

Kapitel 4

Läsanvisningar till kapitel 4

Taylors sats samt Cauchyuppskattningar och några konsekvenser

Taylorserier är något ni är bekant med sedan era reellanalyskurser. Höjdpunkten i detta avsnitt säger att holomorfa funktioner har en Taylorutveckling. Men låt oss börja lite lugnt.

Om $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en $\mathcal{C}^\infty$ funktion, då har f en formell serieutveckling

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (x-p)^j$$

för fixt $p \in \mathbb{R}$. Det som kanske bör noteras är att det inte är någon garanti att denna serie konvergerar för något x förutom $x = p$. Om serien konvergerar för något $x \neq p$ så kan vi *inte* säga att serien är lika med $f(x)$.

Exempel 53. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Vi har att f är $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med $0 = f'(0) = f''(0) = \dots$. Alltså är Taylorserien av f kring $p = 0$ lika med

$$0 + 0x + 0x^2 + \dots .$$

Denna är konvergent för alla x och summan är identiskt lika med noll. Men $f(x) = 0$ endast om $x = 0$. □

Efter denna utveckling låt oss kasta oss in i Taylors sats.

Sats 4.1. (Taylors sats)

Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ så har f :s Taylorserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

konvergensradie åtminstone R . Vidare så konvergerar Taylorserien mot $f(z)$ för varje $z \in B(z_0, R)$.

Bevis. Vi ska först visa att Taylorserien konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$ om $0 < r < R$. Tag därför ett $r < \rho < R$ och låt γ vara cirkeln runt z_0 med radie ρ , så γ är enkel, sluten, positivt orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då ger Cauchys integralformel att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

om $|z - z_0| \leq r$. Vi ska börja med att skriva om integranden. Vi har att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

och eftersom vi integrerar de ζ som ligger på γ har vi att

$$|z - z_0| \leq r < \rho = |\zeta - z_0|$$

dvs

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Nu kan vi använda oss av en geometrisk serie, dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Detta ger att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Sätt nu $M = \sup_{|z - z_0| \leq r} |f(z)|$. Då är $M < \infty$. Låt

$$f_k(\zeta) = \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta).$$

Då är

$$|f_k(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \leq \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k.$$

Vi har nu skrivit om integranden som

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta).$$

Eftersom $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k$$

en konvergent geometrisk serie. Nu ger Weierstrass M -test att

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)$$

konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, \rho)}$.

Vi får nu att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta$$

eftersom serien konvergerar likformigt. Vidare så får vi att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right)^{k+1} d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) \end{aligned}$$

enligt Cauchys integralformel för derivator. Detta ger att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

□

Anmärkning 33. Beviset för Taylors sats är viktigt, eftersom det innehåller så många delar av kursen. □

Observation 7. Beviset ger att Taylorserien konvergerar på varje sluten boll med mindre radie. Eftersom en sluten boll är kompakt, så konvergerar Taylorserien likformigt på kompakta delmängder till $B(z_0, R)$. □

Anmärkning 34. En Taylorserie kring origo brukar kallas för en **Maclaurinserie**. □

Exempel 54. Låt oss börja kolla på $f(z) = e^z$, och låt oss försöka hitta en Maclaurinserie för f . (Boken definierar e^z i termer av dess Taylorserie, men låt oss se att vi får samma resultat här.) Vi har att $f(0) = 1$, $f^k(0) = 1$ för alla $k \geq 1$, så

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

□

Exempel 55. Låt oss försöka hitta en holomorf funktion f som uppfyller att

$$\frac{df}{dz} = 3if(z)$$

i en omgivning till origo, så att $f(0) = 1$.

Eftersom f är holomorf så måste den ha en Maclaurinserie. Vi har att $f(0) = 1$ och $f'(0) = 3i \cdot f(0) = 3i$. Deriverar vi $\frac{df}{dz} = 3if(z)$ igen så får vi att $f^k(0) = (3i)^k$, så

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3iz)^k}{k!}.$$

Använder vi oss av det ovanstående exemplet så får vi att $f(z) = e^{3iz}$. □

Exempel 56. Låt $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kontinuerlig och definiera

$$F(z) = \int_0^2 e^{zt} g(t) dt.$$

Vi ska visa att F är holomorf och hitta dess Maclaurinserie.

Låt z vara fixt och definiera $h(t) = e^{zt}$ för alla $t \in \mathbb{C}$. Då är h en holomorf funktion i t , så

$$h(t) = e^{zt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k}{k!}$$

konvergerar likformigt på varje slutna disk $B(0, r)$, så konvergensen är speciellt likformig för $t \in [0, 2]$. Eftersom g är begränsad, ty den är definierad på en kompakt, så kan vi multiplicera h med g utan att störa konvergensen. Detta betyder att

$$e^{zt} g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k g(t)}{k!},$$

som konvergerar likformigt för $t \in [0, 2]$ och fixa z . Då får vi att

$$F(z) = \int_0^2 e^{zt} h(t) dt = \int_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k g(t)}{k!} dt.$$

Eftersom vi har likformig konvergens så kan vi byta plats på summationen och integralen så vi får att

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^2 t^k g(t) dt \right) z^k.$$

Detta är Maclaurinserien för F och den konvergerar för varje z , så F är hel. $\square$

Exempel 57. Låt oss nu titta på funktionen $f(z) = \log(1+z)$. Välj principalgrenen för $\log z$ varvid f blir holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq -1\}$. Taylors sats ger att konvergensraden för Taylorserien kommer vara ≥ 1 . Vi ska visa att konvergensraden är precis 1. Vi vet att

$$f(0) = \log 1 = 0.$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{så} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} \quad \text{så} \quad f''(0) = -1$$

och

$$f^k(z) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+z)^k} \quad \text{så} \quad f^k(0) = (k-1)!(-1)^{k-1}.$$

Alltså är f 's Taylorserie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}z^k}{k}.$$

Om $z = -1$ så får vi en serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, vilket betyder att serien divergerar då. Detta betyder att konvergensraden är ≤ 1 , så eftersom vi redan visste att konvergensraden var ≥ 1 så får vi att konvergensraden precis är 1. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 49. Låt $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ och definiera $f(z) = (1+z)^\alpha$, där potensen tolkas som principalgrenen. Bestäm om möjligt Taylorutvecklingen av f kring $z_0 = 0$ och diskutera dess konvergensradie. Beror utvecklingen av vilket α vi har?

INLÄMNINGSUPPGIFT 50. Finns det en potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ som konvergerar i $z = 2 + 3i$ och divergerar i $z = 3 - i$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 51. Låt $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara kontinuerlig och definiera

$$H(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{1-zt^2} dt$$

för $|z| < 1$. Visa att H är holomorf på $B(0, 1)$.

Nu kommer jag att avvika lite från boken ett tag. Jag kommer att gå igenom den kallade Cauchyuppskattningen och därefter så kommer jag gå igenom vissa följder av denna. Boken går också igenom dessa resultat men först i kapitel 5.

Sats 4.2. (Cauchyuppskattningar)

Låt $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ vara holomorf på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $p \in U$ och antag att $\overline{B(p, r)} \subset U$, $r > 0$. Sätt $M = \sup_{z \in \overline{B(p, r)}} |f(z)|$. Då gäller

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{Mk!}{r^k}$$

för $k = 1, 2, 3, \dots$

Bevis. Cauchys integralformel för derivator ger att

$$f^k(p) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} d\zeta.$$

Vi har att

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{r^{k+1}}.$$

Eftersom längden av randen är precis $2\pi r$ så får vi att

$$|f^k(p)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(p, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{Mk!}{r^k}.$$

□

Exempel 58. Låt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ uppfylla att $|f(z)| \leq e^{|z|^2}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Vi ska visa att $|f^{(4)}(0)| < 70$. Cauchyuppskattningen ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!M}{r^4},$$

där $M = \sup_{z \in \overline{B(0, r)}} |f(z)|$. Vi behöver bara ha ett $r > 0$ så låt oss ta $r = 1$. Detta ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!e^{1^2}}{1^4} = 24e < 70.$$

□

Liouvilles sats säger att en begränsad hel funktion är konstant, dvs det finns inga icke-konstanta holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$ som är begränsade.

Sats 4.3. (Liouvilles sats)

En begränsad hel funktion är konstant.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ så att $|f(z)| \leq C$, för något $C \geq 0$. Fixera ett $p \in \mathbb{C}$, och låt $r > 0$. Använd Cauchyuppskattningen med $k = 1$:

$$|f'(p)| \leq \frac{C1!}{r^1} = \frac{C}{r}.$$

Eftersom denna olikhet gäller för alla $r > 0$ så måste $f'(p) = 0$. Men eftersom p var godtyckligt, så är $f' \equiv 0$ på $\mathbb{C}$. Men då vet vi att f måste vara konstant. $\square$

Vad ska nu detta vara bra för? Jo, man kan visa följande inlämningsuppgift.

INLÄMNINGSUPPGIFT 52. Visa att om f är en hel icke-konstant funktion så finns det för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ en punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ så att $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Observera vidare att man använder Liouvilles sats för att visa algebrans fundamentalsats.

Sats 4.4. (Algebrans fundamentalsats)

Varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter har minst ett nollställe.

Bevis. Antag att $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, med $a_n \neq 0$, inte har något nollställe. Då kommer $f(z) = 1/p(z)$ vara en hel funktion. Observera att

$$p(z) = z^n(a_n + a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n),$$

så

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z)/z^n = a_n.$$

Detta ger att

$$|p(z)/z^n| \geq |a_n|/2$$

för tillräckligt stora $|z|$, säg för $|z| \geq r$. Då gäller att

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|z|^n |a_n|} \leq \frac{2}{r^n |a_n|}$$

för $|z| \geq r$. För $|z| \leq r$ så kommer f att vara begränsad, men då ger Liouvilles sats att $f(z) = 1/p(z)$ är konstant. Därför måste p vara konstant, som betyder att de enda polynomen som inte har några nollställen är de konstanta polynomen. $\square$

Låt oss återgå till bokens upplägg. Ni kan nu hoppa över avsnitten 4.2.4 och 4.2.5.

Isolerade nollställen och Weierstrass konvergenssats

Vi börjar med en definition:

Definition 4.5. Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion definierad på ett område Ω . Låt w vara ett nollställe till f . Vi säger att w är **isolerad** om det finns en boll $B(w, r)$ så att $f|_{B(w, r)} \neq 0$ förutom i w .

En viktig sats inom komplex analysen är att varje nollställe till en holomorf funktion är isolerad, om inte funktionen är identiskt noll i en omgivning till punkten.

Proposition 4.6. Låt $f: \omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på ett område Ω . Låt $w \in \Omega$ vara sådan att $f(w) = 0$. Om f inte är identiskt noll i en omgivning till w så kommer w att vara ett isolerat nollställe.

Bevis. Se boken. □

Anmärkning 35. Beviset ger att om w är ett nollställe till f , så finns det ett $k \geq 1$ så att $f(z) = (z - w)^k g(z)$ så att $g(w) \neq 0$. Talet k kallas för **ordningen för nollstället** w . □

Som vi har sett tidigare så bevarar likformig konvergens kontinuitet. Vi ska nu se att likformig konvergens bevarar även holomorficitet.

Sats 4.7. (Weierstrass konvergenssats)

Låt f_n vara holomorfa på ett område Ω . Om $f_n \rightarrow f$ likformigt på Ω så är f holomorf. Vidare så $f_n^k \rightarrow f^k$ likformigt på kompakter.

Bevis. Se boken. □

Boken går därefter igenom den så kallade Laplace-ekvationen. Denna kommer vi gå igenom senare då vi diskuterar harmoniska funktioner. Sen kommer den så kallade Goursats sats:

Sats 4.8. (Goursats sats)

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara deriverbar. Då är $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Beviset är ganska långt och bygger på ett antal teknikaliteter. Läs detta översiktligt. Läs även resten av kapitlet översiktligt.