

Kapitel 6

Läsanvisningar till kapitel 6

Jag kommer att ha ett litet annat upplägg än boken, det mesta står redan i boken, och allt som står i boken tar jag inte upp. De flesta detaljerna kan ni läsa i boken. Vi börjar med Laurentserier:

Taylorserier gav oss en möjlighet att uttrycka holomorfa funktioner i en potensserie. I detta avsnitt vill vi uttrycka en holomorf funktion med singulariteter, dvs där den inte är definierad, i en potensserie.

Låt $0 \leq r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2 \leq +\infty$ och låt $z_0 \in \mathbb{C}$. Sätt

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

och

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Antag att $f \in \mathcal{O}(A)$. Då är

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j ,$$

där serierna är absolutkonvergenta och konvergerar likformigt på mängder av typen B . Serieutvecklingen kallas för **Laurentserieutvecklingen** av f på A kring z_0 .

Om γ är en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då ges koeficienterna i Laurentserieutvecklingen av

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{j-1} d\zeta \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Observation 8. Observera att beviset av denna sats är liknande av beviset av Taylors sats. $\square$

Anmärkning 41. Det är lockande att skriva

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$$

som i Taylorutvecklingen, med det vore fel ty $f^{(j)}(z_0)$ behöver nödvändigtvis ej vara väldefinierat. $\square$

Observation 9. Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r_2))$, då blir Laurentserieutvecklingen precis Taylorutvecklingen av f kring z_0 . $\square$

Anmärkning 42. Laurentserieutvecklingen är entyigt bestämd enligt en sats i boken, och detta faktum använder man bland annat i uträkningar. $\square$

Definition 6.1. Låt

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

vara Laurentserieutvecklingen av en funktion f . Vi kallar då $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j}$ för **principaldelen** av Laurentserien.

Anmärkning 43. Principaldelen berättar hur singular f är i punkten z_0 . $\square$

Låt oss göra några exempel. Innan ni kollar på dessa, se till att ni har koll på geometriska serier.

Exempel 69. Låt

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \text{ och } A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

och

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(A_1)$ och $f \in \mathcal{O}(A_2)$. Låt oss Laurentserieutveckla f i de olika områdena. För det första har vi att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j,$$

där vi använde en geometrisk serie, eftersom $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ är precis samma sak som $|z| > 1$ (dvs vi befinner oss i området A_1 .) Så denna serie konvergerar på A_1 .

Låt oss nu hitta en Laurentserieutveckling på A_2 för f . Vi har att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^j = -\frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j,$$

där vi har använt oss av en geometrisk serie, eftersom $|z| < 1$. Så serien konvergerar på A_2 . $\square$

Exempel 70. Låt oss Laurentserieutveckla $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}$ i området

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}.$$

Vi har att

$$\frac{1}{z^2+4z+3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3}$$

om vi använder partialbråksuppdelning.

Termen $\frac{1}{z+1}$ är holomorf på $|z| > 1$. Vi har, om vi använder en geometrisk serie, att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}}$$

som konvergerar för $|z| > 1$.

Vidare så är termen $\frac{1}{z+3}$ holomorf på $|z| < 3$. Vi har att

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}.$$

Även här har vi använt oss av en geometrisk serie. De båda fallen ovan ger nu att

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}$$

som är Laurentserieutvecklingen av f i området A . □

Exempel 71. Vi ska Laurentserieutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ kring $z_0 = 3$, och därefter bestämma dess konvergensradie.

Vi ser att $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ är holomorf på $0 < |z-3| < 2$ och på $|z-3| > 2$. Därför måste vi bestämma en Laurentserieutveckling på båda dessa områden. Vi börjar med att göra en partialbråksuppdelning av $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$. Då får man att

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5}.$$

Nu kan vi börja Laurentserieutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $0 < |z-3| < 2$. Vi behöver inte utveckla $\frac{1}{z-3}$ eftersom denna term redan finns med i Laurentserieutvecklingen kring $z_0 = 3$. Vidare har vi att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-3}{2}\right)}.$$

Eftersom

$$\left| -\frac{(z-3)}{2} \right| < 1 \iff |z-3| < 2$$

så är vi rätt område, vilket betyder att vi kan använda oss av en geometrisk serie. Då får vi att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z-3}{2} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}}.$$

På samma sätt så får vi att

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{2-(z-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-3}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-3}{2} \right)^j = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}}.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5} = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} - \frac{5}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+1}} = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-3)^j}{2^{j+4}} ((-1)^j - 5), \end{aligned}$$

som är Laurentseriutvecklingen vi sökte.

Låt oss nu Laurentseriutveckla $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $|z-3| > 2$. Vi har att

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+(z-3)} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z-3}\right)} = \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{2}{z-3} \right)^j$$

och

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{(z-3)-2} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z-3}} = \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-3} \right)^j.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{z-5} = \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{2}{z-3} \right)^j - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \frac{1}{z-3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-3} \right)^j = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} + \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{(z-3)^{j+1}} ((-1)^j + 5), \end{aligned}$$

vilket är Laurentseriutvecklingen för $\frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$ på $|z-3| > 2$. □

INLÄMNINGSUPPGIFT 63. Låt A vara annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r \leq |z| \leq R\}$ och låt $f \in \mathcal{O}(A)$. Visa att det finns funktioner f_1, f_2 så att f_1 är holomorf för $|z| \leq R$, f_2 är holomorf för $|z| \geq r$ och

$$f = f_1 + f_2$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 64. Laurentserieutveckla $\frac{z}{z+2}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 65. Laurentserieutveckla $\frac{1}{z-3}$ i området $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 66. Laurentserieutveckla $\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-5)}$ i områdena

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2| < 3\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 3\}$

Singulariteter är, precis som vi har nämnt förut, punkter där en funktion inte är definierad. Man kan däremot ha olika typer av singulariteter, och man använder sig av Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner för att klassificera de olika typerna av singulariteter. Mer precist har vi:

Definition 6.2. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och antag att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$, $r > 0$. Om $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ så säger vi att f har en **isolerad singularitet** i z_0 .

Eftersom $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ så har f följande Laurentserieutveckling

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

åtminstone på $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Vi ska använda oss av koefficienterna c_j till denna Laurentserieutveckling för att klassificera de olika singulariteterna.

1. Om $c_j = 0$ för alla $j < 0$ så säger vi att f har en **hävbar singularitet** i z_0 .
2. Om det finns ett $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, så att $c_k \neq 0$ och $c_j = 0$ för alla $j < -k$, så säger vi att f har en **pol** i z_0 av ordning k .
3. Om $c_j \neq 0$ för oändligt många *negativa* j , då säger vi att f har en **väsentlig singularitet** i z_0 .

Anmärkning 44. Koefficienten c_{-1} kallas för f :s **residue** i punkten z_0 . Detta kommer bli mer klart i kapitel 8. $\square$

Låt oss gå igenom dessa olika typer av singulariteter.

- Antag att f har en hävbar singularitet i z_0 . Detta är faktiskt ingen singularitet, utan man häver verkligen den. Då är Laurentserieutvecklingen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ inget annat än Taylorutvecklingen för f som är holomorf i $B(z_0, r)$ förutsatt vi definierar $f(z_0) = c_0$. Vidare så har vi att f är begränsad i någon omgivning $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. En annan viktig egenskap hos hävbara singulariteter är att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

existerar och är ändlig. Vidare så är

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Vi sammanfattar att z_0 är en hävbar singularitet för f om $|f|$ är begränsad nära z_0 om $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar och är ändlig om vi kan omdefiniera f så att f blir holomorf i z_0 (detta är den så kallade Riemanns sats för hävbara singulariteter).

- Antag nu att f har en pol av ordning k i z_0 . Då har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Vidare så kan vi skriva f som

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

där g är en holomorf funktion med $g(z_0) \neq 0$. Detta betyder speciellt att $1/f$ kommer ha ett nollställe i z_0 av ordning k . Vidare så har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$$

och att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

existerar och är ändlig.

- Låt oss slutligen diskutera väsentliga singulariteter. Dessa punkter är konstiga punkter, och gränsvärdet $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar inte, vare sig det blir ändligt eller oändligt. Vidare så har vi Picards sats som säger att $f(z)$ antar alla komplexa tal i en omgivning till z_0 med ett möjligt undantag. Detta betyder, med topologiska termer, att värdemängden för f är tät i $\mathbb{C}$.

Definition 6.3. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område. En funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ som är holomorf förutom i poler kallas **meromorf**.

Exempel 72. Betrakta funktionen

$$f(z) = \begin{cases} \cos z & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Laurentserieutvecklingen av f kring z_0 är

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j}}{(2j)!} z^{2j}$$

på mängden $0 < |z|$. Per definition så har f en hävbar singularitet i $z_0 = 0$. $\square$

Exempel 73. Funktionen $f(z) = e^{-1/z}$ har en väsentlig singularitet i $z_0 = 0$. I varje omgivning $B(0, r) \setminus \{0\}$ så antar denna funktion alla komplexa värden utom 0. Detta är standardexemplet på en funktion med en väsentlig singularitet. $\square$

Exempel 74. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$. Vi ser att f har en isolerad singularitet i $z = 0$. Vidare har vi att

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 0.$$

Eftersom $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$ existerar inte så har f en pol av ordning 2. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 67. Visa att de enda singulariteterna en rationell funktion, dvs en funktion på formen $p(z)/q(z)$ där $p, q \in \mathbb{C}[z]$, har är hävbara eller poler.

INLÄMNINGSUPPGIFT 68. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 69. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \frac{1 - \cos(z^5)}{\sin(z^3)}$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 70. Klassificera eventuella singulariteter hos $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$.

Resten av kapitlet kan ni läsa själva.