

Kapitel 3

Läsanvisningar till kapitel 3

Den moderna vägen till holomorficitet och dess konsekvenser

Vi ska i detta kapitel definiera ett begrepp som kallas holomorficitet, och det kommer visa sig att vara precis samma sak som deriverbarhet. Därefter så ska vi formulera om vissa satser vi visade i förra kapitlet samt visa några kompletterande satser. Vi vill börja med att försöka definiera de komplexa deriveringsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Vad vill man att dessa ska uppfylla? Jo, det är naturligt att de ska uppfylla

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1.$$

Ansätt, för $z = x + iy$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y}.$$

Då gäller att

$$1 = \frac{\partial}{\partial z} z = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = a + ib$$

och

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (x - iy) = a - ib.$$

Dessa ekvationsystem ger $a = 1/2$ och $b = -i/2$. Liknande uträkningar ger att $c = 1/2$ och $d = i/2$. Alltså så definierar vi

Definition 3.1. Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion och låt $z = x + yi$. Då definierar vi

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f.$$

Observation 3. Observera att minustecknet hamnar på $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ och inte på $\frac{\partial}{\partial z}$. $\square$

Anmärkning 30. Ni har sett detta sätt att definiera saker tidigare, nämligen när vi definierade e^z . Man definierar ett objekt utifrån vad man vill att de ska uppfylla. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 42. Visa att differentialoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ är båda komplexlinjära, dvs

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial}{\partial z} f + \beta \frac{\partial}{\partial z} g$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ och $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$, och samma sak för $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Vi kan nu definiera holomorficitet på ett nytt sätt.

Definition 3.2. Låt $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen. Vi säger att f är **holomorf** om

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0.$$

Detta betecknar vi med $f \in \mathcal{O}(U)$.

Observation 4. Ett annat sätt att säga att f är holomorf är att den ligger i kärnan till operatoren $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 43. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område och låt $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Betrakta $f \circ g$ där det är definierat, och utred kedjereglererna:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g),$$

dvs hitta formler för dessa. Förenkla dessa formler då

$$(a) \quad f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$(b) \quad g \in \mathcal{O}(\Omega)$$

(c) $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{O}(\Omega)$

Som ni ser så bygger holomorficitet på att det inte får finnas något $\bar{z}$ i funktionen. Detta har vi sett tidigare då vi definierade deriverbarhet. Vi kan nu lätt visa att

Sats 3.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. Låt $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Då är följande ekvivalent:

(a) f är holomorf

(b) f är deriverbar

(c) f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

Bevis. Vi har redan sett ekvivalensen mellan (b) och (c) i förra kapitlet. Vi ska nu visa ekvivalensen mellan (c) och (a).

Antag först att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Då gäller att

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

dvs att $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Omvänt om Cauchy-Riemanns ekvationer håller på Ω , så betyder det att

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

så $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

Anmärkning 31. Det är oftast $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ som kallas för Cauchy-Riemanns ekvationer i komplex analys branschen. Då skriver man $\bar{\partial}f = 0$, där $\bar{\partial}$ uttalas d-streck. Ekvationen $\bar{\partial}f = 0$ kallas även för den homogena Cauchy-Riemann ekvationen, ty man kan ha ett högerled som inte är noll utan en annan funktion g . Då kallas ekvationen $\bar{\partial}f = g$ för den inhomogena Cauchy-Riemann ekvationen. □

Följd 3.4. Om $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, så är

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Bevis. Eftersom f är holomorf så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f,$$

dvs $\frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial}{\partial y} f$. Vidare så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f$$

så $\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 44. Låt $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ och antag att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Visa att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Definition 3.5. En funktion som är holomorf på hela $\mathbb{C}$ kallas för en **hel funktion**.

Exempel 47. Exempel på hela funktioner är e^z , $\sin z$, $\cos z$ och alla polynom. $\square$

Exempel 48. Vi ska visa att $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Sätt $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Eftersom $\sin z$ och $\cos z$ är hel så är även $\sin^2 z$ och $\cos^2 z$ hel, vilket ger att $f(z)$ är hel. Derivering ger att

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \cos z \sin z = 0,$$

så eftersom $\mathbb{C}$ är sammanhängande och öppen så betyder det att f är konstant. Eftersom $f(0) = 1$ så betyder det att $f(z) = 1$ för alla z . Alltså är $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. $\square$

Låt oss betrakta Green-Gauss integralsats igen. Vi betraktar alltså ett begränsat område Ω med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. För en snäll funktion f så gäller då att

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f dy$$

och

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial\Omega} f dx.$$

Lägger vi till $i/2$ gånger andra ekvationen till halva den första så får vi att

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(dx + idy) = \int_{\partial\Omega} f dz.$$

På samma sätt så kan vi lägga till $-i/2$ till halva den första, varvid man ser att

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(dx - idy) = \int_{\partial\Omega} f d\bar{z}.$$

Observation 5. Man definierar alltså $dz = dx + idy$ och $d\bar{z} = dx - idy$, som är precis tvärtom som vi definierade deriveringsoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Anledningen till detta är att man vill att $dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1$ och $d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0$, och att $dz \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0$ och $d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 1$. Mer om hur sådanhära operationer görs kan ni läsa i en differentialgeometri kurs. $\square$

Gå nu igenom bokens framställning av ett annat bevis av Cauchys integralformel. Beviset är en aning tekniskt så koncentrera er på att förstå idéerna bakom beviset. Därefter så kommer en väldigt viktig sats.

Sats 3.6. (Generella Cauchys integralformel) Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett begränsat område med styckvis $\mathcal{C}^\infty$ -rand. Om $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ så gäller att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta},$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad.

Anmärkning 32. Med konventionen att $dx dx = 0$ och $dy dy = 0$ och att $dx dy = -dy dx$ så blir $d\zeta d\bar{\zeta} = (dx + idy)(dx - idy) = -2i dx dy$. Detta betyder att den generella Cauchys integralformel tar formen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial}f}{\zeta - z} dx dy,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad. Det är denna framställning boken har. □

Observation 6. Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ så är $\bar{\partial}f = 0$ så vi får tillbaka den gamla hederliga Cauchys integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

där $\partial\Omega$ är positivt orienterad. □

Det jag inte har tagit upp i dessa läsanvisningar kan ni läsa själva i boken. Gör sedan följande inlämningsuppgifter:

INLÄMNINGSUPPGIFT 45. Gör uppgift 45 i boken.

INLÄMNINGSUPPGIFT 46. Gör uppgift 47 i boken.

Grenar för logaritmen och potenser

Eftersom boken inte gör någon vidare framställning av grenar och holomorficitet av grenar för logaritmen och potenser, så tänkte jag dra några exempel och satser (utan bevis), och ge några uppgifter på det.

Sats 3.7. $\text{Log } z \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0])$ och $\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z}$.

och

Sats 3.8. Varje gren av $\log z$ är holomorf.

och

Sats 3.9. *Det finns ingen gren av $\log z$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Exempel 49. Vi ska bestämma ett område där $f(z) = \text{Log}(3z - i)$ är holomorf. Låt $g(z) = 3z - i$. För principalgenen så får inte $g(z) \leq 0$, så vi ska bestämma de punkter där detta händer till att börja med. Låt $z = x + iy$ varvid

$$3x + i3y - i \leq 0$$

betyder att $x \leq 0$ och $y = 1/3$. Så f är holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 1/3\}$. $\square$

Exempel 50. Vi ska finna en gren till $\log(z^2 + 1)$ som är holomorf i $z = 0$ och antar värdet $2\pi i$ där. Låt $f(z) = \log g(z)$ där $g(z) = z^2 + 1$. Det är tillräckligt att hitta en gren av logaritmen som är holomorf i $g(0) = 1$ och antar värdet $2\pi i$ där. Vi vet att varje gren av logaritmen är holomorf. Låt

$$\mathcal{L}_\tau(z) = \ln|z| + i\arg_\tau,$$

där $\arg_\tau$ är grenen $]\tau, \tau + 2\pi]$. Då är $\mathcal{L}_\tau(z)$ en holomorf gren till logaritmen. Vi ska alltså hitta τ så att $\mathcal{L}_\tau(g(z)) = 2\pi i$ i $z = 0$, dvs vi ska lösa ekvationen

$$2\pi i = \ln|1| + i\arg_\tau 1 = i\arg_\tau 1 \iff 2\pi = \arg_\tau 1.$$

Denna har lösning $\tau = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så vi kan t.ex. välja $\tau = \pi$. Alltså är $\mathcal{L}_\tau(g(z))$ en holomorf gren till $f(z)$ som antar värdet $2\pi i$ i $z = 0$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 47. *Betrakta exemplet ovan, och hitta en gren till $\log(z^3 - 2)$ som är holomorf i $z = 0$.*

Exempel 51. Vi ska nu hitta en gren till $(z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$. Vi ska alltså hitta en funktion $w = (z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$ så att $w^2 = z^2 - 1$. Observera att vi inte kan välja principalgrenen, som är

$$e^{1/2 \cdot \text{Log}(z^2 - 1)},$$

ty $z^2 - 1 \leq 0$ betyder att $-1 \leq x \leq 1$ och hela y -axeln. Betrakta istället $z(1 - 1/z^2)^{1/2}$. Den uppfyller att $w^2 = z^2 - 1$. Principalgrenen för denna är

$$e^{1/2 \cdot \text{Log}(1 - 1/z^2)}.$$

Denna är definierad för $x \in [-1, 1]$, ty $1 - 1/z^2 \leq 0$ ska vara uppfyllt. Så funktionen $w = f(z) = z(1 - 1/z^2)^{1/2}$ är en gren till $(z^2 - 1)^{1/2}$ som är holomorf för $|z| \geq 1$. $\square$

Exempel 52. Vi ska bestämma den största öppna mängd Ω så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf. Per definition så ges Ω av de $z \in \mathbb{C}$ så att $1 - z^2 \notin]-\infty, 0]$, så vi ska

börja kolla vilka z som uppfyller att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$. Sätt $z = x + yi$, då får vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2xyi.$$

För att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$ så måste $xy = 0$, vilket ger två fall:

Fall 1: ($x = 0$)

Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 + y^2 \geq 1.$$

Fall 2: ($y = 0$)

Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2,$$

så $1 - x^2 = 0$, vilket betyder att $|x| \geq 1$.

Om vi slår ihop fall 1 och 2 så får vi att den största mängden så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf är

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |x| < 1 \text{ och/eller } y = 0\}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 48. Var är $f(z) = (e^z + 1)^{1/2}$ holomorf? Hitta mängden där f är holomorf.