Inlämningsuppgift 4
i
Komplex Analys C

1. Låt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vara icke-konstant. Visa att för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ så finns det en punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ så att $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

2. Antag att $f\colon U \to \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion definierad på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva med $\gamma([a,b]) \subset U$. Då definierar vi **integralen** av f längs med γ genom

$$\int_\gamma f = \oint_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

där $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ är partitionen av $[a,b]$ från definitionen av en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Visa att denna defintion inte beror på val av parametrisering av γ, dvs om $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ är en strikt växande funktion och $\tau = \gamma \circ \varphi\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ är en annan parametrisering av γ så är

$$\int_\gamma f = \int_\tau f.$$

3. Visa att

   a) Om γ är cirkeln $|z| = 3$, så är

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^2 - i} \right| \leq \frac{3\pi}{4}.$$

   b) Om $\gamma = R + 2\pi i t$, $0 \leq t \leq 1$, $R > 0$, så är

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{3z}dz}{1 + e^z} \right| \leq \frac{2\pi e^{3R}}{e^R - 1}.$$

   c) Om $\gamma = it$, $0 \leq t \leq 1$, så är

$$\left| \int_\gamma e^{\sin z} dz \right| \leq 1.$$

4. Låt $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$ vara sådan att $|f'(z)| \leq M$ för alla $z \in B(0,1)$. Visa att

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$$

för alla $z_1, z_2 \in B(0,1)$.

5. Låt γ_0 och γ_1 vara enkla, slutna, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurvor som är homotopa med varje punkt i ett område Ω. Visa att γ_0 är homotop med γ_1.

6. Beräkna
$$\int_{|z+1|=1} \frac{z^3 + 2z^2 + iz^2 - z - 2iz + 2 - i}{z^3 - z^2 + z - 1} dz.$$

7. Låt γ vara en enkel, sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva så att z_0 inte ligger på γ. Visa att
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

8. Fixera $R > 0$. Låt f vara en hel funktion som uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för z på $|z| = R$. Visa att
$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq \frac{k!M}{(R - r)^k}$$
för $k = 0, 1, 2, \ldots$ och alla $0 \leq r < R$.