

Kapitel 9

Läsanvisningar till kapitel 9

Detta kapitel handlar om två olika saker. För det första så går boken igenom den så kallade argumentprincipen och Rouches sats. Därefter så beräknar man olika reella integraler med komplexa metoder. Allt bygger dock på residuer, så se till att ni har koll på Cauchys residuesats och hur man beräknar residuer. Jag tänke börja med integralerna och därefter köra argumentprincipen och Rouches sats, som vanligt så kan min framställning vara en aning annorlunda än bokens.

Trigonometriska integraler över $[0, 2\pi]$

Vi ska i detta avsnitt beräkna integraler på formen $\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ med hjälp av Cauchys residuesats. Antag att funktionen U ovan är en rationell funktion i $\cos \theta, \sin \theta$ med reella koefficienter som är ändlig på $[0, 2\pi]$. Låt $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kurva som ges av $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Observera att $e^{-i\theta} = \frac{1}{\gamma(\theta)}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$. Kom nu ihåg Eulers formler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Då gäller att

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad , \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

där $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Gör nu substitutionen $d\theta = \frac{dz}{iz}$ så får vi

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}.$$

Och nu är vi i ett läge där vi kan använda Cauchys residuesats. Låt oss kolla på ett exempel.

Exempel 85. Låt $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, och betrakta

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}.$$

Vi ska beräkna I . Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Gör nu variabelsubstitution i I . Då får vi, om vi använder $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{1 + a^2 - \frac{2a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{idz}{(z - a)(az - 1)}.$$

Vi ser nu att integranden har enkla poler i $z = a$ och $z = \frac{1}{a}$. Residuen i dessa punkter är

$$\text{Res}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{i}{a \left(z - \frac{1}{a} \right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

och

$$\text{Res}\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{i}{a(z - a)} = \frac{i}{1 - a^2}.$$

Vi måste nu kolla på olika fall för a :

Om $0 < a < 1$, då ligger a innanför γ och $1/a$ utanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Om $a > 1$, då ligger a utanför γ och $1/a$ innanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{1 - a^2} \right) = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

□

Exempel 86. Vi ska beräkna, för $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}.$$

Vi börjar med att observera att

$$a^2 + \sin^2 \theta = a^2 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2}(2a^2 + 1 - \cos 2\theta).$$

Gör nu variabelbytet $2\theta = \alpha$, varvid

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{a d\alpha}{1 + 2a^2 - \cos \alpha}.$$

Låt nu $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. För $z \in \gamma([0, 2\pi])$ så är $\frac{1}{z} = e^{-it}$. Eulers formler ger att

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad ,$$

för $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Sätt nu $z = e^{it}$, varvid $dz = ie^{it}dt = izdt$. Detta ger nu att

$$\int_0^{2\pi} \frac{ad\alpha}{1 + 2a^2 - \cos \alpha} = \int_\gamma \frac{adt}{iz \left(1 + 2a^2 - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)} = \int_\gamma \frac{2aidt}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}.$$

Vi ser nu att de enkla polerna till integranden är

$$1 + 2a^2 \pm 2|a|\sqrt{1 + a^2}.$$

Vi måste nu avgöra vilken/vilka av dessa som ligger innanför γ , dvs innanför enhetscirkeln. Vi ser att

$$1 + 2a^2 + 2|a|\sqrt{1 + a^2} \geq 1$$

för alla a , så denna pol ligger utanför γ . Vidare så är det klart att

$$1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} < 1 \quad ,$$

så för att beräkna integralen så behöver vi $\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}$:s residue i denna punkt. Vi har att

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}, 1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} \right) &= \\ &= \frac{2ai}{2(1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2}) - (2 + 4a^2)} = -\frac{2ai}{4|a|\sqrt{1 + a^2}} = -\frac{i}{2\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{ad\theta}{a^2 + \sin^2 \theta} &= 2\pi i \text{Res} \left(\frac{2ai}{z^2 - (2 + 4a^2)z + 1}, 1 + 2a^2 - 2|a|\sqrt{1 + a^2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{1 + a^2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}}. \end{aligned}$$

□

Exempel 87. Vi ska beräkna

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} \quad , \quad a > 0.$$

Eftersom $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$ så är

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)))^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos(2\theta))^2}$$

Sätt $t = 2\theta$ varvid $dt = 2d\theta$. Då blir

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos t)^2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \cos t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ så är $a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t \neq 0$. Låt nu $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $\gamma(t) = e^{it}$. För $z \in \gamma([0, 2\pi])$ så är $\frac{1}{z} = e^{-it}$. Eulers formler ger att

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

för $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Sätt nu $z = e^{it}$, varvid $dz = ie^{it} dt = iz dt$. Detta ger nu att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos t)^2} &= \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{dz}{((a + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} (z + \frac{1}{z}))^2 iz} = \\ &= \frac{1}{2i} \int_\gamma \frac{dz}{z (-\frac{1}{4z} (z^2 - 4(a + \frac{1}{2})z + 1))^2} = \frac{1}{2i} \int_\gamma \frac{16z^2 dz}{z (z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{8z dz}{(z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Betrakta nu nämnaren $z^2 - 4(a + \frac{1}{2}) + 1$. Kvadratkomplettering ger att

$$\begin{aligned} z^2 - 4 \left(a + \frac{1}{2} \right) + 1 &= (z - (2a + 1))^2 - (2a + 1)^2 + 1 = (z - (2a + 1))^2 - (2\sqrt{a^2 + a})^2 = \\ &= (z - (2a + 1) - 2\sqrt{a^2 + a})(z - (2a + 1) + 2\sqrt{a^2 + a}). \end{aligned}$$

Låt $p_1 = (2a + 1) + 2\sqrt{a^2 + a}$ och $p_2 = (2a + 1) - 2\sqrt{a^2 + a}$, varvid vi får att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \int_\gamma \frac{z dz}{(z - p_1)^2 (z - p_2)^2}.$$

Betrakta polerna p_1 och p_2 som funktioner av $a > 0$. Då är $p_1(a)$ strikt växande på $]0, \infty[$ och $p_2(a)$ är strikt avtagande på $]0, \infty[$. Vidare så har vi att

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} p_1(a) = 2 \cdot 0 + 1 + 2\sqrt{0^2 + 0} = 1$$

och

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} p_2(a) = 2 \cdot 0 + 1 - 2\sqrt{0^2 + 0} = 1.$$

Detta betyder att $p_1(a)$ hela tiden kommer ligga utanför γ och att $p_2(a)$ hela tiden kommer ligga innanför γ . Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2}, p_2 \right).$$

Eftersom p_2 är en pol av ordning 2 så får vi att

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2}, p_2 \right) &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{d}{dz} (z - p_2)^2 \frac{z}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{(z - p_1)^2 - 2(z - p_1)z}{(z - p_1)^4} = \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{(z - p_1) - 2z}{(z - p_1)^3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{-(z + p_1)}{(z - p_1)^3} = \frac{-(p_2 + p_1)}{(p_2 - p_1)^3} = \frac{-2(2a + 1)}{-4^3(\sqrt{a^2 + a})^3} = \frac{2a + 1}{32(\sqrt{a^2 + a})^3}. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{8}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{2a + 1}{32(\sqrt{a^2 + a})^3} = \frac{\pi(2a + 1)}{2(\sqrt{a^2 + a})^3}.$$

□

Exempel 88. Låt oss beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$$

Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Då blir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \int_\gamma \frac{\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2}{5 + 4 \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} \frac{dz}{iz} = \dots = -\frac{1}{4i} \int_\gamma \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz.$$

Man kan se att integranden har enkla poler i $z = -1/2$ och i $z = -2$, och en pol av ordning 2 i origo. De enda som ligger innanför enhetscirkeln är $-1/2$ och 0. En uträkning ger att residuen för integranden i $-1/2$ är lika med $3/4$ och i 0 är den lika med $-5/4$. Nu ger Cauchys residuesats att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 2\pi i \frac{-1}{4i} (3/4 - 5/4) = \frac{\pi}{4}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 79. Beräkna

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} d\theta$$

för alla $n \geq 1$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 80. Beräkna

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta.$$

Obestämda integraler av speciella funktioner över $]-\infty, \infty[$

Vi ska försöka beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ genom att använda komplex analys. Detta gör vi genom att helt enkelt låta $f(z)$ vara den reella funktionen $f(x)$ fast i den komplexa variabeln z , så t.ex. om $f(x) = x^2 + 1$ så är $f(z) = z^2 + 1$. Låt $I_R = [-R, R]$ och låt $C_R = Re^{i\theta}$, för $0 \leq \theta \leq \pi$. Sätt $\gamma_R = C_R + I_R$. Låt nu $R > 0$ vara tillräckigt stort så att $f(z)$:s isolerade singulariteter med $\text{Im}(z) > 0$ ligger innanför γ_R . Då vet vi att

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz$$

och enligt Cauchys residuesats så har vi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

där $z_1, \dots, z_n$ är f :s isolerade singulariteter så att $\text{Im}(z_j) > 0$. Vi får då att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz.$$

Låt nu $R \rightarrow \infty$, så vi betraktar

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(z)dz.$$

Eftersom vi befinner oss på realaxeln i integralen över I_R så kan vi gå tillbaka till den reella funktionen, dvs

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(x)dx.$$

Om nu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig, så brukar vi kalla detta för (Cauchys) principalvärde och skriver

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

Observation 13. Exemplet i boken om att $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$ är viktigt, eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ inte existerar. $\square$

Så om $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig så får vi att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz + \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Alltså om vi kan visa att $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ så skulle vi ha beräknat $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Lyckligtvis så finns det ett lemma som hjälper till här:

Lemma 9.1. Om $f(z) = p(z)/q(z)$, där p och q är polynom så att

$$\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Bevis. Låt $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ och låt $q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$. Då gäller att

$$|f(z)| = \frac{|a_0/z^m + \dots + a_m||z^m|}{|b_0/z^n + \dots + b_n||z^n|}.$$

Så då $n \geq 2 + m$ så gäller att

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \left(\frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \right) R^{m-n} \cdot \pi R = \left(\frac{|a_m|}{|b_n|} + 1 \right) \pi R^{1+m-n} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$, ty $n \geq m + 2$. $\square$

Exempel 89. Låt oss beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Ni får själva kolla att I är konvergent, så

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Låt oss nu gå över till den komplexa funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$. Observera att $\text{grad}(q) \geq 2 + \text{grad}(p)$ så lemmat ovan ger att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 ,$$

där C_R är halvcirkeln $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Eftersom ekvationen $z^4 + 1 = 0$ har lösningarna $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$ och $z_4 = e^{7\pi i/4}$, så z_1 och z_2 ligger innanför $\gamma_R = C_R + I_R$. Detta betyder att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2)).$$

Vi har att

$$\text{Res}(z_k) = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

för $k = 1, 2, 3, 4$. Detta betyder att

$$I = \frac{2\pi i}{4} (e^{-\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Denna metod blir ofta lättare än den gamla metoden med integralkalkylens huvudsats.

Anmärkning 47. Metoden som har beskrivits i detta avsnitt fungerar inte om singulariteterna ligger på $\text{Im}(z) = 0$, utan detta ska vi få lära oss i senare avsnitt.

□

Exempel 90. Vi ska beräkna

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

Vi betraktar funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

där $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ och $z_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$. Låt l_r^1 vara linjesegmentet från origo till r , där $r > 0$. Vidare låt C_r vara bågen med radie r och av längd $\pi/2 + \pi/6$. Slutligen låt l_r^2 vara linjesegmentet från slutet av bågen ner till origo. Vi har följande parametriseringar av dessa kurvor

$$l_r^1(t) = t \quad 0 \leq t \leq r \Rightarrow (l_r^1)'(t) = 1$$

$$C_r(t) = re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi/3$$

och

$$l_r^2(t) = te^{i2\pi/3} \quad r \leq t \leq 0 \Rightarrow (l_r^2)'(t) = e^{i2\pi/3}.$$

Låt $\gamma_r = l_r^1 + C_r + l_r^2$ varvid vi får att

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{l_r^1} f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{l_r^2} f(z)dz.$$

Då $r > 0$ är stort nog så kommer bara polen z_2 ligga innanför γ_r , så Cauchys Residuesats ger att

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_2).$$

Eftersom polen z_2 är enkel så får vi att

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = \frac{1}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} = \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1)(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))} = \frac{1}{i\sqrt{3}(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1)} = \\ &= -\frac{1}{6}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Vi ska nu uppskatta integralen av f över C_r . Låt $z = re^{it}$ varvid $dz = rie^{it}dt$ ger att

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi/3} f(re^{it})rie^{it}dt \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \left| \frac{1}{(re^{it})^3 + 1} rie^{it}dt \right| = \\ &= \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{|r^3 e^{3it} + 1|} dt. \end{aligned}$$

Eftersom $|r^3 e^{3it} + 1| \geq |r^3 e^{3it}| = r^3$ så får vi att

$$\left| \int_{C_r} f(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{r^3} dt = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0,$$

då $r \rightarrow \infty$. Detta betyder att $\int_{C_r} f(z) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$.

Per definition av integralen längs en kurva så får vi att

$$\int_{l_r^1} f(z)dz = \int_0^r f(l_r^1(t))(l_r^1)'(t)dt = \int_0^r f(t)dt$$

och

$$\begin{aligned} \int_{l_r^2} f(z)dz &= \int_r^0 f(l_r^2(t))(l_r^2)'(t)dt = \int_r^0 f(te^{i2\pi/3})e^{i2\pi/3}dt = \\ &= -e^{i2\pi/3} \int_0^r \frac{1}{(te^{i2\pi/3})^3 + 1} dt = -e^{i2\pi/3} \int_0^r \frac{1}{t^3 + 1} dt = -e^{i2\pi/3} \int_{l_r^1} f(z)dz. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$(1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) ,$$

dvs

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = -\frac{2\pi i(1 + i\sqrt{3})}{6(1 - e^{i2\pi/3})} = -\frac{2\pi i(1 + i\sqrt{3})}{6(\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3}))} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 81. *Beräkna*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 82. *Beräkna*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Obestämda integraler av trigonometriska funktioner

Vi ska fortsätta med att beräkna principalvärdet för integraler på formen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx ,$$

där P och Q är polynom. För att beräkna dessa integraler så använder vi samma metod som i föregående avsnitt. Det man observerar är att

$$\operatorname{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad \operatorname{Im}(e^{it}) = \sin t ,$$

så

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right)$$

och

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right).$$

Konstruktionen med kurvan $\gamma = C_R + I_R$ kan man använda även här, och Jordans lemma hjälper en på traven:

Lemma 9.2. (Jordans lemma)

Om $m > 0$ och P och Q är polynom så att

$$\text{grad}(Q) \geq 1 + \text{grad}(P)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz = 0 ,$$

där C_R är en halvcirkel med radie R .

Bevis. Parametrisera C_R så att

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz = \int_0^\pi g(t) dt ,$$

där

$$g(t) = e^{im(Re^{it})} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} Rie^{it} .$$

Vi har att

$$|e^{im(Re^{it})}| = e^{-mR \sin t} .$$

Från antagandet i lemmat så vet vi att det finns en konstant K så att

$$\left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \leq \frac{K}{R}$$

för stora R . Detta ger att

$$|g(t)| \leq e^{-mR \sin t} \frac{K}{R} R = K e^{-mR \sin t} .$$

Så

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz \right| \leq K \int_0^\pi e^{-mR \sin t} dt .$$

Man kan visa att, och jag uppmanar er att göra det,

$$\int_0^\pi e^{-mR \sin t} dt < \frac{\pi}{mR} .$$

Då får vi att

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz \right| \leq K \frac{\pi}{mR} \rightarrow 0 ,$$

då $R \rightarrow \infty$.

□

Exempel 91. Vi ska beräkna P. V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$. Sätt

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z^3 e^{iz}}{(z + i)^2 (z - i)^2},$$

så har f poler i $\pm i$. Eftersom

$$\text{grad}((z^2 + 1)^2) \geq 1 + \text{grad}(z^3)$$

så kan vi använda oss av Jordans lemma, så

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = 0,$$

där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet. Eftersom i är den enda polen i övre halvplanet, så ger Cauchys residuesats att

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Im}(2\pi i \text{Res}(i)).$$

Om man beräknar residuen så får man $\text{Res}(i) = \frac{1}{4e}$, vilket betyder att

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{1}{4e} \right) = \frac{\pi}{2e}.$$

□

Exempel 92. För $a > 0$ låt oss beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Eftersom $\sin x$ är en udda funktion så kommer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx = 0.$$

Detta ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Låt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{e^{iz}}{(z + ia)^2 (z - ia)^2}.$$

Observera att enda polen f har i övre halvplanet är ia . Låt nu C_R vara en halvcirkel kring origo i övre halvplanet med radie R , och låt l_R vara linjesegmentet

från $-R$ till R . Slutligen låt $\gamma = C_R + l_R$, så γ är en sluten kurva som innehåller polen ia . Nu ger Cauchys Residuesats att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ia).$$

Vidare så ser vi att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{l_R} f(z) dz.$$

Men eftersom graden till polynomet i nämnaren i f är större än 1 plus graden av polynomet i täljaren så ger Jordans lemma i boken att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Vidare så ser vi att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{l_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx,$$

så vi behöver bara beräkna residuen för f enligt ovan. Vi ser att polen ia är av ordning 2, så

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} (z - ia)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z + ia)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{ie^{iz}(z + ia)^2 - 2(z + ia)e^{iz}}{(z + ia)^4} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{ie^{iz}(z + ia) - 2e^{iz}}{(z + ia)^3} = \\ &= \frac{-2ae^{-a} - 2e^{-a}}{-i8a^3} = \frac{e^{-a}(a + 1)}{i4a^3}. \end{aligned}$$

Lägger vi ihop allting så får vi att

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ia) = 2\pi i \frac{e^{-a}(a + 1)}{i4a^3} = \\ &= \frac{\pi(a + 1)}{2a^3 e^a}. \end{aligned}$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 83. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(3x)}{x^4 + 4} dx.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 84. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x - 3i} dx.$$

Integraler med singulariteter på reella axeln

Detta avsnitt handlar om hur man beräknar integraler med singulariteter på den reella axeln. Det man gör är att man lägger en halvcirkel med godtyckligt liten radie runt singulariteten och därefter så använder man Cauchys residuesats. För att beräkna integralen längs denna halvcirkel, eller någon cirkelbåge, kring en singularitet använder man följande lemma:

Lemma 9.3. Om f har en enkel pol i $z = c$ och T_r är en cirkelbåge kring c definierad genom $c + re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, då gäller att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, c).$$

Bevisidé. Eftersom f har en enkel pol så har den en Laurentserie på formen

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k$$

in någon punkterad omgivning till c , säg $0 < |z - c| < R$. För $0 < r < R$ så är

$$\int_{T_r} f(z) dz = a_{-1} \int_{T_r} \frac{dz}{z - c} + \int_{T_r} g(z) dz,$$

där

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - c)^k.$$

Då är g holomorf i en omgivning till c och det finns ett M så att

$$|g(z)| \leq M$$

för $|z - c| < R_1$. Så för $0 < r < R_1$ så har vi

$$\left| \int_{T_r} g(z) dz \right| \leq M(\theta_2 - \theta_1)r \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow 0^+$. Använder vi nu parametriseringen av T_r så får vi att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, c).$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 85. Fyll i detaljerna i beviset av lemmat ovan, dvs skriv ner hela beviset i detalj.

Dessa metoder lär man sig lättast om man räknar lite. Därför ger jag ett exempel.

Exempel 93. Låt oss beräkna $I = \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x+1} dx$. Vi har att Jordans lemma ger oss

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = 0.$$

Vidare så ger lemmat från detta avsnitt att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = -\pi i \text{Res}(-1),$$

där S_r är en halvcirkel kring singulariteten $z = -1$. Eftersom

$$\text{Res}(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{e^{2iz}}{z+1} = e^{-2i}$$

så får vi att

$$I = \pi i e^{-2i}.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 86. Beräkna

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 87. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Integraler av ”flervärda” funktioner

Även i detta avsnitt så beräknar vi integraler, fast nu är integranden en ”flervärd” funktion. Jag tycker att ni ska gå igenom detta avsnitt och räkna några uppgifter. Jag kommer här bara gå igenom några exempel så jag hoppas det är tillräckligt.

Exempel 94. Vi ska beräkna $\int_0^\infty \frac{\ln(px)}{q^2+x^2} dx$ för $p, q > 0$. Sätt $g(z) = \frac{\text{Log}(pz)}{q^2+z^2}$. Då gäller att $\text{Re}(\text{Log}(z)) = \ln|z|$. Då är $\text{Log}(z)$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Observera att g har en enkel pol i iq . Då är

$$\text{Res}(g, iq) = \frac{\ln(pq)}{2qi} + \frac{\pi}{4q}.$$

Observera att vi inte behöver något belopp på pq då vi tar den naturliga logaritmen, eftersom både p och q är icke-negativa. Låt $0 < r < q < R$ och låt S_r vara en halvcirkel kring origo med godtyckligt liten radie r i övre halvplanet, och låt C_R vara en halvcirkel kring origo med stor radie R . Låt $\gamma = C_R + [-R, r] + S_r + [r, R]$. Då ger Cauchys residuesats att

$$\int_\gamma g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, iq) = \frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q}.$$

Vi har att

$$\int_r^R g = \int_r^R \frac{\log(pz)}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot $\int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2+z^2} dz$ då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Vidare har vi att

$$\int_{-R}^{-r} g = \int_{-R}^{-r} \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz = \int_R^r \frac{\text{Log}(-pz)}{q^2 + (-z)^2} (-dz) = \int_r^R \frac{\text{Log}(pz) + \pi i}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$.

Vi gör nu ett variabelbyte, som ger att

$$\left| \int_{C_R} g \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\text{Log}(Re^{i\theta})}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\ln|R| + i\theta}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - q^2} \pi R \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$. Jag lämnar åt er att visa att $\left| \int_{S_r} g \right| \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0^+$. Detta ger att

$$\int_\gamma g \rightarrow \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Så vi får att

$$\frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q} = 2 \int_0^\infty \frac{\text{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + z^2} dz.$$

Om vi jämför real och imaginärdel så får vi att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(px)}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi \ln(pq)}{2q}$$

och

$$\int_0^\infty \frac{1}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2q}.$$

□

Exempel 95. Vi ska beräkna

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{1+x^2} dx.$$

Låt $f(z) = \frac{z^{2/3}}{1+z^2}$. Välj grenen för $z^{2/3}$ att vara den positiva real-axeln. Vi ska nu bilda en sluten kurva γ som innehåller f 's enkla poler $\pm i$. Låt γ_1 vara linjestycket från r till R , där $0 < r < 1 < R$, på ovensidan av realaxeln, dvs $\gamma_1(t) = t$ där $r \leq t \leq R$. Vidare låt C_R vara cirkeln med radie R som är orienterad moturs och slutar på undersidan av real-axeln. Därefter låter vi γ_2 vara linjestycket på undersidan av real-axeln från R till r (dvs $\gamma_2(t) = te^{2\pi i}$ för $R \leq t \leq r$), och slutligen låt C_r vara den medurs orienterade cirkeln med radie r (här är det förstås inte någon cirkel utan en cirkelformad kurva som C_R). För stora R så kommer $\gamma = \gamma_1 + C_R + \gamma_2 + C_r$ innehålla polerna $\pm i$. Vi vill använda Cauchys Residuesats, och eftersom polerna ligger innanför γ så beräknar vi residuerna i dessa punkter. Vi får att

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{2/3}}{z+i} = \frac{i^{2/3}}{2i} = \frac{e^{\pi i/3}}{2i}$$

och

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^{2/3}}{z-i} = \frac{(-i)^{2/3}}{-2i} = -\frac{e^{\pi i}}{2i} = \frac{1}{2i}$$

Cauchys Residuesats ger nu att

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi i/3}}{2i} + \frac{1}{2i} \right) = \pi(e^{\pi i/3} + 1).$$

Vi börjar med att observera att

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt \rightarrow \int_0^\infty \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt$$

då $r \rightarrow 0$ och $R \rightarrow \infty$. Vidare så observerar vi att

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_R^r \frac{(te^{2\pi i})^{2/3}}{(te^{2\pi i})^2+1} e^{2\pi i} dt \rightarrow -e^{4\pi i/3} \int_0^\infty \frac{t^{2/3}}{t^2+1} dt$$

då $r \rightarrow 0$ och $R \rightarrow \infty$.

Vi vill alltså uppskatta $\left| \int_{C_r} f \right|$ och $\left| \int_{C_R} f \right|$. Vi börjar på C_R : Eftersom $|z^2+1| \geq |z|^2 - 1$ så är

$$\left| \frac{z^{2/3}}{z^2+1} \right| \leq \frac{|z|^{2/3}}{|z|^2-1} = \frac{R^{2/3}}{R^2-1},$$

på C_R . Detta ger, eftersom $l(C_R) = 2\pi R$, att

$$\left| \int_{C_R} f(z) \right| \leq \frac{R^{2/3} 2\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$.

På C_r så har vi att

$$\left| \frac{z^{2/3}}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{|z|^{2/3}}{1 - |z|^2} = \frac{r^{2/3}}{1 - r^2},$$

pga att $|z^2 + 1| \geq 1 - |z|^2$. Detta ger att

$$\left| \int_{C_r} f(z) \right| \leq \frac{r^{2/3} 2\pi r}{1 - r^2} \rightarrow 0$$

då $r \rightarrow 0$.

Alla uträkningar ovan ger att

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = (1 - e^{4\pi i/3}) \int_0^{\infty} \frac{t^{2/3}}{t^2 + 1} dt.$$

Enligt Cauchys Residuesats så får vi att

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2/3}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi(e^{\pi i/3} + 1)}{1 - e^{4\pi i/3}} = \pi.$$

□

INLÄMNINGSUPPGIFT 88. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/e}(x+1)^2}.$$

INLÄMNINGSUPPGIFT 89. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/3}}{t^2 + 1} dt.$$

Argumentprincipen och Rouches sats

Meromorfa funktioner är holomorfa funktioner med poler. Med dessa så kan vi med hjälp av nollställen och poler beräkna en viss typ av integraler. Mer precist har vi:

Sats 9.4. (Argumentprincipen)

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en meromorf funktion, där Ω är ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{C}$. Låt γ vara en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva. Antag att f saknar poler och nollställen på γ . Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f),$$

där $N_p(f)$ är summan av ordningen av poler innanför γ och $N_0(f)$ är summan av ordningen av nollställena innanför γ .

Bevis. Se boken. □

Denna sats ska vi använda till att visa Rouches sats som uttalar sig om nollställen för funktioner.

Sats 9.5. (Rouches sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att

$$|f(z)| < |g(z)|$$

på en enkel, sluten styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva γ i Ω . Då måste f och g ha samma antal nollställen innanför γ (räknat med multiplicitet).

Bevis. Säg att $g = f + h$, där $|h| < |f|$ på γ . Detta ger att $f \neq 0$ på γ . Betrakta homotopin $F_t(z) = F(t, z) = f(z) + th(z)$, $0 \leq t \leq 1$, som överför f till g . På γ har vi att

$$|F_t| \geq |f| - t|h| \geq |f| - |h| > 0.$$

Låt $N(t)$ vara antalet nollställen till F_t i det inre av γ . Då ger argumentprincipen att

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F'_t(z)}{F_t(z)} dz.$$

Eftersom N är definierad av en integral av en kontinuerlig funktion, så måste N vara kontinuerlig. Vidare så antar N bara heltalsvärden (den räknar ju antal!). Därför måste $N(0) = N(1)$ vilket betyder att antalet nollställen hos $F_0 = f$ är samma som antalet nollställen hos $F_1 = g$. □

Rouches sats säger att vi kan göra "små" holomorfa störningar och även ha lika många nollställen.

Exempel 96. Vi ska undersöka hur många nollställen $f(z) = z^3 + 2 + e^{-z}$ har i det högra halvplanet. Låt $g(z) = z^3 + 2$ och $h(z) = e^{-z}$. Då är $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Låt γ vara den slutna kurva som går i en halvcirkel C_R från iR till $-iR$ och därefter linjen l_R från iR till $-iR$. Då gäller att

$$|g(z)| = |z^3 + 2| \geq |z|^3 - 2 = R^3 - 2$$

då $R^3 > 2$ på C_R , och

$$|h(z)| = |e^{-z}| = \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z}} \leq 1$$

på C_R . På linjen l_R så gäller att

$$|g(iy)| = |(iy)^3 + 2| = \sqrt{y^6 + 4} \geq 2$$

och

$$|h(iy)| = |e^{-iy}| = 1.$$

Alltså är $|g(z)| > |h(z)|$ på γ .

Vi kollar nu på hur många nollställen g har innanför γ . Löser vi $g(z) = 0$ så ser vi att den har 2 stycken nollställen innanför γ om $R > 2^{1/3}$. Då ger Rouches sats att g och f har samma antal nollställen innanför γ . Eftersom $R > 2^{1/3}$ är godtycklig så följer det att f har två nollställen i högra halvplanet. $\square$

Exempel 97. Betrakta $p(z) = z^3 + 3z - 1$. Vi påstår att p har alla sina nollställen i $B(0, 2)$. Vi ser att p har exakt tre nollställen enligt algebrans fundamentalsats. Låt $r(z) = z^3$ som har alla sina nollställen i origo, så speciellt i $B(0, 2)$. På $\partial B(0, 2)$ så är $|r(z)| = 8$. Vidare så är $q(z) = 3z - 1$ en liten störning av $r(z)$. På $\partial B(0, 2)$ så är

$$|q(z)| = |3z - 1| \leq 3 \cdot 2 + 1 < |r(z)|.$$

Rouches sats ger att r och p har lika många nollställen i $B(0, 2)$. $\square$

Exempel 98. Låt $f \in \mathcal{O}(B(0, 1 + \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Antag att $f(0) = 3$ och att $|f(z)| > 7$ då $|z| = 1$. Vi påstår att f har ett nollställe i $B(0, 1)$. Låt $h(z) = -3$. Vi har att $|f(z)| > |h(z)|$ på $\partial B(0, 1)$ så har f och $g = f + h$ lika många nollställen i $B(0, 1)$. Men $g(0) = f(0) + h(0) = 0$ så f måste ha ett nollställe i $B(0, 1)$. $\square$

INLÄMNINGSUPPGIFT 90. Bestäm antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $f(z) = z^4 + 4z^3 - 4z^2 - 4z - 5$.

INLÄMNINGSUPPGIFT 91. Bestäm antalet nollställen i högra halvplanet till funktionen $f(z) = 2 - 2z^2 + z^4 + e^{-z}$.

Rouches sats ger i sin tur följande sats

Sats 9.6. (Öppna avbildningssatsen)

En holomorf, icke-konstant funktion är öppen, dvs bilden av öppna mängder är öppna.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, där Ω är ett område i $\mathbb{C}$. Tag $V \subset \Omega$ öppen. Vi ska visa att $f(V)$ är öppen. Eftersom V är öppen så finns det en boll $\overline{B(a, r)} \subset V$ där $a \in V$. Enligt identitetssatsen så finns det ett r så att $B(a, r)$ är en sådan boll, och så att om vi definierar

$$m = \inf\{|f(z) - f(a)| : z \in \partial B(a, r)\}$$

så är $m > 0$. Detta är inget annat än avståndet från $f(a)$ till $f(\partial B(a, r))$. Tag en $w \in B(f(a), m)$ och sätt $g(z) = f(z) - w$. Vi ska nu använda Rouches sats:

Sätt $g_0(z) = f(z) - f(a)$. Denna har minst ett nollställe i $B(a, r)$. Sätt $g_1(z) = f(a) - w$ som då är konstant. För $z \in \partial B(a, r)$ är nu

$$|g_0(z)| = |f(z) - f(a)| \geq m > |f(a) - w| = |g_1(z)|$$

och därför har $g_0 + g_1 = g$ samma antal nollställen i $B(a, r)$ som g_0 , dvs minst 1. Vad betyder nu detta? Jo, för vårt godtyckliga val av $w \in B(f(a), m)$ så finns ett $z_0 \in B(a, r)$ så att $0 = g(z_0) = f(z_0) - w$, så $f(z_0) = w$. Därför är $B(f(a), m) \subset f(B(a, r)) \subset f(V)$, så $f(V)$ innehåller en boll, så $f(V)$ är öppen. $\square$

Följd 9.7. Låt f vara en holomorf avbildning definierad på ett område Ω . Då är $f(\Omega)$ ett område.

INLÄMNINGSUPPGIFT 92. Använd öppna avbildningssatsen för att visa maximumprincipen.

Slutligen så kan ni läsa avsnittet om serier själva.