

# Kapitel 7

## Läsanvisningar till kapitel 7

I detta kapitel så fortsätter vår studie av kurvintegraler. Som boken visar så beror inte en kurvintegral av vilken väg man tar mellan ändpunkterna. Detta förutsätter att integranden är holomorf, se exempel 122 för ett motexempel då integranden inte är holomorf. Därefter så visar boken, i exempel 123 att vi inte kan ha vilket område som helst heller. Det kommer visa sig att de områden som fungerar är precis de områden som inte har några hål. För att kunna ge en mer precis matematisk definition så måste vi studera kurvor en aning mer.

**Definition 7.1.** Låt  $\Omega \subset \mathbb{C}$  vara ett område, och låt  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$  och  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$  vara kurvor. Antag att  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$  och  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$ . Vi säger att  $\gamma_0$  och  $\gamma_1$  är **homotopa** i  $\Omega$ , som vi skriver som  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ , om det finns en kontinuerlig funktion  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  så att

1.  $H(0, t) = \gamma_0(t)$
2.  $H(1, t) = \gamma_1(t)$
3.  $H(s, 0) = p$
4.  $H(s, 1) = q$

för alla  $s, t \in [0, 1]$ . Funktionen  $H$  kallas för en **homotopi** av  $\gamma_0$  och  $\gamma_1$ .

En homotopi är helt enkelt en kontinuerlig deformation av  $\gamma_0$  till  $\gamma_1$ , dvs kurvan  $\gamma_0$  deformerar på ett "bra" sätt till kurvan  $\gamma_1$ . Rita egna bilder och försök få en bättre förståelse för detta koncept.

**INLÄMNINGSUPPGIFT 71.** Visa att "vara homotop med" är en ekvivalensrelation.

*Exempel 75.* Låt  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  vara definierade genom

$$\gamma_0(t) = t + it$$

och

$$\gamma_1(t) = t + it^2.$$

Då är  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  via homotoping  $H(s, t) = t + it^{1+s}$ . En annan homotopi är given av  $H(s, t) = t + i(st^2 + (1-s)t)$ .  $\square$

En viktig sats nu är att

**Sats 7.2. (Homotopiinvarians av kurvintegraler)**

Låt  $\Omega \subset \mathbb{C}$  vara ett område, och låt  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Om  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$  är homotopa kurvor, så gäller att

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Bevis. Se boken.  $\square$

Vi kan även formulera en annan viktig sats:

**Sats 7.3.** Antag att  $U \subset \mathbb{C}$  är ett område och  $f$  är kontinuerlig på  $U$ . Då är följande ekvivalent

1.  $f$  har en primitiv funktion i  $U$
2.  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  för alla slutna, enkla  $\mathcal{C}^1$ -kurvor  $\gamma$  i  $U$ .
3.  $\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz$  där  $\gamma_1, \gamma_2$  är styckvisa  $\mathcal{C}^1$ -kurvor med samma start- och ändpunkt.

Om ni kommer ihåg satsen om konservativa vektorfält från någon flervariabelkurs så är den analog med satsen ovan, den säger nämligen

**Sats 7.4.** Antag att  $U \subset \mathbb{R}^n$  är ett område och  $F$  är ett kontinuerligt vektorfält på  $U$ . Då är följande ekvivalent

1.  $F$  är konservativ på  $U$
2.  $\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0$  för alla slutna, enkla  $\mathcal{C}^1$ -kurvor  $\gamma$  i  $U$ .
3.  $\oint_{\gamma_1} F \cdot dr = \oint_{\gamma_2} F \cdot dr$  där  $\gamma_1, \gamma_2$  är styckvisa  $\mathcal{C}^1$ -kurvor med samma start- och ändpunkt.

Denna sats om konservativa vektorfält ingår förstås inte i kursen, utan jag tyckte det vore kul att se analogin bara. En sak som man bör observera är att Sats 7.3 gäller för kontinuerliga funktioner, så den gäller speciellt för holomorfa funktioner.

**Definition 7.5.** Ett område  $\Omega \subset \mathbb{C}$  kallas för ett **enkelt sammanhängande område** om varje enkel sluten kurva i  $\Omega$  är homotop med en punkt.

Denna definition leder fram till en ny variant av Cauchys integralsats:

**Sats 7.6. (Cauchys integralsats för enkelt sammanhängande områden)**

Låt  $\Omega \subset \mathbb{C}$  vara ett enkelt sammanhängande område och antag att  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Då gäller att

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

för alla slutna kurvor  $\gamma$  i  $\Omega$ .

*Bevis.* Låt  $\gamma$  vara en godtycklig enkel sluten kurva i  $\Omega$ . Då finns det en punkt  $p \in \Omega$  så att  $\gamma \sim \{p\}$ . Då ger homotopiinvarianssatsen att

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\{p\}} f dz = 0,$$

ty integralen över en punkt är noll. □

*Exempel 76.* Låt oss betrakta integralen  $\int_{|z|=1} z^n dz$  igen, fast den är gången med hjälp av Cauchys integralsats. Vi vet att

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}$$

Låt oss kolla på tre fall:

**Fall 1:** ( $n \geq 0$ )

Då är  $z^n$  holomorf på  $\mathbb{C}$  som är enkelt sammanhängande, så  $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$ .

**Fall 2:** ( $n = -1$ )

Då är  $z^n = \frac{1}{z}$  holomorf på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  men har ingen primitiv funktion på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , så  $\int_{|z|=1} z^n dz = 2\pi i$ .

**Fall 3:** ( $n < -1$ )

Då är  $z^n$  holomorf på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  och har en primitiv funktion på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , så  $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$ . □

*Exempel 77.* Låt oss beräkna  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$  där  $\gamma$  är en cirkel med positiv orientering. Om  $a$  ligger utanför  $\gamma$  så är  $\frac{1}{z-a}$  holomorf i  $\gamma$ , så Cauchys integralsats ger att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

Antag nu att  $a$  ligger innanför  $\gamma$ . Deformera nu  $\gamma$  till en cirkel runt  $a$  med radie 1, dvs  $|z-a|=1$ . Då får vi enligt homotopisatsen att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=1} \frac{dz}{z-a} = \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$

enligt föregående exempel. Alltså är

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & , \text{ om } a \in \text{Ext}(\gamma) \\ 2\pi i & , \text{ om } a \in \text{Int}(\gamma) \end{cases} ,$$

där  $\text{Int}(\gamma)$  är det inre av  $\gamma$  och  $\text{Ext}(\gamma)$  är det yttre av  $\gamma$ .  $\square$

Det är speciellt viktigt med detta exempel för att beräkna vissa kurvintegraler.

*Exempel 78.* Låt oss beräkna  $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)}$ . Eftersom

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

så blir

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)} = \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)} + \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i ,$$

enligt exemplet ovan.  $\square$

Med de nya kunskaperna så kan vi modifiera beviset av Cauchys integralformel:

**Sats 7.7. (Cauchys integralformel)** *Antag att  $U \subset \mathbb{C}$  är öppen och att  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Låt  $z_0 \in U$  och  $r > 0$  vara sådan att  $B(z_0, r) \subset U$ . Då gäller för varje  $z \in B(z_0, r)$  att*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

*Bevis.* Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \\ &= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta. \end{aligned}$$

Eftersom  $z \in B(z_0, r)$  och eftersom  $f(z)$  inte är en funktion av  $\zeta$ , så får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Om vi visar att  $\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0$  så är vi klara. Deformera nu  $|z-z_0|=r$  till en cirkel  $|z-z_0|=\varepsilon$ . Kalla den nya cirkeln för  $\gamma_\varepsilon$ . Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0.$$

Sätt  $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$ . Då gäller att

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M2\pi i \varepsilon}{\varepsilon} = M2\pi.$$

Eftersom  $f \in \mathcal{O}(U)$ , så är den speciellt kontinuerlig, så

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta \right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} d\zeta = 0,$$

så satsen följer. □

Boken formulerar och bevisar därefter den så kallade Monodromysatsen. Ni behöver inte läsa detta, om ni inte vill förstås. Däremot så ska ni läsa och förstå en typ av omvändning till Cauchys integralsats:

**Sats 7.8. (Moreras sats)**

Låt  $\Omega \subset \mathbb{C}$  vara ett område och låt  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ . Om

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

för varje sluten, enkel  $\mathcal{C}^1$ -kurva i  $\Omega$ , så är  $f$  holomorf på  $\Omega$ .

Bevis. Se Boken. □

Hoppa sedan över avsnitt 7.9, och gör därefter några inlämningsuppgifter.

**INLÄMNINGSUPPGIFT 72.** Visa att funktionen

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1-tz}$$

är holomorf på  $B(0,1)$ .

**INLÄMNINGSUPPGIFT 73.** Som ni redan har visat så är att vara homotop med en ekvivalensrelation. Ekvivalensklasserna till denna ekvivalensrelation kallar vi för en **homotopiklass**, och vi skriver  $[\gamma]$  som ekvivalensklassen under  $\gamma$ . Betrakta nu slutna kurvor  $\gamma$  och  $\tau$ . Att vara homotop med betyder då förstås samma sak som förut. Säg nu att  $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ . Vi kallar då  $z_0$  för **baspunkten** till kurvan  $\gamma$ . Vi skriver mängden av ekvivalensklasser  $[\gamma]$  av slutna kurvor med baspunkt  $z_0$  som  $\pi_1(\Omega, z_0)$ , om  $\gamma$  är en kurva i ett område  $\Omega$ .  $\pi_1(\Omega, z_0)$  brukar kallas den **första fundamentalgruppen** för  $\Omega$  i punkten  $z_0$ . Definiera produkten av två kurvor  $\gamma$  och  $\tau$  genom

$$\gamma \cdot \tau(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

- Definiera en operation  $\cdot$  på  $\pi_1(\Omega, z_0)$ . Visa att  $[\gamma \cdot \tau] = [\gamma] \cdot [\tau]$  är en väldefinierad operation.
- Hitta en bijektiv avbildning från  $\pi_1(\Omega, z_0)$  till  $\pi_1(\Omega, z_1)$ .

Den sista punkten visar att  $\pi_1(\Omega, z_0)$  är oberoende av baspunkt, så vi kan skriva  $\pi_1(\Omega)$  istället.

- Beräkna  $\pi_1(\Omega)$  om  $\Omega$  är enkelt sammanhängande.
- Hitta en bijektiv avbildning från  $\pi_1(S^1)$  till  $\mathbb{Z}$ , där  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .