

Kapitel 5

Läsanvisningar till kapitel 5

Analytisk fortsättning

Först så tänkte jag säga något om ordet analytisk. Man säger att en funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är **analytisk** om den lokalt kan representeras av en potensserie. Taylors sats ger att varje holomorf funktion är analytisk, och man kan även visa omvändningen. Detta ger att analyticitet och holomorficitet är precis samma sak. Nu till definitionen av analytisk fortsättning:

Definition 5.1. Låt $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ vara områden så att $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Låt $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ för $j = 1, 2$. Vi säger att f_2 är en **analytisk fortsättning** av f_1 om $f_2|_{\Omega_1} = f_1|_{\Omega_1}$, dvs om f_1 och f_2 överensstämmer på det mindre området Ω_1 .

Anmärkning 36. En del av sporten är att hitta ett så stort område Ω_2 som möjligt. □

Exempel 59. Betrakta funktionen $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}.$$

Man kan visa att f inte kan utvidas till någon större mängd än $B(0, 1)$. Jämför detta med bokens exempel 97. Detta exempel visar att $B(0, 1)$ är ett så kallat holomorfiområde, men mer om detta kan ni läsa i någon lämplig doktorandkurs. □

Exempel 60. Låt oss utvidga exempel 97 i boken lite grann. Betrakta funktionen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$ definierad på $\Omega_1 = B(z_0, 1)$. Eftersom , för $z \in B(z_0, 1)$,

$$\frac{1}{1 - (z - z_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$$

så kommer $g(z) = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$ vara en analytisk fortsättning av f till $\mathbb{C} \setminus \{1 + z_0\}$. □

Nästa fråga vi ska försöka besvara är om vi har två analytiska fortsättningar av en funktion f , vad kan vi då säga om dessa analytiska fortsättningar? Det kommer visa sig att de måste vara lika, så en analytisk fortsättning är unik. Vi behöver en sats för att besvara denna fråga:

Sats 5.2. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Om $f|_U \equiv 0$ för någon öppen $U \subset \Omega$ så är $f \equiv 0$ på Ω .

Bevis. Vi kan anta att U är en boll $B = B(z_0, r)$, eftersom varje öppen mängd är en union av bollar. Antag att $f(z) = 0$ för alla $z \in B$. Antag nu för en motsägelse att det finns en punkt $z_1 \in \Omega$ så att $f(z_1) \neq 0$, låt γ vara en kurva från z_0 till z_1 helt inne i Ω . Då vi går längs γ så måste det finnas en punkt w så att

1. För alla z på γ efter w så gäller att $f(z) = 0$
2. Det finns punkter z på γ som ligger godtyckligt nära w så att $f(z) \neq 0$.

Observera att (1) implicerar att $f'(z) = 0$ för z som finns i (1), ty

$$f'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

och går vi längs γ så kommer $f(\zeta) = f(z) = 0$. Detta kan vi göra för alla derivator, så $f^k(z) = 0$ för z i (1). Kontinuitet ger att $f^k(w) = 0$ för alla $k \geq 1$. Detta implicerar i sin tur att koefficienterna i Taylorutvecklingen kring $z = w$ är alla noll. Så f måste vara noll i en omgivning till w . Detta motsäger (2), så antagandet att f inte är identiskt noll är fel. $\square$

Anmärkning 37. Jämför med beviset som boken ger. $\square$

Följd 5.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Om $f|_U \equiv c$ för någon öppen $U \subset \Omega$ och någon konstant c så är $f \equiv c$ på Ω .

Bevis. Betrakta $g(z) = f(z) - c$. Då är $g|_U \equiv 0$, så föregående sats ger att $g \equiv 0$ på Ω . Därför är $f \equiv c$ på Ω . $\square$

Följd 5.4. Antag att $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ är områden med $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Antag att $g, h: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ är båda analytisk fortsättningar av $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$. Då är $g \equiv h$.

Bevis. Vi har att $g - h \equiv 0$ på Ω_1 , så satsen ovan ger att $g - h \equiv 0$ på Ω_2 , så $g \equiv h$. $\square$

Anmärkning 38. Följden säger att om det finns en analytisk fortsättning så är den unik. $\square$

Resten av avsnitt 5.1 kan ni läsa översiktligt.

Maximumprincipen och hela funktioner med diverse resultat

Nästa viktiga resultat är maximumprincipen, i två olika versioner. För beviset av satsen så behöver vi att holomorfa funktioner har en medelvärdesegenskap: Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ så är

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Detta följer direkt från ett variabelbyte och Cauchys integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Sats 5.5. (Maximumprincipen (version 1))

Om Ω är ett område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $|f|$ har ett lokalt maximum i Ω så måste f vara konstant i Ω .

Anmärkning 39. Ett lokalt maximum betyder att för alla $p \in \Omega$ så gäller att $|f(p)| \geq |f(z)|$ för alla $z \in \Omega$. $\square$

Bevis. Låt oss först bevisa resultatet i fallet av boll $B(z, R)$. Antag att $B(z, R)$ är sådan att $|f(z)| = \sup_{w \in B(z, R)} |f(w)|$. Tag ett $0 < r < R$. Medelvärdesegenskapen för holomorfa funktioner ger att

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta = \\ &= |f(z)| \frac{2\pi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Alltså har vi likhet hela vägen, så speciellt har vi att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta,$$

så

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})|) d\theta.$$

Eftersom $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| \geq 0$, så ger det att $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| = 0$ för alla θ . På grund av att detta är sant för alla $r < R$ så betyder det att $|f|$ är konstant på $B(z, R)$ och eftersom f är holomorf så betyder det att f är konstant.

Låt oss nu visa satsen i fallet av ett område. Antag att $|f|$ antar sitt maximum i $z \in \Omega$, och antag för en motsägelse att $|f|$ inte är konstant på Ω . Då finns det

en punkt $w \in \Omega$ så att $|f(w)| < |f(z)|$ (se ovan). Låt γ vara en kurva mellan z och w ; $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$. Låt

$$T = \inf\{t \in [0, 1] : |f(\gamma(t))| < |f(z)|\}.$$

Detta betyder att $|f(\gamma(t))| = |f(z)|$ om $t \in [0, T]$, men det finns punkter $t > T$ (godtyckligt nära T) där vi har olikhet. Tag nu en boll $B(\gamma(T), r) \subset \Omega$. Föregående argument ger att $|f|$ är konstant på $B(\gamma(T), r)$, vilket motsäger definitionen av T , så $|f|$ måste vara konstant, så f måste vara konstant, eftersom f är holomorf. $\square$

Sats 5.6. (Maximumprincipen (version 2))

Om Ω är ett begränsat område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och f är kontinuerlig på $\bar{\Omega}$, så antar $|f|$ sitt maximum på $\partial\Omega$.

Anmärkning 40. Det är denna sats som man brukar använda, så kom ihåg denna. $\square$

Bevis. Antag att $|f|$ inte antar sitt maximum på randen. Då måste $|f|$ anta sitt maximum på det inre, ty f är kontinuerlig, och då ger version 1 att f måste vara konstant. Därför måste $|f|$ anta sitt maximum på randen. $\square$

Exempel 61. Låt oss beräkna maximum för $|e^{z^2}|$ på enhetsdisken. Eftersom enhetsdisken är ett begränsat område och e^{z^2} är holomorf på enhetsdisken, samt e^{z^2} är kontinuerlig på $\bar{B}(0, 1)$. Nu ger maximumprincipen att $|e^{z^2}|$ antar sitt maximum på $|z| = 1$. Sätt därefter $z = e^{it}$. Då är

$$|e^{(e^{it})^2}| = |e^{e^{2it}}| = |e^{\cos 2t + i \sin 2t}| = e^{\cos 2t} \leq e,$$

eftersom $0 \leq \cos 2t \leq 1$. Detta maximum antar den för $z = \pm 1$. $\square$

Exempel 62. Vi ska hitta maximum för $|z^2 + 3z - 1|$ på $|z| \leq 1$. Enligt maximumprincipen så antas maximum på randen $|z| = 1$. Skriv z i polär form; $z = e^{i\theta}$. Då gäller att

$$|z^2 + 3z - 1|^2 = (e^{2i\theta} + 3e^{i\theta} - 1)(e^{-2i\theta} + 3e^{-i\theta} - 1) = \dots = (11 - 2\cos 2\theta).$$

Så maximum för $|z^2 + 3z - 1|$ är $\sqrt{13}$ i punkterna $\pm i$. $\square$

Exempel 63. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ är icke-konstant. Definiera $M(r) = \max |f(re^{i\theta})|$. Vi ska visa att M är strikt växande. Vi ska visa att $M(r) < M(s)$ om $r < s$. Eftersom $g = f|_{B(0,r)}$ är holomorf och icke-konstant så kommer maximumprincipen ge att $|f|$ antar sitt maximum på randen. Betrakta nu $h = f|_{B(0,s)}$ för $r < s$. Använder vi nu maximumprincipen så kommer $|h|$ anta sitt maximum på randen, men det är större än $|g|$'s maximum ty g och h kommer från f som antar alltid sitt maximum på randen till en begränsad mängd. $\square$

Läs även igenom bokens exempel, och gör sedan uppgifterna nedan.

INLÄMNINGSUPPGIFT 53. Låt $a_1, \dots, a_n$ vara punkter på enhetscirkeln S^1 . Visa att det existerar en punkt $z \in S^1$ så att

$$\prod_{j=1}^n |z - a_j| \geq 1.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 54. Fixera $R > 0$. Låt f vara en hel funktion som uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för z på $|z| = R$. Visa att

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq \frac{k!M}{(R-r)^k}$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$ och alla $0 \leq r < R$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 55. Gör uppgift 72 i boken.

Nu kommer boken in på hela funktioner, dvs funktioner som är holomorfa på hela $\mathbb{C}$. Vi har redan gått igenom Liouvilles sats samt hur man bevisar algebrans fundamentalsats med hjälp av den. Boken går även igenom ett flertal andra bevis av algebrans fundamentalsats. Läs igenom dessa och jämför de olika bevismetoderna.

Harmoniska funktioner

Jag tänkte nu lägga till ett avsnitt om harmoniska funktioner. Boken tar upp lite om den så kallade Laplace-ekvationen i kapitel 4, och sen i kapitel 7.6 och 12 så diskuterar man harmoniska funktioner litegrann. Jag tänkte göra en ganska bra genomgång, med relativt många exempel. Vi börjar med definitionen av en harmonisk funktion.

Definition 5.7. Harmoniska funktioner är de som ligger i kärnan till Laplace-operatorn

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mer precist, om $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ett område, så säger vi att f är **harmonisk** om

$$\Delta f = 0.$$

på D . Vi skriver mängden av harmoniska funktioner på D som $\mathcal{H}(D)$.

Laplaceoperatorn kan komplext uttryckas genom

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Detta följer direkt från definitionen av de komplexa partiella derivatorna. Från denna representation av Laplace-operatorn så ser vi direkt att varje holomorf funktion är harmonisk, dvs $\mathcal{O}(D) \subset \mathcal{H}(D)$. Däremot så har vi inte omvändningen:

Exempel 64. Låt $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2$. Då är f harmonisk. Låt $u(x, y) = x^2 - y^2$ och $v(x, y) = 0$, varvid $f = u + iv$. Cauchy-Riemanns ekvationer ger att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Alltså är inte Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda så f är inte holomorf, men den är harmonisk. $\square$

Vi har följande förhållande mellan holomorfa och harmoniska funktioner:

Sats 5.8. Låt $D \subset \mathbb{C}$ vara ett område och $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på D . Skriv $f = u + iv$, då är u och v harmoniska på D .

Bevis. Detta följer direkt från Cauchy-Riemanns ekvationer. $\square$

Men hur är det med omvändningen till denna sats. Om vi har en harmonisk funktion u , kan vi då hitta en harmonisk funktion v så att $f = u + iv$ blir holomorf? Svaret är ja, och då kallar man v för **harmoniska konjugatet** till u . Låt oss förklara hur det går till:

- Vi utgår från att u är en harmonisk funktion.
- Vi vill hitta en harmonisk v så att $f = u + iv$ blir holomorf, så utifrån Cauchy-Riemanns ekvationer har vi att

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

som genom integrering bestämmer v plus en konstant C som beror på x , så $v(x, y) = p(x, y) + C(x)$. (Detta beror på vilken ekvation vi integrerar).

- Cauchy-Riemanns ekvationer ger nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

som då bestämmer $C'(x)$, som i sin tur bestämmer $C(x)$.

- På detta sätt så har vi bestämt v så att $f = u + iv$ blir holomorf.

Exempel 65. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\operatorname{Re}(f) = u(x, y) = ax^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$ och $f(0) = i$, där $a \in \mathbb{R}$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6ax + 2 - 2x - 2 = 6ax - 12x.$$

Alltså är u harmonisk om och endast om $6ax - 12x = 0$, dvs om $a = 2$. Vi har alltså bestämt a så att u blir harmonisk.

För att bestämma ett harmoniskt konjugat till u betraktar vi Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy + 2y + 1 \end{cases}.$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2x$ så kan vi integrera med avseende på y , vilket ger att

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C(x),$$

där $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bara beror på x . Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy + 2y + C'(x) = 12xy + 2y + 1$$

enligt ekvationerna ovan. Alltså måste $C'(x) = 1$, så $C(x) = x + d$, för $d \in \mathbb{R}$. Detta ger att alla harmoniska konjugat till u ges av

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d.$$

Alltså är de holomorfa funktioner som uppfyller $u = \operatorname{Re}(f)$:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i(6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d).$$

Utifrån $f(0) = i$ så får vi att $d = 1$, och om vi uttrycker f i termer av z och $\bar{z}$ så får vi att $f(z) = 2z^3 + z^2 + iz + i$. Detta bekräftar att f verkligen är holomorf. $\square$

Exempel 66. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\operatorname{Re}(f) = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 + y$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6x - 6x = 0$$

Alltså är u harmonisk. Vi vill nu hitta ett harmoniskt konjugat v till u , så att $f = u + iv$ blir holomorf. För att detta ska vara möjligt så måste Cauchy-Riemanns ekvationer vara uppfyllda. Vi måste alltså ha

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1 \end{cases}.$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ så kan vi integrera med avseende på y , vilket ger att

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C(x) ,$$

där $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bara beror på x . Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + C'(x) = 6xy - 1.$$

Alltså är $C'(x) = -1$, så $C(x) = -x + a$, där a är en konstant. Vi får alltså att

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x + a ,$$

där a är en konstant. Så den holomorfa funktionen vi söker är

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 + y + i(3x^2y - y^3 - x + a) ,$$

där a är en konstant. □

Exempel 67. Vi ska hitta en funktion $f(x, y)$ som är harmonisk i området i det högra halvplanet som begränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = 2$ och $x^2 - y^2 = 4$ som antar värdet 3 på vänstra sidan och 7 på högra sidan, dvs antar värdet 3 på $x^2 - y^2 = 2$ och 7 på $x^2 - y^2 = 4$.

Observera att $x^2 - y^2$ är realdelen av z^2 . Vi provar med ansatsen

$$f(x, y) = A(x^2 - y^2) + B = \operatorname{Re}(Az^2 + B) ,$$

där A, B är reella tal. Eftersom vi kräver att $f = 3$ då $x^2 - y^2 = 2$ så får vi ekvationen $2A + B = 3$, och på andra sidan så får vi ekvationen $4A + B = 7$. Löser vi detta ekvationssystem, så får vi att $A = 2$ och $B = -1$, dvs

$$f(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 1$$

är den harmoniska funktionen vi söker. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 56. Visa att $\ln|z|$ är harmonisk.

Exempel 68. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1 + i)| < 2\}$. Vi ska hitta en harmonisk funktion $\phi(x, y)$ på A så att $\phi = 0$ på $|z - (1 + i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1 + i)| = 2$.

Enligt ovan så vet vi att $A \ln|z - (1 + i)| + B$ är harmonisk. Enligt förskrivet randdata så måste vi ha att

$$A \ln 1 + B = 0 \quad \text{och} \quad A \ln 2 + B = 10 ,$$

som ger att $B = 0$ och $A = \frac{10}{\ln 2}$. Detta ger att funktionen

$$\phi(x, y) = \phi(z) = 10 \frac{\ln|z - (1 + i)|}{\ln 2}$$

är harmonisk så att $\phi = 0$ på $|z - (1 + i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1 + i)| = 2$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 57. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara sådan att f och f^2 är harmonisk. Visa att f är holomorf eller att $\bar{f}$ är holomorf.

INLÄMNINGSUPPGIFT 58. Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Bestäm en holomorf funktion $f(z)$ så att

$$u = \operatorname{Re}(f) \text{ och } f(1) = i.$$

Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 59. Visa att $\operatorname{Re}\left(\frac{\cos z}{e^z}\right)$ är harmonisk på $\mathbb{C}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 60. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < 3\}$. Hitta en harmonisk funktion $\phi(z) = \phi(x, y)$ på A så att $\phi = 10$ på $|z - i| = 1$ och $\phi = 100$ på $|z - i| = 3$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 61. a) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen

$$u(x, y) = x^2 + ax + by^2 + cy + dxy.$$

Bestäm de reella konstanterna a, b, c och d och en holomorf funktion $f(z)$ så att

$$u = \operatorname{Re}(f), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 0, \quad f(0) = 1 \text{ och } u(1, 1) = -2.$$

Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

b) Är f entydigt bestämd? Motivera!

INLÄMNINGSUPPGIFT 62. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att $|f| \in \mathcal{H}(\Omega)$, visa att f är konstant.

Det finns mycket att säga om harmoniska funktioner. De uppfyller en maximumprincip, de uppfyller medelvärdesegenskapen, etc. Jag nöjer mig här, ni kan läsa om mera egenskaper hos harmoniska funktioner i någon annan kurs.