

Kapitel 2

Läsanvisningar till kapitel 2

Differentierbarhet, deriverbarhet och holomorficitet

I detta avsnitt så kommer vi börja våran studie av funktioner definierade på en delmängd till det komplexa talplanet. I förra kapitlet så började vi studera kontinuerliga funktioner, både abstrakt definierade på metriska rum och mer konkret på $\mathbb{C}$. Här tar vi steget och börjar talar om deriverbarhet.

Definition 2.1. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $w \in \Omega$ vara en fixerad punkt. Om det finns ett komplext tal, som vi skriver som $f'(w)$, så att

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f'(w)$$

så säger vi att f är **deriverbar i punkten** w . Ibland så skriver vi detta som $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=w}$. En funktion som är deriverbar i alla punkter $w \in \Omega$ kallar vi för en **deriverbar funktion**.

Anmärkning 17. Boken kallar en deriverbar funktion för en holomorf funktion. Vi ska definiera holomorfa funktioner på ett litet annat sätt senare. $\square$

Observation 2. Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

i definitionen ovan. Låt $z = w + h$ varvid $z \rightarrow w$ betyder att $h \rightarrow 0$, så deriverbarhet i punkten w kan skrivas ekvivalent som

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w + h) - f(w)}{h}.$$

Här är det viktigt att inse att även h är ett komplext tal, så det finns många sätt för h att gå mot noll. $\square$

Säg att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är en funktion. Eftersom vi kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ så kan vi skriva om f som en funktion från Ω som delmängd till $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{C}$. Hur går detta till? Jo, om $z = x + iy$ så definierar vi $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$, som vi kallar **realdelen** respektive **imaginärdelen** för z . Observera att

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{och} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Detta tillvägagångssätt kan vi använda oss för vilken funktion som helst. Definiera

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{och} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)),$$

varvid $f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 29. Visa eller motbevisa att $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ och $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 30.

- a) Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara komplexlinjär och låt $u = \operatorname{Re} f$. Visa att u är reell-linjär och att $f(z) = u(z) - iu(iz)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.
- b) Låt $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ vara reell-linjär och låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = u(z) - iu(iz)$. Visa att f är komplexlinjär. Vidare, visa att $\sup_{|z|=1} |u(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Anmärkning 18. Blanda inte ihop imaginärdelen för funktionen f och bilden för funktionen f , vi skriver båda som $\operatorname{Im}(f)$. Jag hoppas att detta inte ska röra ihop det för er, utan att det ska framgå från sammanhanget vilket Im jag menar. $\square$

Observera att grafen till $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, som man brukar beteckna med $\Gamma(f)$, är ett 4-dimensionellt reellt vektorrum.

Anmärkning 19. Grafen definieras genom

$$\Gamma(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(z) = w\}.$$

$\square$

Exempel 27. Låt oss uttrycka funktionen $f(z) = e^{3z}$ på formen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. För att göra detta, låt $z = x + iy$. Då är

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) = f(x, y) = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) = \\ &= e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y. \end{aligned}$$

Sätt $u(x, y) = e^{3x} \cos 3y$ och $v(x, y) = e^{3x} \sin 3y$, varvid $f = u + iv$. $\square$

Exempel 28. Låt $z = x + iy$ och betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$. Vi ska skriva f i termer av z och $\bar{z}$. För att göra detta så börjar vi att komma ihåg att

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

och

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Då får vi att

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right) - 2 + i\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right) = \dots \\ &\dots = |z|^2 + i\bar{z} - 2, \end{aligned}$$

så $f(x, y) = f(z) = |z|^2 + i\bar{z} - 2$. $\square$

Detta exempel ger oss en väg från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{C}$, och det är ett mycket mer "komplext" vis att skriva funktioner i termer av z och $\bar{z}$, dvs se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som en funktion i z och $\bar{z}$. Eftersom vi håller på med komplex analys så tycker jag att det är bättre att få en komplex syn på det hela.

Antag nu att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är en deriverbar funktion. Skriv $f = u + iv$. Vi ska nu utreda vad deriverbarheten säger om u och v som är funktioner $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(w) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(w+h) + iv(w+h) - u(w) - iv(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(w+h) - u(w)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(w+h) - v(w)}{h} = u'(w) + iv'(w) \end{aligned}$$

Alltså måste även funktionerna u och v vara deriverbara. Det omvända gäller inte, som vi ska se snart.

Exempel 29. Betrakta funktionen $f(z) = f(x + iy) = x$. Vi har, för $w = u + iv$, att

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{x - u}{(x - u) + i(y - v)}.$$

Låt nu $z \rightarrow w$. Om vi går längs linjen $y = v$ så kommer gränsvärdet vara lika med 1, och om vi går längs linjen $x = u$ så är gränsvärdet lika med 0. Eftersom gränsvärdena är unika så kan inte differenskvoten ovan inte existera då $z \rightarrow w$. Detta betyder att även fast funktionen f är deriverbar med avseende på $x \in \mathbb{R}$ så behöver det inte vara det med avseende på $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Exempel 30. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = \bar{z}$. Boken säger att denna funktion inte är deriverbar i origo, men vi ska visa att den inte är deriverbar någonstans (det är faktiskt samma bevis som står i boken). Låt $w \in \mathbb{C}$ vara godtycklig men fix. Då gäller att

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{\overline{w+h} - \bar{w}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Sätt $h = h_1 + ih_2$, och låt h gå mot noll längs realaxeln, dvs då $h_2 = 0$. Då är $\frac{h_1}{h_1} \rightarrow 1$. Låter vi istället h gå mot noll längs imaginäraxeln så får vi att $\frac{-ih_2}{ih_2} \rightarrow -1$. Eftersom gränsvärdena är unika så följer det att differenskvoten inte existerar då $h \rightarrow 0$, så f är inte deriverbar i någon punkt $w \in \mathbb{C}$. $\square$

Detta exempel ger en antydning till att för att vara en deriverbar komplexvärd funktion så får inte funktionen innehålla något $\bar{z}$. Detta är också fallet, men vi ska återkomma till detta snart.

Exempel 31. Betrakta nu funktionen $f(z) = z^n$ för $n \geq 0$. Vi ska se att denna funktion är deriverbar för alla n , och dess derivata är nz^{n-1} . Låt oss börja med $n = 0$, dvs då funktionen är konstant 1. Då är, för ett godtyckligt, men fixt, $w \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0,$$

så $f(z) \equiv 1$ är deriverbar med derivata noll. Låt nu $n = 1$. Låt $w \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt och fixerat. Då är

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{w+h-w}{h} = 1,$$

som visar att $f(z) = z$ är deriverbar med derivata lika med 1. Låt nu $n > 1$ vara godtyckligt. Då gäller, enligt binomialsatsen, att

$$\begin{aligned} \frac{(w+h)^n - w^n}{h} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^k - w^n}{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^k}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^{k-1}. \end{aligned}$$

Låt nu $h \rightarrow 0$ varvid vi ser att det ovanstående går mot $\binom{n}{1} w^{n-1} = nw^{n-1}$. $\square$

Det ovanstående exemplet visar att vi kan derivera monom som vanligt, vi kommer snart se att de gamla vanliga deriveringsreglerna gäller.

Exempel 32. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(x+iy) = x + i4y$. Då gäller att

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \frac{h_1 + i4h_2}{h_1 + ih_2}.$$

Låt nu $h \rightarrow 0$ längs realaxeln, dvs då $h_2 = 0$. Då går differenskvoten mot 1. Om vi låter $h \rightarrow 0$ längs imaginäraxeln, dvs då $h_1 = 0$ så går differenskvoten mot 4. Eftersom differenskvoten går mot olika värden så följer det att f inte är deriverbar i någon punkt. Om vi skriver om funktionen i z och $\bar{z}$ så får vi att

$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} + 4i \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = \frac{5z - 3\bar{z}}{2}.$$

Alltså innehåller funktionen ett $\bar{z}$, så det ska inte vara förvånande att f inte är deriverbar. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 31. Visa att funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$ är deriverbar endast i origo.

INLÄMNINGSUPPGIFT 32. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Om f och $\bar{f}$ är deriverbar i en punkt $w \in \Omega$, visa att då är $f'(w) = 0$.

Innan vi går vidare så tänkte jag dra en definition till.

Definition 2.2. Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Vi säger att f är en $\mathcal{C}^k$ -funktion, $k \in \mathbb{N}$ fixt, om alla dess k stycken partiella derivator existerar och är kontinuerliga. Vi skriver detta som $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Anmärkning 20. Vi definierar $\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(U)$, och säger att $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ är **slät** på U , eller bara $\mathcal{C}^\infty$ på U . $\square$

Så hur gör man då för en funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, där $U \subset \mathbb{C}$ är öppen. Jo, vi säger att $f \in \mathcal{C}^k(U)$ om $u, v \in \mathcal{C}^k(U)$, där $f = u + iv$.

Anmärkning 21. Det mest fascinerande, som vi kommer se senare, är att varje deriverbar funktion är faktiskt till och med $\mathcal{C}^\infty$. Jämför detta mot det reella fallet, där en deriverbar funktion inte ens behöver ha en kontinuerlig derivata eller vara deriverbar två gånger, exempelvis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad genom $f(x) = x^{3/2}$ är deriverbar i $x = 0$ men $f'(x) = 3/2x^{1/2}$ är inte deriverbar i $x = 0$. $\square$

Antag att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar i punkten $w \in \Omega$. Definiera

$$R(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w).$$

Eftersom f är deriverbar i w så följer det omgående att $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$. Omvänt, om $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$ så är det klart att f är deriverbar i w . Alltså är f deriverbar i w om och endast om $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$. Vidare så är det inte så svårt att se $\lim_{z \rightarrow w} R(z) = 0$ är ekvivalent med $f(z) - f(w) = f'(w)(z - w) + \rho(z)$ och $\lim_{z \rightarrow w} \frac{\rho(z)}{|z - w|} = 0$. Detta säger att funktionen $z - w \mapsto f(z) - f(w)$ kan approximeras med den linjära funktionen $z - w \mapsto f'(w)(z - w)$, och felet vi får går mot noll även då vi delar med $|z - w|$, dvs att felet går mot noll snabbare än vad $|z - w|$ gör.

Låt oss nu se att de derivatan är linjär och att deriveringsreglerna från den reella analysen gäller även i det komplexa fallet.

Proposition 2.3. Låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara funktioner på en öppen mängd Ω och låt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Då gäller att

1. $\alpha f + \beta g$ är deriverbar med derivata $\alpha f' + \beta g'$.

2. fg är deriverbar med derivata $f'g + fg'$.

3. Om $g \neq 0$ så är f/g deriverbar med derivata $(f'g - fg')/g^2$.

Bevis. (1): Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(w+h) - (\alpha f + \beta g)(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(f(w+h) - f(w)) + \beta(g(w+h) - g(w))}{h} = \alpha f'(w) + \beta g'(w). \end{aligned}$$

(2): Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{fg(w+h) - fg(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h)g(w+h) - f(w)g(w+h) + f(w)g(w+h) - f(w)g(w)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w+h)(f(w+h) - f(w))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w)(g(w+h) - g(w))}{h} = f'(w)g(w) + f(w)g'(w). \end{aligned}$$

Sista likheten följer från att g är deriverbar, så den är kontinuerlig, dvs att $\lim_{h \rightarrow 0} g(w+h) = g(w)$.

(3): Låt nu $g \neq 0$. Betrakta f/g , som helt enkelt är f multiplicerat med $1/g$. Det följer från (2) att

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'(1/g) + f(1/g)'.$$

Vi måste därför hitta derivatan för $1/g$. Vi har för godtycklig $w \in \Omega$ att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1/g)(w+h) - (1/g)(w)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w) - g(w+h)}{hg(w+h)g(w)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(w+h)g(w)} \frac{g(w+h) - g(w)}{h} = \frac{-1}{(g(w))^2} g'(w), \end{aligned}$$

ty g är kontinuerlig. Det följer direkt att

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

Det följer från ovanstående sats och exempel 31 att alla polynom är deriverbara. Vidare så följer det från exempel 30 att ingen funktion på formen $\bar{z}^k z^m$ för alla $k \geq 1, m \geq 0$ är deriverbar.

Proposition 2.4. (Kedjeregeln)

Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara funktioner på öppna mängder $U, V \subset \mathbb{C}$ så att $f(U) \subset V$. Då är $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ deriverbar och

$$(g \circ f)'(w) = g'(f(w))f'(w).$$

Bevis. Låt $w_0 = f(z_0)$ och definiera för $w \in V$,

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0) & \text{om } w \neq w_0 \\ 0 & \text{om } w = w_0 \end{cases}.$$

Då är h kontinuerlig, ty g är deriverbar så även kontinuerlig. Eftersom sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig så gäller att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = h(w_0) = 0,$$

ty $w_0 = f(z_0)$. Låt nu $w = f(z)$ varvid

$$(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot (f(z) - f(z_0)).$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(f(z)) + g'(w_0)}{1} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 + g'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

□

Exempel 33. Betrakta funktionen $f(z) = (3z + i)^{100}$. Då är enligt kedjeregeln $f'(z) = 100(3z + i)^{99} \cdot 3$. □

Vi ska nu göra en karakterisering av deriverbarhet i termer av de reell-värda funktionerna u och v , om vi delar upp f i $u + iv$. Så antag att $f = u + iv$ är deriverbar i $w = x + iy$. Då gäller att

$$f'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

där h kan gå mot noll hur det vill. Säg att den går mot noll längs realaxeln, dvs om vi låter $h = h_1 + ih_2$ så är $h_2 = 0$. Då är

$$\begin{aligned} f'(w) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h_1, y) + iv(x+h_1, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h_1} = \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=w} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=w}. \end{aligned}$$

Låter vi nu h gå mot noll längs imaginäraxeln så är $h_1 = 0$, dvs $h = ih_2$. Gör vi samma uträkning som ovan så får vi att

$$f'(w) = -i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=w} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=w}.$$

Eftersom gränsvärden är unika så måste dessa ekvationer vara lika. Jämför nu real och imaginär varvid man ser att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dessa ekvationer i termer av partiella derivator av u och v brukar kallas för **Cauchy-Riemanns ekvationer**. Vi har visat följande:

Sats 2.5. *Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen, vara en funktion. Om $f = u + iv$ är deriverbar på Ω så är Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda på Ω .*

Men hur är det med omvändningen. Om $f = u + iv$ uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer, kommer då f vara deriverbar. Följande sats svarar bitvis på denna fråga.

Sats 2.6. *Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Om $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, och om f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer då är f deriverbar på Ω .*

Bevis. Se boken för ett bevis. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 33. *Analysera beviset för Sats 2.6. Kolla speciellt på när villkoret att $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ kommer in. Kan man konstruera en funktion $f = u + iv$ där u, v är deriverbara så att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda, men så att f inte är deriverbar? Utred. Visa eller motbevisa.*

Följd 2.7. *Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är öppen. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Då är f deriverbar om och endast om u, v är $\mathcal{C}^1(\Omega)$ och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.*

Exempel 34. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = z^2$. Vi vet sedan tidigare att denna är deriverbar, men låt oss se att den uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Vi har, om vi skriver om $z = x + iy$, att

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy := u(x, y) + iv(x, y).$$

Detta betyder att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så Cauchy-Riemanns ekvationer är verkligen uppfyllda. □

Exempel 35. Låt $z = x + iy$, och betrakta $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom $f(z) = x^2 + y + i(y^2 - x) := u(x, y) + iv(x, y)$. Det är klart att u, v är båda $\mathcal{C}^1$. Vidare så gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så Cauchy-Riemanns ekvationer är inte uppfyllda överallt, utan endast på linjen $y = x$. Men mängden $\{(x, y) : y = x\}$ innehåller ingen disk, så f är inte deriverbar någonstans. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 34. Låt $f = u + iv$. Då vet vi hur Cauchy-Riemanns ekvationer se ut, åtminstone i rektangulära koordinater. Visa att Cauchy-Riemanns ekvationer är ekvivalent med att säga att

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{och} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

i polära koordinater.

Vi ska nu visa satsen i boken som säger att om derivatan är identiskt noll för en funktion så är funktionen konstant. Bokens bevis bygger egentligen på en sats från den reella analysen, så vi har valt att bevisa satsen med mer komplexa metoder. Lagg märke till bevismetoden för satsens bevis, som är ofta vanlig; man visar en sak lokalt först (i en boll), och därefter använder man detta för att visa det generella resultatet.

Sats 2.8. Antag att $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, där $D \subset \mathbb{C}$ är ett område, är deriverbar och att $f' \equiv 0$ på D , då är f konstant på D .

Bevis. Låt $B(a, r)$ vara en boll kring $a \in D$ med radie r . Då ligger denna boll helt inne i D , eftersom D är öppen, och kom ihåg att en boll är sammanhängande. Tag nu en godtycklig punkt $b \in B(a, r)$. Om vi visar att $f(a) = f(b)$ så kommer detta betyda att f är konstant. Eftersom $B(a, r)$ är sammanhängande så kan vi hitta en kurva mellan a och b , som bara består av vertikala och horisontella linjer, som ligger helt inne i $B(a, r)$. Om det finns en hörnpunkt, kalla denna c . Då är $c = a + h$ och $b = c + ik$ för några $h, k \in \mathbb{R}$. Vi kan anta att $h \geq 0$, eftersom annars är det bara att byta roll på a och c . Sätt

$$g(x) = f(a + x).$$

Detta är en funktion i en reell variabel och är definierad i en omgivning av $[0, h]$. För $x \in [0, h]$ betrakta

$$g'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(a + y) - f(a + x)}{y - x} = f'(a + x) = 0,$$

eftersom $f \in \mathcal{O}(B(a, r))$ och $f' \equiv 0$ på $B(a, r)$. Alltså är g konstant på $[0, h]$, eftersom g är reell. Detta ger att

$$f(c) = g(h) = g(0) = f(a).$$

På samma sätt så får vi att $f(b) = f(c)$ så $f(a) = f(b)$, vilket ger att f är konstant på $B(a, r)$.

Låt oss nu betrakta vårt område D . Fixera ett $a \in D$ och tag en godtycklig $b \in D$. Eftersom D är sammanhängande så kan vi hitta en kurva γ mellan a och b . Välj nu, för varje $p \in \gamma$, en boll $B(p, r)$ som ligger helt inne i D . Detta är förstas möjligt eftersom D är öppen. Observera att alla dessa bollar kommer att täcka γ , och eftersom $\text{Im}(\gamma)$ är kompakt (γ är ju kontinuerlig och definierad på ett kompakt intervall) så kan vi välja ut ett ändligt antal av dessa bollar. Enligt vårt lokala resultat för en boll så kommer f vara konstant på alla dessa bollar. Eftersom vi har ett ändligt antal bollar så kommer f vara konstant på hela γ . På grund av att b var godtyckligt vald, så drar vi slutsatsen att f är konstant på hela D . $\square$

Villkoret med en sammanhängande mängd är viktigt i satsen ovan. För t.ex. om f är konstant 0 på en öppen mängd A och 1 på en annan öppen mängd B , och A och B är disjunkta, så är $f' \equiv 0$ på $A \cup B$ men $f(a) \neq f(b)$ för alla $a \in A$ och $b \in B$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 35. Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett område och låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbara. Visa att om $f' = g'$ så är $f - g$ konstant.

INLÄMNINGSUPPGIFT 36. Antag att $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω ett område i $\mathbb{C}$, är deriverbar. Antag vidare att $|f(z)|$ är konstant på Ω . Visa att f är konstant på Ω .

Resten av avsnitt 2.1 kan ni läsa själva. Märk väl att det är OK att derivera innanför summationstecknet så länge hela serien definierar en deriverbar funktion. Observera också att determinanten av Jacobianen för en deriverbar funktion alltid är lika med beloppet av derivatan i kvadrat, dvs $|J(f)| = |f'|^2 \geq 0$.

Integration, Green-Gauss integralsats, Cauchys integralsats och Cauchys integralformel

Integration definieras genom Riemannsummor, dvs via över- och undersummor. Detta är ni välbekanta med, så jag ska inte plåga er med det. Däremot så ska jag dra en annan definition av integral. Låt $f = u + iv$ vara en kontinuerlig

funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, där u och v är kontinuerliga funktioner på $[a, b]$. Vi definierar **integralen** över $[a, b]$ genom

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Detta ligger i grund för definitionen av kurvintegraler, men först tänkte jag dra lite mer terminologi och egenskaper för kurvor.

Definition 2.9. En kurva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kallas för en **styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva** om det finns en ändlig partition

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$$

så att för varje $j = 0, 1, \dots, n-1$ gäller att

$$\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]} \in \mathcal{C}^1([a_j, a_{j+1}]).$$

Exempel 36. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 + (1 - 8t)i & 0 \leq t \leq 1/4 \\ (3 - 8t) - i & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ -1 + (5 - 8t)i & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ -(7 - 8t) + i & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Detta är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva på $[0, 1]$. Om ni ritar en bild av denna kurva så ser ni att det är en kvadrat med hörn i $(1 + i)$, $(-1 + i)$, $(-1 - i)$ och $(1 - i)$. $\square$

Om vi definierar summan av två kurvor $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ och $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ genom

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & , t \in [b, c] \end{cases}$$

så ser vi att om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, så är

$$\gamma = \gamma|_{[a_0, a_1]} + \dots + \gamma|_{[a_{n-1}, a_n]}.$$

Kan man lägga ihop kurvor så kan man förstås dra ifrån kurvor, och en negativ kurva är inget annat än samma kurva fast åt motsatt håll, dvs om $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en kurva så definierar vi $(-\gamma): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ genom

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

som genomlöper samma punkter fast i omvänd ordning.

Något som är viktigt men väldigt enkelt och intuitivt är Jordans kurvsats som ger oss en orientering av kurvor. Jordans kurvsats säger att en sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva i $\mathbb{C}$ delar planet i två områden, nämligen i det inre och det yttre. Om

det inre är till vänster då man rör sig längs en kurva så säger vi att kurvan är **positivt orienterad**, annars så är den **negativt orienterad**.

Slutligen så kan man mäta längden av en kurva, som borde inte vara förvånande för någon. Det är nämligen precis samma sak som ni har lärt er under tidigare analyskurser. Längden av en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ges av

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

En viktig egenskap hos längdfunktionen är att den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ . (Längdfunktionen är alltså invariant definierad!) Låt oss visa detta.

Proposition 2.10. *Låt $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en parametrisering av en kurva, och låt $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ vara en strikt växande funktion så att $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$. Då är $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)): [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ en annan parametrisering av samma kurva som γ_1 och*

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2).$$

Bevis.

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_2'(t)| dt = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)| dt$$

enligt kedjeregeln. Eftersom φ är växande så är $\varphi'(t) > 0$, vilket ger att

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt.$$

Gör nu variabelsubstitutionen $s = \varphi(t)$, så $ds = \varphi'(t)dt$. Då blir de nya integrationsgränserna $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$, så

$$l(\gamma_2) = \int_a^b |\gamma_1'(s)| ds = l(\gamma_1).$$

□

Exempel 37. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^1 |2\pi i e^{2\pi it}| dt = 2\pi \int_0^1 1 dt = 2\pi.$$

□

Låt oss göra en annan parametrisering av enhetscirkeln:

Exempel 38. Låt $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Så längden av en kurva är oberoende av parametrisering, som propositionen ovan visade. □

Definition 2.11. Antag att $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion definierad på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva med $\gamma([a, b]) \subset U$. Då definierar vi **integralen** av f längs med γ genom

$$\int_{\gamma} f = \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

där $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ är partitionen av $[a, b]$ från definitionen av en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva.

Anmärkning 22. Man använder ibland beteckningen $\oint$ för att säga att det är en kurvintegral. $\square$

Denna definition visar sig vara ”vettig”, eftersom den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ . Jag lämnar detta som en övningsuppgift (jämför Proposition 2.10).

INLÄMNINGSUPPGIFT 37. Visa att definitionen av integralen av f längs γ inte beror på val av parametrisering av γ , dvs om $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ är en strikt växande funktion och $\tau = \gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ är en annan parametrisering av γ så är

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tau} f.$$

Exempel 39. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Om i deriverar γ så får vi $\gamma'(t) = ie^{it}$. Då blir, enligt definition,

$$\oint_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$\square$

Nu till ett exempel som är väldigt viktigt, som speciellt kommer vara viktigt för oss senare.

Exempel 40. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$, så

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it} dt.$$

Vi får då två fall:

Fall 1: ($n \neq -1$)

Då är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1} (e^{(n+1)i2\pi} - e^0) = 0.$$

Fall 2: ($n = -1$)

Då är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Alltså är

$$\oint_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1. \end{cases}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 38. Låt $z_0 \in \mathbb{C}$ och $c > 0$ vara fixerade. Låt $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kurvan parametriserad genom

$$\gamma(t) = z_0 + itc.$$

För $x \geq 0$ låt $\alpha = z_0 + x$ och $\beta = z_0 - x$. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) dz.$$

Om $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva, så definierar man att integralen över γ att vara samma sak som att integrera över de olika delarna och lägga ihop delresultaten, dvs

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Speciellt betyder detta att om vi vill beräkna integralen över en kurva γ som vi genomlöper n gånger, så blir

$$\int_{n \cdot \gamma} f = n \int_{\gamma} f,$$

där $n \cdot \gamma$ är kurvan γ som genomlöps n gånger.

Anmärkning 23. Om vi vill beräkna $\oint_{(-\gamma)} f$ så är detta samma sak som att beräkna $-\oint_{\gamma} f$. □

Två olikheter som är användbara lite då och då är

$$\left| \int f dz \right| \leq \int |f| dz$$

och $|f(z)| \leq M$ för alla z så är $\int |f| dz \leq \int M$. Vi ska nu använda dessa olikheter för att visa följande välkända sats:

Sats 2.12. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en kontinuerlig funktion, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva på $[a, b]$. Antag att det existerar en konstant $M \geq 0$ så att $|f(z)| \leq M$ för alla z på γ . Då gäller

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot l(\gamma) , \end{aligned}$$

så

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

□

Följd 2.13. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kontinuerlig funktion på den öppna $U \subset \mathbb{C}$, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då gäller

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma(t)} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Exempel 41. Låt oss visa att $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$ då γ är övre halvan av enhetscirkeln. Vi ska använda oss av Sats 2.12. Vi börjar beräkna längden av γ :

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{\pi} dt = \pi.$$

Därefter så måste vi hitta en övre gräns för $\frac{e^z}{z}$ på γ . z på γ kan skrivas som $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, så

$$\left| \frac{e^z}{z} \right| = \left| \frac{e^{\cos t + i \sin t}}{e^{it}} \right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \leq e ,$$

eftersom $0 \leq \cos t \leq 1$. Så om vi sätter $M = e$ så får vi att

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq M \cdot l(\gamma) = \pi e.$$

□

Exempel 42. Låt γ vara linjesegmentet från 0 till $1+i$, som kan definieras genom $\gamma(t) = (1+i)t$ för $t \in [0, 1]$. Då är

$$l(\gamma) = \int_0^1 |1+i| dt = \sqrt{2}.$$

Vidare, på γ så gäller att $|z^2| = |z|^2 \leq |1+i|^2 = 2$. Detta ger att

$$\left| \int_{\gamma} z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2}.$$

□

Exempel 43. Låt γ vara cirkeln $|z| = R$ för $R > 1$. Låt $m \geq 1$ och $n \geq 0$. Vi har att

$$|z|^n = R^n$$

på γ samt att

$$|z^m - 1| \geq |z^m| - 1 = R^m - 1$$

på γ . Detta ger att

$$\left| \int_{\gamma} \frac{z^n}{z^m - 1} dz \right| \leq \frac{2\pi R^{n+1}}{R^m - 1}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 39. Visa att

a) Om γ är cirkeln $|z| = 3$, så är

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - i} \right| \leq \frac{3\pi}{4}.$$

b) Om $\gamma = R + 2\pi it$, $0 \leq t \leq 1$, $R > 0$, så är

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^{3z} dz}{1 + e^z} \right| \leq \frac{2\pi e^{3R}}{e^R - 1}.$$

c) Om $\gamma = it$, $0 \leq t \leq 1$, så är

$$\left| \int_{\gamma} e^{\sin z} dz \right| \leq 1.$$

d) Om $R \neq |a|$ så gäller att

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{(z+a)(z-a)} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

Nu är det dax för en höjdpunkt, nämligen en variant av Integralkalkylens huvudsats:

Sats 2.14. Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är en öppen mängd och att $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva så att $\gamma([a, b]) \subset U$. Om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar så gäller att

$$\oint_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bevis. Det är tillräckligt att visa satsen för en del av kurvan γ , så vi antar att γ är en $\mathcal{C}^1$ -kurva. Vi börjar med att observera att $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ är en $\mathcal{C}^1$ -funktion. Låt $f \circ \gamma = u + iv$. Då ger kedjeregeln att

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_z &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b u'(t)dt + i \int_a^b v'(t)dt = \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = u(b) + iv(b) - (u(a) + iv(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Låt oss kolla på ett lätt exempel på denna sats.

Exempel 44. Låt γ vara enhetscirkeln e^{it} , $0 \leq t \leq 2\pi$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$. Om $f(z) = \frac{z}{2}$ så är $f'(z) = \frac{1}{2}$. Låt oss kolla på höger respektive vänsterledet i satsen:

$$VL = \oint_{\gamma} f'(z)dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}ie^{it}dt = i \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{2}[e^{2it}]_0^{2\pi} = 0.$$

$$HL = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i})^2 - \frac{1}{2}(e^0)^2 = 0,$$

så $\oint_{\gamma} z dz = 0$, men det visste vi redan.

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 40. Låt $f \in \mathcal{C}^1(B(0, 1))$ vara sådan att $|f'(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0, 1)$. Visa att

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$$

för alla $z_1, z_2 \in B(0, 1)$.

Vi kan nu ge ytterligare ett bevis av att Sats 2.8.

Följd 2.15. Antag att U är ett område i $\mathbb{C}$ och antag att $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är deriverbar med $f'(z) \equiv 0$ på U . Då är f konstant på U .

Bevis. Få en $z_0 \in U$. För $z \in U$ så finns det en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ så att $\gamma(0) = z_0$ och $\gamma(1) = z$ (Varför?). Då ger föregående sats att

$$f(z_0) - f(z) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1)) = \oint_{\gamma} f'(z)dz = \oint_{\gamma} 0dz = 0,$$

så $f(z_0) = f(z)$. Men eftersom z var godtycklig så är f konstant.

□

Låt oss nu diskutera Green-Gauss Integralsats ett tag. Sätt

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}.$$

Observera att detta är en öppen mängd. Om ni ritar en bild över denna mängd så ser ni att det är en rektangel utan sidor, en så kallad öppen rektangel. Låt $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, dvs f är kontinuerlig på den slutna rektangeln. Betrakta dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} f dx dy.$$

Kom nu ihåg Fubinis sats:

Sats 2.16. (Fubinis sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara en öppen rektangel som ovan, och antag att $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Sats 2.17. (Starkare Fubinis sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

- (a) Om Ω är mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)\}$ så gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- (b) Om Ω är mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) < x < h_2(y), c < y < d\}$ så gäller att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Använder vi nu Fubinis sats och Integralkalkylens huvudssats så får vi Green-Gauss integralsats för rektanglar.

Sats 2.18. (Green-Gauss integralsats för rektanglar)

Antag att Ω är en öppen rektangel och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d f(b, y) dy - \int_c^d f(a, y) dy = \int_c^d f(b, y) dy + \int_d^c f(a, y) dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_a^b f(x, c) dy + \int_a^b f(x, d) dy = - \int_a^b f(x, c) dy - \int_b^a f(x, d) dy.$$

Låt nu $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara en begränsat område. Då är det klart att $\partial\Omega$ utgör en kurva. Vi säger att $\partial\Omega$ är $\mathcal{C}^k$ om kurvan som utgör randen är $\mathcal{C}^k$ för $1 \leq k \leq \infty$. Om rand-kurvan endast är styckvis $\mathcal{C}^k$, så säger vi att randen är styckvis $\mathcal{C}^k$. Om randkurvan är positivt (negativt) orienterad så säger vi att randen är positivt (negativt) orienterad. Denna terminologi gör att vi kan formulera en Green-Gauss sats för mer generella områden:

Sats 2.19. (Green-Gauss integralsats för områden)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f dx.$$

Eftersom randen för en rektangel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ är lika med en kurva som går från (a, c) till (a, d) till (b, d) till (b, c) till (a, c) , så följer Green-Gauss sats för rektanglar direkt från den generella Green-Gauss sat. Gör detaljerna själv. Låt oss nu kolla på en tillämpning av Green-Gauss sats.

Sats 2.20. (Cauchys integralsats)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. Om $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ så gäller att

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

Bevis. Låt $f = u + iv$. Bokens Proposition 22 ger att

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\partial\Omega} (u dx - v dy) + i \int_{\partial\Omega} (v dx + u dy).$$

Green-Gauss sats ger att

$$\int_{\partial\Omega} (u dx - v dy) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \right).$$

Cauchy-Riemanns ekvationer ger att $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ så

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \right) = 0.$$

Använder vi Green-Gauss sats på $\int_{\partial\Omega} (v dx + u dy)$ och därefter Cauchy-Riemanns ekvationer så får vi att även denna integral blir noll, så

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

□

Anmärkning 24. Vi kommer se en starkare formulering av Cauchys integralsats senare, nämligen att f endast behöver vara kontinuerlig upp till randen och $\mathcal{C}^1$ på det inre. $\square$

En följd till Cauchys integralsats är följande proposition:

Proposition 2.21. *Antag att $\text{Ann}(z_0, R_1, R_2)$ är en öppen annulus i $\mathbb{C}$, och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Då gäller att*

$$\int_{|z-z_0|=r} f dz$$

inte beror på valet av r .

Bevis. Se boken. $\square$

Cauchys integralformel är kanske den mest viktiga satsen inom denna kurs. Den säger att vi kan uttrycka en deriverbar funktion som en integral av sig själv. Ett sådant resultat finns inte inom den reella analysen, som kanske gör komplexanalysen så speciell. Här kommer en formulering och ett bevis.

Sats 2.22. (Cauchys integralformel)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller för varje $z \in \Omega$ att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Anmärkning 25. Blanda inte ihop Cauchys integralsats och Cauchys integralformel. $\square$

Anmärkning 26. Cauchys integralformel säger att randvärdena för en deriverbar funktion bestämmer funktionen fullständigt på hela området. $\square$

Bevis. Betrakta integranden $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Denna funktion är inte definierad för $\zeta = z$. Låt för $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\zeta, \varepsilon).$$

Då ger Cauchys integralsats att

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g d\zeta = 0.$$

Observera att $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \{|\zeta - z| = \varepsilon\}$, där $\partial\Omega$ är positivt orienterad och $|\zeta - z| = \varepsilon$ är negativt orienterad. Detta betyder att

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g d\zeta = \int_{\partial\Omega} g d\zeta - \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} g d\zeta.$$

Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\begin{aligned}\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \\ &= \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.\end{aligned}$$

Eftersom $f(z)$ inte är en funktion av ζ , så får vi att

$$\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Om vi visar att $\int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0$ så är vi klara. Kalla den nya cirkeln för γ_ε . Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Sätt $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$. Då gäller att

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M 2\pi i \varepsilon}{\varepsilon} = M 2\pi.$$

Eftersom $f \in \mathcal{C}^1$, så är den speciellt kontinuerlig, så

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

så satsen följer. □

Anmärkning 27. Delen $\frac{1}{\zeta-z}$ av integranden brukar kallas för **Cauchy-kärnan**. □

Exempel 45. Låt oss beräkna $\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2}$ där γ är kurvan $|z+1|=2$. Vi börjar med att skriva om integranden:

$$\frac{z^2}{4-z^2} = \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}.$$

Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{2-z}$ är $\mathcal{C}^1$ innanför γ , så Cauchys integralformel ger att

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2} dz ,$$

så

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{4-z^2} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2} dz = f(-2)2\pi i = \frac{(-2)^2}{2-(-2)} \cdot 2\pi i = 2\pi i.$$

□

Exempel 46. Betrakta integralen

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z-3)(z+1)(z-1)} dz ,$$

där γ är cirkeln $|z-3|=1$. Då ligger $z=3$ innanför γ men $z=\pm 1$ ligger utanför γ . Detta betyder att $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ är $\mathcal{C}^1$ innanför γ . Nu ger Cauchys integralformel att

$$f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-3} dz.$$

Vi får alltså

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z-3)(z+1)(z-1)} dz = 2\pi i f(3) = \frac{5\pi i}{2}.$$

□

Vi har även en Cauchys integralformel för derivator, men först så måste vi komma ihåg en sats inom analysen:

Sats 2.23. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ ett område med $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att f är $\mathcal{C}^1$ med avseende på y . Då gäller att

$$F(y) = \int_{\partial\Omega} f(x, y) dz$$

är $\mathcal{C}^1$ med avseende på y och

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dz.$$

Sats 2.24. Antag att f beror kontinuerligt på $z \in \mathbb{C}$ och antag att f är deriverbar i $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. Antag vidare att f är $\mathcal{C}^1$ med avseende på ξ och η . Då är

$$f(\zeta) = \int_{\partial\Omega} f(z, \zeta) dz$$

deriverbar i ζ och

$$\frac{df}{d\zeta}(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\zeta}(z, \zeta) dz.$$

Anmärkning 28. Bevisen av dessa satser hittar ni i början av kapitel 4. $\square$

Den ovanstående satsen säger att under gynnsamma omständigheter så kan vi derivera under integraltecknet. Detta ger oss möjligheten att formulera och bevisa Cauchys integralformel för derivator:

Sats 2.25. (Cauchys integralformel för derivator)

Antag att $\Omega \subset \mathbb{C}$ är ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand och antag att $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Då gäller för varje $z \in \Omega$ att

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta ,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Bevis. Vi kan derivera under integraltecknet i Cauchys integralformel, och eftersom

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} = \frac{k! f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

så följer resultatet omedelbart. $\square$

Anmärkning 29. Resultatet ovan säger att varje deriverbar komplex funktion till och med har derivator av alla ordningar. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 41. Beräkna

a)

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-3} dz$$

b)

$$\int_{|z-1|=5/2} \frac{1}{(z-4)(z+1)} dz$$

c)

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^k} d\bar{z}$$

för alla $k \in \mathbb{Z}$