

Inlämningsuppgift 1

i

Komplex Analys C

1. Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$\langle z, w \rangle = z\bar{w}.$$

Visa att

- (a) $\langle \alpha z + \beta v, w \rangle = \alpha \langle z, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (b) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$.
- (c) $\langle z, z \rangle \geq 0$.
- (d) (a) och (b) ger att $\langle z, \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle z, v \rangle + \bar{\beta} \langle z, w \rangle$ för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ brukar kallas för en skalärprodukt.

2. Låt $\| \cdot \|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$\|z\| = \langle z, z \rangle^{1/2}$$

där $\langle \cdot, \cdot \rangle$ är skalärprodukten från uppgift 1.

- (a) Visa att $\|z\| = 0$ om och endast om $z = 0$.
- (b) Visa att $\|\alpha z\| = |\alpha| \|z\|$ för alla $z, \alpha \in \mathbb{C}$.
- (c) Visa att $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$ (**Triangelolikheten**).
- (d) Om $z_n \rightarrow z$ och $w_n \rightarrow w$, visa då att $\langle z_n, w_n \rangle \rightarrow \langle z, w \rangle$ (**Kontinuitet hos $\langle \cdot, \cdot \rangle$**).
- (e) Visa att $\|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|w\|^2)$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. Tolka vad detta betyder geometriskt. Rita en bild!
- (f) Vi säger att z och w är ortogonala om $\langle z, w \rangle = 0$, och skriver $z \perp w$. Om $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ och $z_j \perp z_k$ för $j \neq k$, visa då att

$$\left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|z_j\|^2 \quad (\text{Pythagoras sats}).$$

(*Ledning: Vad händer då $n > 2$*)

3. Låt $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ och $f: S^1 \rightarrow [-2, 2]$ vara definierad genom

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

- (a) Är f injektiv och/eller surjektiv?
(b) Låt $A = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Är $f|_A$ injektiv och/eller surjektiv.
(c) Låt $B = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Är $f|_B$ injektiv och/eller surjektiv.
(d) Låt $C = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Är $f|_C$ injektiv och/eller surjektiv.
4. Visa att $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ och $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
5. Låt $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Definiera

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Visa att om $p(w) = 0$ så är $p(\bar{w}) = 0$.

6. Lös ekvationen $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.
7. Visa att om S och T är områden som har åtminstone en punkt gemensam, då är $S \cup T$ ett område.
8. Låt p och q vara två distinkta punkter på Riemannsfären, och låt π vara den stereografiska projektionen. Visa att planet genom p, q och origo skär Riemannsfären i en så kallad storcirkel, dvs en cirkel med diameter 2. Vidare, visa att denna storcirkel korresponderar mot en *unik* cirkel (eller linje) i planet som går genom

$$\pi(p), \pi(q) \text{ och } -\frac{1}{\pi(p)}.$$

9. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = az + b$ där $a, b \in \mathbb{C}$. Visa att f kan uttryckas som en komposition av en skalning, rotation och en translation. Visa, därefter, att varje funktion på denna form avbildar linjer på linjer och cirklar på cirklar.

(Ledning: Varje skalning är på formen $S(z) = \rho z$, där $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, och varje rotation är på formen $R(z) = e^{i\theta} z$ för något $\theta \in \mathbb{R}$ och varje translation kan man skriva som $T(z) = z + c$ där $c \in \mathbb{C}$.)

10. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen. Antag att $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ är en funktion som är kontinuerlig. Visa att \bar{f} , $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ och $|f|$ är kontinuerlig.