Inlämningsuppgift 2
i
Komplex Analys C

1. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och $U^* = \{z : \overline{z} \in U\}$. Antag att $f \in \mathcal{O}(U)$ och definiera g på U^* genom $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Visa att g är holomorf på U^*.

2. Antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω ett område i $\mathbb{C}$. Antag vidare att $|f(z)|$ är konstant på Ω. Visa att f är konstant på Ω.

3. *a*) Låt $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ och definiera funktionen

$$u(x, y) = x^2 + ax + by^2 + cy + dxy.$$

Bestäm de reella konstanterna a, b, c och d och en holomorf funktion $f(z)$ så att

$$u = \mathrm{Re}(f),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 0,\ f(0) = 1 \text{ och } \mathrm{u}(1, 1) = -2.$$

Uttryck $f(z)$ explicit i $z \in \mathbb{C}$.

b) Är f entydigt bestämd?

4. Finn det mest generella harmoniska polynom på formen $ax^2 + bxy + cy^2$, dvs hitta villkor på a, b, c så att $ax^2 + bxy + cy^2$ blir harmonisk.

5. *a*) Låt $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara komplexlinjär och låt $u = \mathrm{Re}\, f$. Visa att u är reell-linjär och att $f(z) = u(z) - iu(iz)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

b) Låt $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ vara reell-linjär och låt $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara definierad genom $f(z) = u(z) - iu(iz)$, Visa att f är komplexlinjär. Vidare, visa att $\sup_{\|z\|=1} \|u(z)\| = \sup_{\|z\|=1} \|f(z)\|$ för alla $z \in \mathbb{C}$, där $\|\cdot\|$ är avbildningen från första omgångens inlämningsuppgifter.