

Kapitel 8

Läsanvisningar till kapitel 8

Ni kommer att märka att vissa resultat i detta kapitel har jag redan nämnt i tidigare läsanvisningar. Jag tänkte presentera detta avsnitt på ett litet annorlunda vis, men jag börjar som boken med vridningstal men med ett exempel:

Exempel 79. Låt γ vara enhetscirkeln paramteriserad genom $\gamma(t) = e^{it}$ för $t \in [0, 2\pi]$. Då gäller att

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Om vi låter τ vara enhetscirkeln fast vi låter τ genomlöpa cirkeln n gånger, dvs vi parametriserar den genom $\tau(t) = e^{it}$ för $t \in [0, 2\pi n]$. Då gäller att

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{dz}{z}.$$

Vi säger att τ snurrar runt 0 n gånger. □

Ett mer generellt exempel är

Exempel 80. Låt γ vara en positivt orienterad kurva som genomlöps n gånger kring en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Då gäller att

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Här snurrar γ n gånger kring z_0 . □

Observation 10. Om vi byter orientering på kurvan γ , säg till negativ orintering så får vi att

$$-n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

□

Observation 11. Om punkten z_0 ligger utanför kurvan γ så blir integralen noll, och det är ju klart att kurvan kan inte kan snurra kring en punkt om inte punkten ligger innanför kurvan. □

Definition 8.1. Låt $\gamma: [0, 1]$ vara en sluten kurva och låt z_0 vara en fixerad punkt som inte ligger på kurvan. Vi definierar **vridningstalet** för γ med avseende på z_0 genom

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Vi säger att γ **snurrar kring** z_0 $I(\gamma, z_0)$ gånger.

Anmärkning 45. Jämför bokens definition med denna. Kolla även på bilderna på sidan 246 för att på lite intuition om vad det hela handlar om. $\square$

Proposition 8.2. Låt γ, τ vara två enkla, slutna kurvor i $\mathbb{C}$, och antag att z_0 inte ligger på γ eller τ . Om γ är homotop med τ i $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ så gäller att $I(\gamma; z_0) = I(\tau; z_0)$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 74. Visa propositionen ovan.

Om vi har en kurva som går runt en punkt, så kan vi inte säga att den snurrar runt denna punkt $\sqrt{2}$ gånger. Följande sats säger att detta inte kan inträffa.

Sats 8.3. Låt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en styckvis, sluten $\mathcal{C}^1$ -kurva. Antag att z_0 är en punkt som inte ligger på kurvan. Då är $I(\gamma; z_0)$ ett heltal.

Bevis. Låt

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

I punkter där integranden är kontinuerlig så får vi att

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Vidare så gäller att

$$\frac{d}{dt} e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) = 0$$

där $g'(t)$ existerar. Därför måste $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ vara styckvis konstant på $[0, 1]$, och eftersom $e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ är kontinuerlig så måste den vara konstant på $[0, 1]$ (se en sats från första läsanvisningen). Detta konstanta värde är

$$e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0),$$

så $e^{-g(1)} (\gamma(1) - z_0) = e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0)$. Eftersom γ är sluten så måste $e^{g(1)} = e^{-g(0)}$. Eftersom $g(0) = 0$ så gäller att $e^{-g(0)} = 1$. Enligt en sats om den komplexa exponentialen så gäller att $g(1) = 2\pi i n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Resultatet följer. $\square$

Om ni kommer ihåg avsnittet om Laurentserieutvecklingar, så kallas koefficienten c_{-1} i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för **residuen** i z_0 . Eftersom koefficienten i en Laurentserieutveckling definieras genom en integral så kan vi använda residuer till att beräkna integraler. Men varför just koefficienten c_{-1} ? Låt oss motivera detta intresse av residuer.

Låt γ vara en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva kring origo. Då är

$$\int_{\gamma} z^n = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}.$$

Antag nu att f är en holomorf funktion med en singularitet i origo. Då har f en Laurentserieutveckling i någon annulus A kring 0; $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$. Denna konvergerar likformigt på γ , förutsatt γ ligger helt i A och innehåller origo. Då är

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \int_{\gamma} z^j dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Alltså är koefficienten c_{-1} viktig, och det leder till följande definition. (Denna definition har ni sett förrut, i alla fall mer eller mindre, men jag tänkte vara mera precis här).

Definition 8.4. Låt f vara en funktion med en isolerad singularitet i punkten z_0 . Då kallas koefficienten c_{-1} i f 's Laurentserieutveckling $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för f 's **residue** i punkten z_0 . Detta skriver vi som

$$\text{Res}(f, z_0) \text{ eller } \text{Res}(z_0).$$

Observation 12. Enligt definition så har vi att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

då $r > 0$ är tillräckligt litet. □

Vi kan även göra några fler fundamentala observationer:

1. Om f har en hävbar singularitet i z_0 så är $\text{Res}(f, z_0) = 0$ enligt Cauchys integralsats.
2. Om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j.$$

Detta ger att

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)f_1(z)$$

där $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$. Derivera nu $(k - 1)$ gånger, då får vi

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)f_1(z).$$

Låt nu $z \rightarrow z_0$. Då blir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + 0.$$

Alltså om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z).$$

Exempel 81. Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2}$ har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Detta ger att

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} 1 = 0.$$

□

Exempel 82. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^3}$ som har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Då är

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^3}{(e^z - 1)^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^3 = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \frac{d}{dz} \frac{z}{(e^z - 1)} = 3 \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \cdot \frac{(e^z - 1) - ze^z}{(e^z - 1)^2} = \dots = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

För att inse detta, kolla på Taylorutvecklingen av e^z . □

Om vi har flera singulariteter som ligger innanför en kurva, kan vi då använda oss av residuer för att beräkna en integral? Svaret är ja, och besvaras av Cauchys residuesats.

Sats 8.5. (Cauchys residuesats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ förutom i de isolerade singulariteterna $z_1, \dots, z_n$. Antag att γ är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis C^1 -kurva i Ω och att $z_1, \dots, z_n$ ligger inuti γ . Då gäller

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

Bevis. Vi ska använda induktion över antalet singulariteter.

Om $n = 0$:

Då är f holomorf i ett enkelt sammanhängande område som innehåller γ . Då ger Cauchys integralsats att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Vidare så har vi att $HL = 0$ så det stämmer i fallet $n = 0$, dvs inga singulariteter.

Antag nu att satsen är sann för $(n - 1)$ stycken singulariteter. Låt $\varepsilon > 0$ vara så litet så att $|z - z_n| \leq \varepsilon$ ej innehåller någon av $z_1, \dots, z_{n-1}$. Tag därför två punkter p_1 och p_2 på $|z - z_n| = \varepsilon$. Förbind p_1 och p_2 med kurvan γ i punkterna q_1 respektive q_2 . Kalla dessa γ_1 respektive γ_2 . Låt C_1 vara övre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$ från p_1 till p_2 , och låt C_2 vara undre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$. Vidare låt γ_3 vara den del av γ som går från q_1 till q_2 och låt γ_4 vara den del av γ som förbinder q_2 med q_1 , så $\gamma = \gamma_3 + \gamma_4$. (Rita en bild över detta!) Bilda nu

$$\tilde{\gamma} = \gamma_3 - \gamma_2 - C_2 - \gamma_1 + \gamma_1 - C_1 + \gamma_2 + \gamma_4$$

som är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då har vi att

$$\int_{\gamma} f - \int_{|z-z_n|} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_j).$$

Alltså är

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

så satsen är sann för n stycken singulariteter. □

Anmärkning 46. Bokens residuesats säger att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \cdot I(\gamma; z_j).$$

Så den tar hänsyn till hur många gånger γ snurrar kring z_j . Man får en liten annan formulering av satsen då, man kan inte anta att kurvan är enkel då. □

Exempel 83. Vi ska beräkna $I = \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z-1)} dz$ där γ är en "snäll" kurva som innehåller 0 och 1. Cauchys residuesats ger att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(0) + \text{Res}(1)).$$

Vi har att $z = 1$ är en enkel pol, ty $\cos \pi \neq 0$, så

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2} = -1.$$

Vidare så är $z = 0$ en pol av ordning 2, ty $\cos 0 \neq 0$, så

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z - 1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\pi \sin(\pi z)(z - 1) - \cos(\pi z)}{(z - 1)^2} = \frac{0 - 1}{(-1)^2} = -1.$$

Detta ger att

$$I = 2\pi i(-1 - 1) = -4\pi i.$$

□

Exempel 84. Vi ska hitta residuen i $z = 0$ för funktionen $f(z) = ze^{3/z}$ och beräkna $\int_{|z|=4} f(z)dz$. Använder vi Taylorutvecklingen av e^z så får vi att

$$ze^{3/z} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{3^k}{z^k} = z + 3 + \frac{3^2}{2!z} + \frac{3^3}{3!z^2} + \cdots.$$

Alltså är $\operatorname{Res}(0) = 3^2/2! = 9/2$, och enligt Cauchys residuesats så får vi att

$$\int_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi i \cdot 9/2 = 9\pi i.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 75. Låt $f(z) = p(z)/q(z)$ där p och q är holomorfa i z_0 . Antag att q har ett enkelt nollställe i z_0 , dvs av ordning 1, medan $p(z_0) \neq 0$. Visa att

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 76. Bestäm alla isolerade singulariteter för följande funktioner och beräkna residuerna i singulariteterna:

(a) $\frac{e^{3z}}{z-2}$

(b) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$

(c) $\frac{\cos z}{z^2}$

(d) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

(e) $\frac{e^z}{z(z+1)^3}$

(f) $\sin\left(\frac{1}{3z}\right)$

(g) $\tan z$

(h) $\frac{z-1}{\sin z}$

(i) $\frac{z^2}{1-\sqrt{z}}$, där $\sqrt{z}$ ska tolkas som principalgrenen

INLÄMNINGSUPPGIFT 77. Antag att f har en isolerad singularitet i z_0 . Visa att $\text{Res}(f', z_0) = 0$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 78. Finns det en funktion f med en pol av ordning 1 i z_0 med $\text{Res}(f, z_0) = 0$? Finns det en funktion med en pol av ordning 2 i z_0 med $\text{Res}(f, z_0) = 0$?