

Kapitel 10

Läsanvisningar till kapitel 10

De avsnitt som ingår i detta kapitel är 10.2.1 (åtminstone definitionen av konform avbildning), 10.2.5 (denna sats har ni sett förrut), 10.2.7 och 10.3.1 – 10.3.5. Jag kommer här gå igenom vissa bitar och lämna resten åt er själva att läsa.

Låt oss introducera så kallade konforma avbildningar, dvs avbildningar som bevarar vinklar mellan två kurvor i en speciell punkt. Detta betyder att om γ_1 och γ_2 möts i en punkt z , så är vinkeln mellan dessa lika med vinkeln mellan $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ i punkten $f(z)$. Avslutningsvis så bör man känna till, utan bevis, följande sats:

Sats 10.1. (Riemanns avbildningssats)

Om Ω och $\tilde{\Omega}$ är enkelt sammanhängande områden som inte är lika med $\mathbb{C}$, så finns en biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$.

Anmärkning 48. En avbildning f är **biholomorf** om den är holomorf med holomorf invers. $\square$

Anmärkning 49. Kom ihåg att detta bara är en existenssats, så vi vet inte hur denna avbildning ser ut! $\square$

Bokens sats säger att om $\Omega \subset \mathbb{C}$ är enkelt sammanhängande så att $\Omega \neq \mathbb{C}$ så finns det en biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow B(0, 1)$. Satsen jag formulerade följer från denna, ty om Ω och $\tilde{\Omega}$ är som ovan så finns det biholomorfa avbildningar $f: \Omega \rightarrow B(0, 1)$ och $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow B(0, 1)$. Detta ger att $\tilde{f}^{-1} \circ f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ också är biholomorf, som är min formulering av Riemanns avbildningssats.

Möbiusavbildningar

Låt oss börja med några exempel på avbildningar.

- Translation: Detta är en funktion $f(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$. En translation flyttar ett objekt c ”steg”.

- Rotation: Funktionen $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, roterar ett objekt med θ radianer moturs.
- Skalning: $f(z) = \rho z$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, är en skalningsfunktion, så den förminskar eller förstörar objekt. Speciellt har vi att om $w = f(z)$, för w_1, w_2 i w -planet

$$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)| = |\rho z_1 - \rho z_2| = \rho |z_1 - z_2|.$$

- Affina avbildningar: Detta är en avbildning på formen $f(z) = az + b$. Vi kan skriva f som en komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

där f_1 är en rotation, f_2 en skalning, och f_3 en translation.

- Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$. Denna vänder "ut-och-in" på områden.

Dessa olika typer av avbildningar är viktiga för så kallade Möbiusavbildningar, så det är dags att definiera dessa:

Definition 10.2. En Möbiusavbildning är en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som definieras genom

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$.

Anmärkning 50. Villkoret $ad - bc \neq 0$ betyder att determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ska vara nollskild. □

Observation 14.

- Om $c = 0$, då är $ad \neq 0$ och

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

är en affin avbildning.

- Om $c \neq 0$, då har $f(z)$ en pol i $z = -\frac{d}{c}$.
- Om $a \neq 0$, då har $f(z)$ ett nollställe i $z = -\frac{b}{a}$.

□

Anmärkning 51. Möbiusavbildningar är konforma avbildningar. $\square$

Affina avbildningar kan vi betrakta som avbildningar $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ med $\infty \mapsto \infty$. Då blir dessa avbildningar bijektiva. Om vi betraktar inversionsavbildningen som en avbildning $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ med $0 \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto 0$ så blir även denna bijektiv. Vad händer då om vi betraktar Möbiusavbildningar som avbildningar på $\mathbb{C}_\infty$? Jo, de blir också bijektiva, och om $c \neq 0$ så $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto \frac{a}{c}$. Vidare så ges dess derivata av

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz + d)^2}$$

och f :s invers av

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Observation 15. Notera att f^{-1} också är en Möbiusavbildning med $\infty \mapsto -\frac{d}{c}$ och $\frac{a}{c} \mapsto \infty$. $\square$

Vi har följande viktiga sats om Möbiusavbildningar:

Sats 10.3. Låt f vara en Möbiusavbildning. Då gäller att

1. f kan uttryckas som en sammansättning av en ändlig följd av translationer, rotationer, skalningar och inversioner.
2. $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ är bijektiva.
3. f avbildar mängden {linjer, cirklar} på sig själv.

Bevis. Se boken. $\square$

Slutsats (3) i satsen ovan betyder speciellt att en linje kan avbildas på en cirkel och vice versa. För Möbiusavbildningar har vi en annan viktig sats, nämligen:

Sats 10.4. (Avbildningsprincipen)

Låt f vara en Möbiusavbildning och låt γ vara en enkel styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}_\infty$. Då är $\mathbb{C} \setminus \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ en disjunkt union av två områden. Vidare så är $\gamma^* := f(\gamma)$ en kurva i $\mathbb{C}_\infty$ och $\mathbb{C} \setminus \gamma^* = f(\Omega_1) \cup f(\Omega_2)$.

Anmärkning 52. Rita en bild av avbildningsprincipen. $\square$

Möbiusavbildningar är tillräckliga för att avbilda tre valfria punkter på tre andra valfria punkter, mer precis har vi

Sats 10.5. Antag att $a_j \in \mathbb{C}_\infty$ för $j = 1, 2, 3$ är distinkta punkter och antag även att $b_j \in \mathbb{C}_\infty$ för $j = 1, 2, 3$ är distinkta punkter. Då finns det en Möbiusavbildning f så att $f(a_j) = b_j$.

Bevis. Se boken. $\square$

Anmärkning 53. Beviset av satsen är väldigt viktigt, eftersom den berättar precis hur Möbiusavbildningen ska se ut. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 93. Hitta en Möbiusavbildning som avbildar 0 på i , 1 på 2 och -1 till 4.

INLÄMNINGSUPPGIFT 94. Hitta en Möbiusavbildning som avbildar $\overline{B(0,1)}^c$ på $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Nu till några exempel.

Exempel 99. Betrakta $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Detta är en Möbiusavbildning eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Vi har att

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}.$$

Låt $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = 2z$ och $f_4(z) = z + 1$. Då är

$$f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z).$$

Låt oss kolla hur f avbildar $|z| = 1$. Först så translaterar f_1 cirkeln. Efter detta så blir cirkeln en linje via inversionen. Därefter så förlänger vi linjen med f_3 och slutligen så translaterar vi linjen igen. Alltså avbildar f cirkeln $|z| = 1$ på en linje. Eftersom en linje bestäms av två punkter så tar vi två punkter på enhetscirkeln och avbildar dessa med f :

$$i \mapsto \frac{i+1}{i-1} = i$$

och

$$-1 \mapsto 0.$$

Den enda linjen som går genom 0 och i är $\operatorname{Re}(z) = 0$. Så bilden av $|z| = 1$ under f är $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Låt oss kolla med avbildningsprincipen vart det inre av $|z| = 1$ och det yttre hamnar. Tag därför en punkt innanför, t.ex. $z = 0$. Denna avbildas av f till -1 , så vi drar slutsatsen att allt innanför cirkeln avbildas till vänstra halvplanet ($\operatorname{Re}(z) < 0$), och avbildar allt utanför cirkeln till högra halvplanet ($\operatorname{Re}(z) > 0$). (Tag en annan punkt och testa!) $\square$

Exempel 100. Vi ska beskriva bilden av $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ under avbildningen $f(z) = \frac{z-i}{z}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i \neq 0$$

så är f en Möbiusavbildning.

För att få koll på hur detta område avbildas med f ska vi använda oss av argumentprincipen. Problemet är att vi inte har några kurvor att avbilda. Därför kollar vi vad som händer med $\operatorname{Im} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = 1$.

Vi börjar med $\operatorname{Im} z = 0$. Eftersom f har en pol i $z = 0$ som ligger på $\operatorname{Im} z = 0$ så måste denna linje avbildas på en linje. En linje bestäms av två punkter på $\operatorname{Im} z = 0$, t.ex. $z = -1$ och $z = 1$. Dessa ger att

$$f(-1) = 1 + i$$

och

$$f(1) = 1 - i.$$

Vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z = 0$ på $\operatorname{Re} z = 1$. För att bestämma hur $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas, så tar vi en punkt med $\operatorname{Im} z > 0$ och använder avbildningsprincipen, Tag t.ex. $z = i$, då får vi att $f(i) = 0$, så vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z > 0$ på $\operatorname{Re} z < 1$. Låt oss nu kolla på hur f avbildar $\operatorname{Im} z = 1$. Funktionen f saknar pol på $\operatorname{Im} z = 1$, därför måste $\operatorname{Im} z$ avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter. Vi har att

$$f(-1 + i) = \frac{1}{2}(1 + i),$$
$$f(i) = 0$$

och

$$f(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - i)$$

där $-1 + i$, 0 och $1 + i$ ligger på $\operatorname{Im} z = 1$. Ur detta får man cirkelns ekvation, vi får räkna lite själva också, $|z - 1/2| = 1/2$. Men hur avbildas $\operatorname{Im} z < 1$. Tag en punkt med $\operatorname{Im} z < 1$, t.ex. $i/2$, så får vi att $f(i/2) = -1$, så z med $\operatorname{Im} z < 1$ avbildas utanför cirkeln $|z - 1/2| = 1/2$.

Alla uträkningar ovan ger att området A avbildas via f till

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1, |z - 1/2| > 1/2\}.$$

Rita en bild över vad som händer!

□

Exempel 101. Låt

$$f(z) = \frac{2 + z}{3 - 2z}.$$

Låt oss bestämma $f(B(0, 1))$.

Vi börjar med att konstatera att f är en Möbiusavbildning, ty

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 \neq 0.$$

Eftersom f inte har någon pol på $|z| = 1$ så kommer denna cirkel avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter, så vi får att

$$f(1) = 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{5}$$

$$f(i) = \frac{4}{13} + \frac{7i}{13}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{8}{5}| = \frac{7}{5}$. Eftersom $f(0) = \frac{2}{3}$, och $\frac{2}{3}$ ligger i $B(\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$ så ger avbildningsprincipen att

$$f(B(0, 1)) = B\left(\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

□

Exempel 102. Låt $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2, |z - 1| < 5\}$ och låt $f(z) = \frac{z-2i}{z-4}$. Låt oss bestämma $f(D)$.

Vi börjar med att konstatera att f är en Möbiusavbildning, ty

$$\begin{vmatrix} 1 & -2i \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2i \neq 0.$$

Det vi måste göra är att se vart linjen $\operatorname{Re} z = 2$ och vart cirkeln $|z - 1| = 5$ avbildas under f . Eftersom det inte finns någon pol på $\operatorname{Re} z = 2$ så kommer denna linje avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter, så låt oss ta tre punkter och se vart dessa avbildas:

$$f(2) = -1 + i$$

$$f(2 + 2i) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$f(2 - 2i) = \frac{1}{2} + \frac{5i}{4}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{i}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vidare, eftersom $f(3) = -3 + 2i$, som ligger utanför cirkeln, så ger avbildningsprincipen att

$$f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2\}) = \overline{B\left(\frac{i}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}^c.$$

Kvar att göra är att bestämma vart cirkeln $|z - 1| = 5$ avbildas. Eftersom f inte har någon pol på denna cirkel så kommer cirkeln avbildas på en cirkel. Som vi vet så bestäms en cirkel av tre punkter:

$$f(6) = 3 - i$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} + \frac{i}{4}$$

$$f(1-5i) = \frac{16}{17} + \frac{13i}{17}$$

Den cirkel som går genom dessa punkter är $|z - \frac{7}{4} + \frac{3i}{8}| = \frac{5\sqrt{5}}{8}$. Eftersom $f(0) = \frac{i}{2}$ så ger avbildningsprincipen att

$$f(B(1, 5)) = B\left(\frac{7}{4} - \frac{3i}{8}, \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^c.$$

Lägger vi ihop dessa två uträkningar så ser vi att

$$f(D) = B\left(\frac{7}{4} - \frac{3i}{8}, \frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^c \cap B\left(\frac{i}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^c.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 95. Låt

$$f(z) = \frac{1}{2\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - 1}.$$

Bestäm $f(B(0, 1))$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 96. Låt $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| < 2\}$ och låt $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$. Bestäm $f(D)$.

Automorfier och Schwarz lemma

Vi ska studera en speciell typ av avbildningar ett tag, nämligen så kallade automorfier:

Definition 10.6. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. En biholomorf avbildning $f: \Omega \rightarrow \Omega$ kallas för en **automorfi**. Vi skriver mängden av automorfier på Ω som $\operatorname{Aut}(\Omega)$.

Vi ska speciellt studera $\operatorname{Aut}(B(0, 1))$ och $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. För $\alpha \in B(0, 1)$ sätt

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Boken visar att $\varphi_\alpha: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ är en biholomorf avbildning i avsnitt 10.3.3.1 med invers $\varphi_{-\alpha}$. Man kan till och med visa följande sats:

Sats 10.7. $f \in \text{Aut}(B(0,1))$ om och endast om det finns $\omega, \alpha \in B(0,1)$ så att $f(z) = \omega \cdot \varphi_\alpha(z)$.

Bevis. Att $f(z) = \omega \cdot \varphi_\alpha(z)$ är en automorfi nämnde ovanför satsen. Å andra sidan, låt $f \in \text{Aut}(B(0,1))$. Sätt $b = f(0)$, och betrakta avbildningen $\varphi_b \circ f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$. Denna är då en automorfi av disken. Observera att $\varphi_b \circ f(0) = 0$. Det finns då ett $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ så att $\varphi_b \circ f = \omega z$ för alla $z \in B(0,1)$ (se nedan). Då gäller att

$$f(z) = \varphi_b^{-1}(\omega z) = \varphi_{-b}(\omega z) = \omega \frac{z + b\omega^{-1}}{1 + \overline{b\omega^{-1}}z}.$$

Alltså är $f(z) = \omega \varphi_\alpha$ där $\alpha = -b\omega^{-1}$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 97. Låt $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ vara en holomorf avbildning med $f(0) = 0$. Då är f biholomorf om och endast om det finns ett $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ så att $f(z) = \omega z$ för alla $z \in B(0,1)$.

Denna inlämningsuppgift säger att de enda biholomorfa avbildningar som fixerar origo måste vara en rotation, ty $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$ precis är på formen $e^{i\theta}$.

Sats 10.8. (Schwarz lemma)

Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$. Antag att

(a) $|f(z)| \leq 1$ för alla z .

(b) $f(0) = 0$.

Då gäller att $|f(z)| \leq |z|$ och $|f'(0)| \leq 1$. Vidare om $|f(z)| = |z|$ för något nollskilt z eller om $|f'(0)| = 1$ då är f en rotation, dvs $f(z) = \omega z$ för $\omega \in \mathbb{C}$ med $|\omega| = 1$

Bevis. Se boken. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 98.

(a) Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$ vara sådan att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0,1)$ och $f(z_0) = 0$, $z_0 \in B(0,1)$. Visa att

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|.$$

(b) Låt nu $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ vara holomorf. Visa att

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|.$$

Det avslutande resultatet karakteriserar automorfierna av $\mathbb{C}$:

Sats 10.9. $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ om och endast om $f(z) = az + b$ för $a, b \in \mathbb{C}$ med $a \neq 0$.

Anmärkning 54. Inget liknande resultat finns om automorfier av $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. □