} = 0$

Den stereografiska projektionen använder vi för att identifiera punkter på Riemannsfären med punkter i planet. Den fungerar på följande vis:

- Låt Riemannsfären stå med sydpolen i origo i $\mathbb{C}_\infty$.
- Tag en punkt p på Riemannsfären.
- Drag en rät linje genom nordpolen(N) och p .
- Den punkt som linjen skär $\mathbb{C}_\infty$ är värdet för den stereografiska projektionen.

Observera att nordpolen och $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ avbildas på varandra via den stereografiska projektionen.

Det första exemplet i detta avsnitt är väldigt viktigt, och beskriver den inversa stereografiska projektionen i koordinater. Här är en genomgång av exemplet:

Exempel 14. Låt $z = x + iy$. Identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$, så $z = (x, y)$. Eftersom Riemannsfären ligger i $\mathbb{R}^3$ så kan vi via en identifiering mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ uppfatta z som punkten $(x, y, 0)$. Linjen l genom $N = (0, 0, 1)$ och $z = (x, y, 0)$ ges då av, enligt en linjär algebra kurs,

$$(x_1, x_2, x_3) = l(t) = N + t\vec{Nz} = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) = (tx, ty, 1-t) \quad -\infty < t < \infty.$$

Eftersom sfärens ekvation ges av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ så skär linjen sfären precis då

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2 x^2 + t^2 y^2 + (1-t)^2 = t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t + 1.$$

Denna ekvation är samma sak som

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0,$$

som har lösningarna $t = 0$ eller $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}$. Om $t = 0$ så hamnar vi via linjen l i nordpolen $(0, 0, 1)$. Annars så får vi att

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Detta bestämmer alltså en punkt på Riemannsfären om vi utgår från en punkt $z = x + iy$ i det komplexa talplanet. $\square$

Exempel 15. Punkten $z = 1 + i$ korresponderar mot punkten

$$\left(\frac{2 \operatorname{Re}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{|1 + i|^2 - 1}{|1 + i|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

på Riemannsfären. $\square$

Om vi vill uttrycka den stereografiska projektionen i koordinater så kan vi använda exemplet ovan:

Exempel 16. Låt (x_1, x_2, x_3) vara en punkt på Riemannsfären. Då kan vi använda oss av en linje genom N och (x_1, x_2, x_3) ner till $\mathbb{C}$. Denna ges då av

$$x = \frac{x_1}{t}, \quad y = \frac{x_2}{t}, \quad t = 1 - x_3,$$

så

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Detta ger en punkt $z = x + iy$ i $\mathbb{C}$. $\square$

Exempel 17. Låt oss använda den stereografiska projektionen på punkten $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Vi får då enligt exemplet ovan att

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1, \quad y = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1,$$

så $z = 1 + i$ är bilden av den stereografiska projektionen. Jämför exempel 15. $\square$

Nästa exempel är väldigt viktigt, och kommer komma till nytta då vi studerar Möbiusavbildningar i slutet av kursen.

Exempel 18. Vi ska visa att alla linjer och cirklar i $\mathbb{C}$ korresponderar under den stereografiska projektioner mot cirklar på Riemannsfären.

Den generella ekvationen för en cirkel eller en linje i $\mathbb{C}$, där $z = x + iy$, kan skrivas som

$$A(x^2 + y^2) + Cx + Dy + E = 0.$$

Använd nu Exempel 16 och substituera x och y i ekvationen ovan. Då får vi

$$A \left(\left(\frac{x_1}{1-x_3} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right)^2 \right) + C \frac{x_1}{1-x_3} + D \frac{x_2}{1-x_3} + E = 0.$$

Gör liknämngt varvid denna ekvation är ekvivalent med, förutsett att $x_3 \neq 1$:

$$A(x_1^2 + x_2^2) + Cx_1(1-x_3) + Dx_2(1-x_3) + E(1-x_3)^2 = 0.$$

Eftersom $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, dvs $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$ så får vi att

$$A(1 - x_3^2) + Cx_1(1-x_3) + Dx_2(1-x_3) + E(1-x_3)^2 = 0.$$

Dela nu med $(1-x_3)$, som ger att

$$A(1+x_3) + Cx_1 + Dx_2 + E(1-x_3) = 0,$$

som är ekvivalent med

$$Cx_1 + Dx_2 + (A-E)x_3 + A + E = 0.$$

Detta är ekvationen för ett plan i $\mathbb{R}^3$. Vi har alltså visat att projektionen av en cirkel eller linje måste ligga i detta plan och på Riemannsfären. Men snittet av planet och Riemannsfären är en cirkel, så exemplet är klart. $\square$

Boken går därefter igenom en metrik på $\mathbb{C}_\infty$, som bara är det Euklidiska avståndet i $\mathbb{R}^3$. Försök att få en bra geometrisk bild av Riemannsfären och detta avstånd. Kan ni tänka ut vad det kortaste avståndet på sfären är, dvs om man transporteras på ytan. En ledning är följande uppgift:

INLÄMNINGSUPPGIFT 17. Låt p och q vara två distinkta punkter på Riemannsfären, och låt π vara den stereografiska projektionen. Visa att planet genom p, q och origo skär Riemannsfären i en så kallad storcirkel, dvs en cirkel med diameter 2. Vidare, visa att denna storcirkel korresponderar mot en unik cirkel (eller linje) i planet som går genom

$$\pi(p), \pi(q) \text{ och } -\frac{1}{\overline{\pi(p)}}.$$

Eftersom Riemannsfären är både sluten och begränsad så ger Heine-Borels sats att den är kompakt. Egentligen så måste man argumentera att vi har en kontinuerlig avbildning mellan sfären och $\mathbb{C}_\infty$ och att bilden av en kompakt under en kontinuerlig avbildning är kompakt. Mer om egenskaper för kontinuerliga avbildningar kan ni läsa senare i detta avsnitt.

Anmärkning 7. Boken argumenterar att sfären är kompakt och eftersom sfären och $\mathbb{C}_\infty$ är isometriska så följer det att $\mathbb{C}_\infty$ är kompakt. Försök att visa följande: Antag att (X, d_1) och (Y, d_2) är metriska rum som är isometriska. Visa att om ett av dessa rum är kompakt så är det andra kompakt också. $\square$

Vi ska nu studera kontinuerliga funktioner/avbildningar. Boken definierar kontinuitet via ett gränsvärde. Denna definition ska inte vara något nytt för er. Därefter så visar de att denna definition är ekvivalent med den vanliga $\varepsilon - \delta$ -definitionen som ni också har sett i tidigare kurser. Sen visar boken en väldigt viktig ekvivalent definition av kontinuitet, och denna definition ska vi använda oss av:

Definition 1.19. Låt X och Y vara metriska rum och låt $f: X \rightarrow Y$ vara en avbildning. Vi säger att f är **kontinuerlig** om $f^{-1}(U)$ är öppen för varje öppen $U \subset Y$.

Anmärkning 8. $f^{-1}(U)$ betyder inversa bilden av U , eller ibland så säger man att Urbilden av U under f . Kom ihåg att $f^{-1}(U)$ inte betyder att f har en invers, utan

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}.$$

$\square$

Anmärkning 9. Bokens $\varepsilon - \delta$ -definition går självklart att generalisera till allmänna metriska rum genom att använda sig av en allmän metrik d istället för Euklidiska metriken som boken använder. $\square$

Exempel 19. Betrakta signumfunktionen $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denna är inte kontinuerlig ty

$$\text{sgn}^{-1}(]-1/2, 1/2]) = \{0\},$$

så den inversa bilden av det öppna intervallet $] - 1/2, 1/2[$ är punkten $\{0\}$ som är sluten. $\square$

Exempel 20. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \geq 0 \\ x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

Vi påstår att f är kontinuerlig, så låt oss visa detta. Låt $a < b < 0$. Då är $f^{-1}(]a, b]) =]a, b[$. Om $a < 0 \leq b$ så är $f^{-1}(]a, b]) =]a, \sqrt{b}[$. Slutligen om $0 \leq a < b$ så är $f^{-1}(]a, b]) =]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$. Alltså är inversa bilder av öppna mängder öppna, så f är kontinuerlig. $\square$

Definitionen av kontinuitet som jag nyss gav gör att det blir lättare att visa Proposition 7 och 8 i boken. För att visa detta så tänker jag ge beviset av Proposition 8.

Bevis av Proposition 8 i boken. Vi ska visa att $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ är kontinuerlig. Låt $U \subset S_3$ vara en öppen mängd. Eftersom $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ så är

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Men eftersom $V := g^{-1}(U)$ är öppen och eftersom $f^{-1}(V)$ är öppen så är $g \circ f$ kontinuerlig. $\square$

Boken visar därefter att kontinuerliga funktioner bevarar kompaktitet, dvs om $f: X \rightarrow Y$ är kontinuerlig och $K \subset X$ är kompakt så är $f(K)$ kompakt.

INLÄMNINGSUPPGIFT 18. Visa att kontinuerliga funktioner bevarar kompaktitet via ett övertäckningsargument, dvs visa detta genom att visa att varje öppen övertäckning har en ändlig delövertäckning.

Sen visar boken att varje reellvärd kontinuerlig funktion definierad på en kompakt har ett maximum på kompakten. Senare kommer vi se att varje holomorf funktion, som de funktioner som vi ska studera senare kallas, antar sitt absoluta maximum på randen till den mängd där den är definierad, dvs om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf så kommer $|f|$ anta sitt maximum på ∂U . Mer om detta senare. Nu ska vi diskutera likformig kontinuitet. Observera att varje likformig kontinuerlig funktion är kontinuerlig, men bokens exempel 30 visar på en funktion som är kontinuerlig men inte likformig kontinuerlig. Det finns även en ekvivalent definition av likformig kontinuitet som nästa uppgift reder ut.

INLÄMNINGSUPPGIFT 19. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen, och låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. För $y \in U$ definiera

$$\tau_y f(x) := f(x - y).$$

Definiera även $\|f\|_U := \sup_{x \in U} |f(x)|$. Visa att f är likformigt kontinuerlig om och endast om $\|\tau_y f - f\|_U \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$.

En viktig sats är bokens sats 10 som säger att varje kontinuerlig funktion på en kompakt är till och med likformigt kontinuerlig. Kom ihåg att en funktion är kontinuerlig på en kompakt om den är kontinuerlig i en omgivning till kompakten, ty kontinuitet är definierad i termer av öppna mängder.

Låt oss nu titta på några nya topologiska termer innan vi fortsätter. Vi säger att en mängd $A \subset \mathbb{C}$ är **osammanhängande** in det finns icke-tomma öppna mängder U och V så att $U \cap V = \emptyset$ och $A = U \cup V$. Annars så säger vi att A är **sammanhängande**. Rita en bild så förstår ni denna definition bättre. Boken kör dock med en annan definition, vi måste dock ha lite mer terminologi för att ge denna.

Definition 1.20. Låt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vara ett kompakt intervall. En **kurva** i $\mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Anmärkning 10. Att γ är kontinuerlig betyder att den är kontinuerlig på $]a, b[$, precis som jag nämnde ovan. $\square$

Om γ är en kurva på ett intervall $[a, b]$ så säger vi att γ är **sluten** om $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ett enkelt exempel på en sluten kurva är en cirkel. Vidare så säger vi att en kurva γ är **enkel** om

$$\gamma|_{[a, b]}$$

är injektiv. Ett exempel på en enkel kurva är alla kurvor som inte skär sig själv. Kurvor som skär sig själv kan inte vara enkel, eftersom man får problem med injektiviteten i skärningspunkten.

INLÄMNINGSUPPGIFT 20. Visa att man alltid kan parametrisera om en kurva så att definitionsmängden blir $[0, 1]$ men värdemängden är den samma, dvs om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en kurva, visa att man kan definiera om γ så att det blir en avbildning från $[0, 1]$ till $\mathbb{C}$ med samma bild.

Vi kan nu ge bokens definition:

Definition 1.21. Låt $A \subset \mathbb{C}$ vara en öppen mängd. Vi säger att A är **vägsammanhängande** om det för varje par av punkter z och w i A finns en kurva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$.

Definitionen säger alltså att en mängd är vägsammanhängande om det för varje par av punkter i mängden finns en kurva mellan punkterna som ligger helt inne i mängden.

Anmärkning 11. Jag använder mig av en annan terminologi än boken, jag säger vägsammanhängande medan boken säger sammanhängande. $\square$

Anmärkning 12. Väg-sammanhängande-definitionen kräver *öppna* mängder medan i den andra definitionen av sammanhängande så funkar det med vilken mängd som helst. $\square$

Däremot så är dessa två sammanhängande-definitioner samma sak på öppna mängder, men först så behöver vi ett lemma.

Lemma 1.22. Låt U vara sammanhängande. Om $\emptyset \neq A \subset U$ är både öppen och sluten så är $A = U$.

Bevis. Eftersom A är sluten så är A^c öppen. Detta betyder att $A \subset A^c = U$, som motsäger att U är sammanhängande, så A^c måste vara lika med $\emptyset$. Alltså är $A = U$. $\square$

Sats 1.23. Låt U vara öppen i $\mathbb{C}$. Då är U väg-sammanhängande om och endast om U är sammanhängande.

Bevis. Börja anta att U är väg-sammanhängande. Antag vidare, för en motsägelse, att U inte är sammanhängande. Då är $U = V \cup W$ där V, W är icke-tomma och öppna. Observera att V och W är slutna. Låt $z \in V$ och $w \in W$. Enligt antagande så finns det en kurva mellan z och w . Låt denna kurva ges av $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$, dvs en kurva som börjar i z och slutar i w . Låt

$$T = \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in V\}.$$

Observera att $T \neq \emptyset$, eftersom $0 \in T$, och observera att T är begränsad av 1. Låt c vara den minsta övre begränsningen till T , dvs $c = \sup T$. Då är $c \neq 1$, och per definition av övre begränsning så finns det en följd $\{t_n\}$ med $c < t_n \leq 1$ så att $\gamma(t_n) \in W$ och $t_n \rightarrow c$. Kontinuitet ger att

$$\gamma(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n),$$

så eftersom W är sluten så följer det att $\gamma(c) \in W$.

På samma sätt så finns det en följd $\{s_n\}$ med $0 \leq s_n \leq c$ så att $s_n \rightarrow c$ och $\gamma(s_n) \in V$. Nu ger kontinuitet och slutenhet hos V att $\gamma(c) \in V$. Dessa båda följdargument ger vår motsägelse, så U är sammanhängande.

Antag nu att U är sammanhängande. Låt $z_0 \in U$, och låt

$$V = \{z \in U : z \sim z_0\},$$

där $\sim$ betyder att det finns en kurva mellan z och z_0 . Vi påstår att V är öppen, så låt oss visa detta:

Antag att det finns en kurva från z_0 till z_1 i U . Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z_1, r) \subset U$. Om $z \in B(z_1, r)$ så finns en kurva, en rät linje i detta fall, från z till z_1 . Alltså finns det en även en kurva från z till z_0 via z_1 , så V är verkligen öppen.

Vi påstår härnäst att V är sluten. Antag därför att $\{z_n\} \subset V$ är en följd och att $z_n \rightarrow z \in U$. Vi måste visa att $z \in V$. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z, r) \subset U$ kring z med radie r . För något n så kommer $z_n \in B(z, r)$. Då finns det en rät linje i $B(z, r)$ från z till z_n , för det fixerade n :et ovan. Alltså finns det en kurva från z till z_0 , så $z \in V$.

Vi har nu visat att V är både öppen och sluten, så $V = U$, vilket get att U är väg-sammmanhängande. $\square$

Nu tänkte jag ge ett annat bevis av bokens proposition 9, och jag tänkte passa på att generalisera den en aning:

Proposition 1.24. *Låt X och Y vara metriska rum, och låt $S \subset X$ vara sammanhängande. Om $f: X \rightarrow Y$ är kontinuerlig så är $f(S)$ sammanhängande.*

Bevis. Antag för en motsägelse att $f(S)$ inte är sammanhängande, dvs att det finns öppna U och V med $U \cap V = \emptyset$ och $f(S) = U \cup V$. Eftersom f är kontinuerlig och unioner av öppna mängder är öppna så är

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$

öppen. Men $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = S$, ty

$$f(S) = f(f^{-1}(U \cup V)) = U \cup V,$$

som motsäger att S var sammanhängande. $\square$

Mängder som vi kommer att studera mycket är så kallade områden (eng. domains). Ett **område** är helt enkelt en öppen sammanhängande mängd.

Proposition 1.25. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ vara kontinuerlig. Då är f konstant.*

Bevis. Antag för en motsägelse att f inte är konstant. Då måste f anta åtminstone två olika heltal, säg att $m \in \mathbb{Z}$ är ett av dem. Betrakta $I =]m - 1/3, m + 1/3[$ och $J = \{y \in \mathbb{R} : |y - m| > 2/3\}$. Dessa mängder är öppna och $I \cap J = \emptyset$ så de är disjunkta. Observera att $\text{Im}(f) \subset I \cup J$, så $f^{-1}(I)$ och $f^{-1}(J)$ är disjunkta öppna mängder så att $\Omega = f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J)$. Detta motsäger att Ω är sammanhängande. $\square$

Funktionsföljder och serier

En funktionsföljd är helt en följd av funktioner, som vi kommer skriva som $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Här så specificerar jag inte vilken definitionsmängd och värdemängd som funktionerna har, men jag antar underförstått att de åtminstone har samma definitionsmängd. Om vi har en funktionsföljd så kan man förstås tala om konvergens av denna funktionsföljd, och vi ska nu studera några olika typer av konvergens.

Låt $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en följd av funktioner. Vi säger att f_n **konvergerar punktvís** mot en funktion f , som vi skriver som $f_n \rightarrow f$ punktvís, om $|f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in U$.

Exempel 21. Låt $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f_n(z) = \frac{z}{n}$. Då $f_n \rightarrow 0$ punktvís, ty

$$|f_n(z) - 0| = |z/n| \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Exempel 22. Låt $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom $f_n(x) = \sin^n x$. Då konvergerar f_n punktvis på $[0, \pi]$ men inte på $[3\pi/4, 7\pi/4]$. Låt oss visa detta. Tag $x \in [0, \pi]$ och studera följderna $\{\sin^n x\}_{n=1}^\infty$. Om $x \neq \pi/2$ så är $0 \leq \sin x < 1$ och därför är $\sin^n x \rightarrow 0$. Om $x = \pi/2$ så är $\sin x = 1$, så $\sin^n x \rightarrow 1$. Så

$$f_n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{om } x \neq \pi/2 \\ 1 & \text{om } x = \pi/2 \end{cases}.$$

Detta visar att även fast f_n är kontinuerlig så behöver inte gränsfunktionen vara kontinuerlig.

Låt oss nu visa det andra påståendet. Låt $x = 3\pi/2 \in [3\pi/4, 7\pi/4]$. Då är $\sin x = -1$ så $\sin^n x = (-1)^n$, som inte har något gränsvärde. $\square$

Eftersom punktvis konvergens inte ens bevarar kontinuitet så inför vi en annan konvergens:

Definition 1.26. Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vara komplexvärda funktioner definierade på en mängd U . Vi säger att f_n **konvergerar likformigt** mot en funktion f , som vi skriver som $f_n \rightarrow f$ likformigt, om $\sup_{z \in U} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ för alla $z \in U$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 21. Visa att likformig konvergens implicerar punktvis konvergens, så likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens.

Anmärkning 13. Omvändningen gäller inte, som exempel 33 visar. $\square$

Exempel 23. Definiera $f_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f_n(z) = 1/z + 1/n$, och låt $g_n: \mathbb{C} \setminus \{-a\} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $g_n(z) = 1/(n(z+a))$. Det är lätt att se att $f_n \rightarrow 1/z$ både punktvis och likformigt. Det är även lätt att se att $g_n \rightarrow 0$ både punktvis och likformigt. Men $f_n g_n \rightarrow 0$ punktvis, medan $f_n g_n \not\rightarrow 0$ likformigt, som visar ytterligare på ett exempel att likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens. $\square$

En egenskap som likformig konvergens har är att den bevarar kontinuitet, jämför punktvis konvergens i exemplet ovan. Det är precis det proposition 10 säger. Beviset av propositionen ger ett bra exempel på där triangelolikheten kommer in, och där man använder kanske ett av det mest använda matematiska "tricken", dvs lägga till och dra ifrån samma sak. Beviset är också ett bra exempel på där ett så kallat $\varepsilon/3$ -argument kommer in. Studera beviset och lägg metoden på minnet. Kolla därefter på bokens diverse exempel.

Det nästföljande avsnitten behöver ni inte studera så noggrant. Ekvikontinuitet är helt enkelt en familj av likformigt kontinuerliga funktioner, och Arzela-Ascolis sats är inget ni behöver lägga någon energi på. Jag anser att dessa begrepp ligger utanför kursinnehållet. Däremot, om ni är intresserade, så innehåller beviset av Arzela-Ascolis sats en väldigt viktig metod. Metoden brukar kallas för Cantors diagonalprocess och används bland annat då man visar att $\mathbb{Q}$ är uppräknligt. Därför rekommenderar jag starkt att ni tar en titt på första halvan av beviset av satsen, dvs sidan 43.

Vi börjar nu istället med att studera serier och dess konvergens. En serie är helt enkelt en oändlig summa av komplexa tal, dvs

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j.$$

Låt $s_n = \sum_{j=1}^n z_j$ vara en delsumma av den ovanstående serien; denna brukar kallas partialsumma. Observera att partialsummorna bildar en följd av komplexa tal, nämligen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Om följden av partialsummor konvergerar så säger vi att serien konvergerar, mer precist har vi

Definition 1.27. Vi säger att $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ **konvergerar mot z** , och skriver $\sum_{j=1}^{\infty} z_j \rightarrow z$ (oftast skriver vi likhetstecken och inte går-mot-pil), om partialsummorna $s_n \rightarrow z$ då $n \rightarrow \infty$, dvs $|s_n - z| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Om en serie inte konvergerar så säger vi att den **divergerar**.

Observera att det är ett nödvändigt villkor att termerna i serien går mot noll, dvs att $z_j \rightarrow 0$, för att serien ska konvergera. Men det är inte ett tillräckligt villkor, dvs om $z_j \rightarrow 0$ så behöver inte serien konvergera, men om serien konvergerar så kommer $z_j \rightarrow 0$. Boken gör detaljerna på dessa påståenden.

Jag tänkte nu nämna de saker som jag tycker är viktiga om serier. Vi säger att en serie $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ är **absolutkonvergent** om $\sum_{j=1}^{\infty} |z_n|$ konvergerar. En viktig sak som gäller absolutkonvergenta serier är att de är konvergenta. Låt oss visa detta faktum.

Bevis av att absolutkonvergenta serier är konvergenta. Låt $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ vara absolutkonvergent. Betrakta partialsummorna $s_n = \sum_{j=1}^n z_j$. Då är

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |z_j|.$$

Eftersom vi har en absolutkonvergent serie till att börja med så kommer högerledet gå mot noll då $n, m \rightarrow \infty$. Detta betyder att $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ är Cauchy, och eftersom $\mathbb{C}$ är fullständigt så kommer det finnas ett z så att $s_n \rightarrow z$, dvs att $\sum_{j=1}^{\infty} z_j = z$. $\square$

Låt nu $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ vara komplexvärda funktioner definierade på samma mängd. Betrakta serien $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$. Vi säger att denna serie **konvergerar punktvis (likformigt)** om partialsummorna $s_n(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z)$ konvergerar punktvis (likformigt). Följande lemma är viktigt då vi kommer studera Laurentserier senare i kursen:

Lemma 1.28. (Geometrisk serie)

Serien $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ konvergerar mot $1/(1-z)$ för $|z| < 1$, dvs på enhetsdisken.

Bevis. Observera att

$$(1-z)(1+z+z^2+\dots+z^n) = 1+z+z^2+\dots+z^n - z - z^2 - \dots - z^n - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}.$$

Dela nu $(1-z)$ varvid får att

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Låt nu $n \rightarrow \infty$ varvid $z^{n+1} \rightarrow 0$ ty $|z| < 1$, så resultatet följer. $\square$

Exempel 24. Vi har att $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k z^k = \frac{1}{1+2z}$ om $|2z| < 1$, dvs på $B(0, 1/2)$. $\square$

Exempel 25. Vi har att $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ om $|z^{-1}| < 1$, dvs för $|z| > 1$. $\square$

Exempel 26. Vi kan även gå baklänges. Säg att $z \in \mathbb{C}$ uppfyller att $|z-i| < 1/5$. Då gäller att

$$\frac{1}{1-5(z-i)} = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k (z-i)^k,$$

ty $|5(z-i)| < 1$, dvs $|z-i| < 1/5$. $\square$

En annan viktig sats som är användbart inom många områden inom analysen är Weierstrass M-test:

Sats 1.29. (Weierstrass M-test)

Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av komplexvärda funktioner definierade på samma mängd. Antag att f_n är begränsade för stora n , dvs att det finns konstanter M_n så att

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

för varje z . Antag vidare att $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, dvs att den konvergerar. Då gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, och även $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, är likformigt konvergent.

Bevis. Beviset hittar ni i boken. $\square$

Potenssrier och dess konvergensradier

En serie på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, där $a_n \in \mathbb{C}$, kallas en **potensserie** i $(z-z_0)$. Vi ska nu få fram villkor när en sådan potensserie konvergerar. Det kommer visa sig att en potensserie konvergerar på en disk. Radien på denna disk kallas för potensseriens **konvergensradie**.

För att kunna formulera den första satsen som uttalar sig om potensseriers konvergensradie så måste vi definiera begreppen $\limsup$ och $\liminf$. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ vara en följd, och sätt

$$\mathcal{M} := \{a \in \mathbb{R} : \text{det finns en delföljd till } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ som konvergerar mot } a\}.$$

Eftersom varje konvergent följd är begränsad så kommer mängden $\mathcal{M}$ vara en begränsad mängd, så $S = \sup \mathcal{M}$ existerar och det är S som vi brukar kalla för $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Proposition 1.30. *För varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N så att $a_n < S + \varepsilon$ för alla $n \geq N$.*

INLÄMNINGSUPPGIFT 22. *Visa propositionen ovan.*

Propositionen ovan säger alltså att $\limsup$ så gott som alltid ligger över följden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, åtminstone svansen på följden. Nästa proposition säger att $\limsup$ så gott som alltid ligger under följden.

Proposition 1.31. *För varje $\varepsilon > 0$, och för varje $m \in \mathbb{Z}_+$ så finns det ett $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $k > m$ och*

$$S - \varepsilon < a_k.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 23. *Visa propositionen ovan.*

Dessa två propositioner ska inte förvåna er, eftersom $\limsup$ är definierad utifrån konvergenta delföljder och $\sup$. Propositionerna implicerar även att man kan uttrycka $\limsup$ som ett gränsvärde:

Proposition 1.32.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{a_k, a_{k+1}, \dots\}.$$

Bevis. Se boken. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 24. *Låt $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ vara två följder. Visa att $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$, och ge ett motexempel på att omvända olikheten inte alltid gäller.*

Vi kan nu förstås göra detta omvänt och använda $\inf$ istället för $\sup$. Då får vi det så kallade $\liminf$. Mer precist så definierar vi $I = \inf \mathcal{M}$ att vara $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Vi kan då få liknande resultat som propositionerna ovan:

Proposition 1.33. *För varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N så att $a_n > I - \varepsilon$ för alla $n \geq N$.*

Proposition 1.34. *För varje $\varepsilon > 0$, och för varje $m \in \mathbb{Z}_+$ så finns det ett $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $k < m$ och*

$$I + \varepsilon > a_k.$$

Proposition 1.35.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{a_k, a_{k+1}, \dots\}.$$

Konvergens kan karakteriseras i termer av $\limsup$ och $\liminf$:

INLÄMNINGSUPPGIFT 25. En följd $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ är konvergent om och endast om $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Vi kan nu äntligen säga nåt om konvergensradien för potensserier.

Sats 1.36. (Cauchy-Hadamards sats)

Låt $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ vara en potensserie, och låt

$$\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} |a_j|^{1/j}, \quad R = 1/\alpha.$$

Då gäller att

1. Om $|z - z_0| < R$ så konvergerar serien absolut.
2. Om $|z - z_0| > R$ så divergerar serien.
3. Om $0 < r < R$ så konvergerar serien likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$.

Bevis. Se boken. □

Några kommentarer angående satsen. (1) säger alltså att serien konvergerar på $B(z_0, R)$, och på dess komplement så divergerar den. $B(z_0, R)$ är alltså den största disken (bollen) som serien konvergerar på. (3) säger att serien konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd till $B(z_0, R)$. Om $\alpha = 0$ så gör vi konventionen att $R = \infty$ och om $\alpha = \infty$ så gör vi konventionen att $R = 0$, precis som vi gjorde på Riemannsfären. Att $R = \infty$ betyder att serien konvergerar på hela $\mathbb{C}$. Däremot om $R = 0$ så ger satsen endast att serien konvergerar för $z = z_0$.

Ett annat sätt att hitta konvergensradien för en potensserie är att använda sig av det så kallade kvottestet:

Sats 1.37. (Kvottestet)

Låt $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ vara en potensserie. Om

$$\beta = \sup_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right|$$

existerar, så kommer serien konvergera på $B(z_0, 1/\beta)$.

Bevis. Se boken. □

Anmärkning 14. I slutet på beviset så har boken ett påstående: Om $c > 0$ så är $c^{1/n} \rightarrow 1$. Kommer ni ihåg hur man visar detta? Gör alla detaljer. □

Exponentialfunktioner, logaritmer och trigonometriska funktioner

Boken använder sig av potensserier för att definiera den komplexa exponentialfunktionen. Detta är förvisso ett väldigt bra sätt att definiera den på, men jag tänkte göra det lite annorlunda så att ni får se ett annat sätt. Gå igenom bokens framställning och jämför med min.

Vi vill alltså definiera e^z för $z = x + iy \in \mathbb{C}$. En egenskap som den reella exponentialfunktionen har är att $e^x e^y = e^{x+y}$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Vi vill även att den komplexa exponentialfunktionen ska uppfylla detta, dvs att $e^z e^w = e^{z+w}$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. För att detta ska vara uppfyllt så måste $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ vara uppfyllt. Denna ekvation visar att det enda vi måste definiera för att detta ska vara uppfyllt är e^{iy} , ty e^x vet vi redan vad det är. Betrakta i som en konstant, varvid vi har att

$$\frac{d^2 e^{iy}}{dy^2} = -e^{iy}.$$

Detta betyder att vi måste lösa en ordinär differentialekvation på formen

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = f.$$

Som ni vet så har denna generell lösning $f(y) = A \cos y + B \sin y$. Utifrån

$$f(0) = e^{i \cdot 0} = 1 = A \cos 0 + B \sin 0 = A$$

och

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{y=0} = i f(0) = i = (-A \sin 0 + B \cos 0) = B,$$

så får vi att $A = 1$ och $B = i$. Så om vi definierar $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ så kommer $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Vi formulerar det vi har gjort ovan i en definition:

Definition 1.38. För varje $z = x + iy \in \mathbb{C}$ så definierar vi e^z genom

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

Anmärkning 15. Metoden som vi använde ovan för att definiera exponentialfunktionen brukar användas flitigt inom matematiken, dvs man utgår från vad man vill att objektet som skall definieras ska uppfylla, och definiera därefter objektet efter dessa egenskaper. $\square$

Observation 1. Kom ihåg att vi såg tidigare att varje $z \in \mathbb{C}$ kan representeras som $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ för $\theta \in \arg(z)$. Enligt definitionen av $e^{i\theta}$ så får vi att $z = |z|e^{i\theta}$ för $\theta \in \arg(z)$. Det är denna representation som brukar kallas för **polär form**. $\square$

Det är lätt att verifiera att exponentialfunktionen uppfyller följande egenskaper:

1. $e^z/e^w = e^{z-w}$
2. $e^z = 1$ om och endast om $z = 2\pi ki$ för $k \in \mathbb{Z}$.
3. $e^z = e^w$ om och endast om $z = w + 2\pi ki$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Observera att egenskap (3) säger att den komplexa exponentialfunktionen inte är injektiv, däremot är den injektiv på varje boll med radie π :

INLÄMNINGSUPPGIFT 26. Visa att e^z är injektiv på $B(z, \pi)$ där $z \in \mathbb{C}$.

Kom ihåg Eulers formler, dvs för $y \in \mathbb{R}$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Dessa följer direkt från definitionen av e^{iy} , ty man gör lämpliga linjärkombinationer av e^{iy} och e^{-iy} . Detta föreslår definitionen av de komplexa trigonometriska funktionerna.

Definition 1.39. För varje $z \in \mathbb{C}$ så definierar vi

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Det är lätt att se att de vanliga trigonometriska formlerna gäller:

1. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
2. $\sin(-z) = -\sin z$
3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
4. $\cos(-z) = \cos z$
5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
6. $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$
7. $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
8. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
9. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Vi har också följande lemma:

Lemma 1.40. $\sin z = 0$ om och endast om $z = k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Om $z = k\pi$ så är det klart att $\sin z = 0$. Omvänt, antag att $\sin z = 0$, dvs att

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0.$$

Detta betyder att $e^{iz} = e^{-iz}$. Nu ger egenskap (3) för den komplexa exponentialfunktionen att

$$iz = -iz + 2\pi ki.$$

Flytta över $-iz$ och dela med $2i$ så får vi $z = k\pi$, vilket avslutar beviset. $\square$

Ni kan därefter strunta i att läsa om de hyperboliska funktionerna $\sinh z$ och $\cosh z$.

Det är dax att ge oss på den komplexa logaritmen. Den komplexa logaritmen definierar vi som den inversa funktionen till den komplexa exponentialen, dvs

$$w = \log z \text{ om } z = e^w \quad z \neq 0.$$

Eftersom e^z är periodisk så kommer även logaritmen bygga på argumentet:

$$\log z := \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

där $\ln$ är den reella logaritmen. Om vi nu väljer att restringera oss till en gren av argumentet, t.ex. principalgrenen, så kommer logaritmen självklart påverkas av detta. I detta fall så får vi

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

där det versala L:et är i analogi med A:et i $\operatorname{Arg} z$. Vi har följande egenskaper för den komplexa logaritmen:

1. Om $z \neq 0$ så är $z = e^{\log z}$.
2. $\log e^z = z + 2k\pi i$ för $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\log(zw) = \log z + \log w$.
4. $\log(z/w) = \log z - \log w$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 27. Låt $f(z) = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$. Visa att f inte är kontinuerlig på $B(0, 1)$.

Uppgiften säger alltså att den komplexa logaritmen är diskontinuerlig med period 2π .

Anmärkning 16. Låt oss nu diskutera bokens terminologi angående flervärda funktioner. Observera att en funktion per definition är envärd, men vad menar de då med en flervärd funktion. En funktion $f: M \rightarrow N$, där M, N är mängder, kallas **flervärd** om för alla $p \in M$ så är $f(p)$ en delmängd till N . Vi ser alltså $f: M \rightarrow N$ som en flervärd funktion om $f: M \rightarrow \mathcal{P}(N)$ där $\mathcal{P}(N)$ är potensmängden.

Nu när vi har koll på flervärda funktioner så är det dags att få koll på koll på grenar. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$, vara en flervärd funktion. En **gren** av f är en funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ som är kontinuerlig i Ω och så att för varje $z \in \Omega$ är $F(z) \in f(z)$. Alltså är en gren av en flervärd funktion ett kontinuerligt val av funktionsvärden så att funktionsvärdet i en viss punkt är ett av den flervärda funktionens värden. $\square$

Vi ska återkomma till val av grenar för logaritmen. Det visar sig att logaritmen uppförs sig väldigt bra när man väl har valt en gren, men mer om detta senare.

Kom ihåg att för varje nollskilt reellt tal x så kan vi definiera x^y , där $y \in \mathbb{R}$, som $e^{y \ln x}$. Vi följer denna linje då vi höjer upp ett komplext tal med ett komplext tal:

Definition 1.41. Om $\alpha, z \in \mathbb{C}$ och $z \neq 0$ så definierar vi z^α genom

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}.$$

Eftersom logaritmen beror på vilken gren vi väljer så kommer även komplexa potenser bero på vilken gren vi väljer. Observera att

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i)} = e^{\alpha(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} e^{\alpha 2k\pi i},$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Då kommer värdena för z^α vara lika, om vi väljer $k = k_1$ och $k = k_2 \neq k_1$, om

$$e^{\alpha 2k_1\pi i} = e^{\alpha 2k_2\pi i}.$$

Men enligt egenskaperna för den komplexa exponentialfunktionen så gäller detta om och endast om

$$\alpha 2k_1\pi i = \alpha 2k_2\pi i + 2n\pi i,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Löser vi ekvationen så får vi att

$$\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}.$$

Vi sammanfattar konsekvenserna av denna uträkning i några punkter.

1. Om $\alpha \in \mathbb{Q}$ så antar z^α endast ett ändligt antal värden.
2. Om $\alpha \in \mathbb{Z}$ så kommer z^α endast anta ett värde.
3. Annars så antar z^α oändligt många värden.

INLÄMNINGSUPPGIFT 28. Är *principalvärdet* till $(z_1 z_2)^\alpha$ lika med produkten av *principalvärdena* $z_1^\alpha z_2^\alpha$? Visa eller motbevisa.

Resten av kapitlet kan ni läsa på egen hand.