Läsanvisningar
till
kapitel 1.1 − 2.2

Jag tänkte bara kort berätta hur strukturen hos dessa läsanvisningar kommer vara innan vi kör gång på allvar. Jag kommer i dessa läsanvisningar säga vad jag anser är viktigt för kursen, samt försöka skapa lite mer förståelse för de olika begreppen i kursen. Läsanvisningarna kommer också ligga i grund för de föreläsningar som vi kommer ha på de olika momenten. Läsanvisningarna kommer även vara en del av eran kurslitteratur, och jag förväntar mig att ni läser dem noga och reflekterar över dess innehåll. Läsanvisningarna kommer att följa bokens linjer med vissa tillskott; lite flera satser, definitioner och några annorlunda bevis, satser och definitioner. De flesta av de tillskotten jag har valt att lägga till ger en modern syn på komplex analysen, och dessa kommer jag speciellt trycka på under kursens gång.

Låt oss nu börja:

1.1 Komplexa tals algebraiska struktur

Vi kommer hela tiden beteckna $\mathbb{R}$ som de reella talen, och $\mathbb{C}$ som de komplexa talen, som vi under kursens gång kommer lära känna lite bättre. Det första avsnittet i boken kommer vara, hoppas jag i alla fall, en ren repetition av de komplexa talens algebraiska struktur. Boken gillar representera komplexa tal genom den så kallade rektangulära formen, dvs på formen $x + yi$, och jag tycker att man ska se komplexa tal som en punkt i det komplexa talplanet. Det tåls att påpeka att den rektanguära formen är bara *ett* sätt att representera ett komplext tal. Ett annat sätt är den så kallade polära formen, som dyker upp i avsnitt 1.3 och 1.4, och ett tredje sätt är genom en matrisrepresentation: om $z = x + yi \in \mathbb{C}$, så kan vi representera z genom en 2×2 matris, nämligen

$$z = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Detta gör man genom att välja lämplig bas i $\mathbb{R}^2$. Varför blir detta ett komplext tal? Pröva att reda ut detta, genom att tillexempel multiplicera två stycken komplexa tal på denna form. Vad lärde vi oss av detta då? Jo, ett komplext tal är en punkt i planet som kan representeras på ett flertal sätt.

En intressant egenskap som de komplexa talen har, i jämförelse med de reella talen är följande:

Lemma 1.1. *Om $z \in \mathbb{C}$ så existerar det en $w \in \mathbb{C}$ så att $w^2 = z$.*

Beviset av detta lemma kan ni se som en lätt övning, ett tips är att ni låter $z = a + bi$ och $w = x + yi$ och helt enkelt löser ekvationen $w^2 = z$ för de reella talen x och y. Om ni räknar rätt så får ni ett ekvationssystem på följande form:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} .$$

Som ni alla vet så blir Lemma 1.1 svårt att lösa för de reella talen, för t.ex. så finns det inget reellt tal x så att $x^2 = -1$.

Det finns fler olikheter mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. Man kan nämligen inte prata om ett positivt eller negativt komplext tal, utan det är en egenskap som de reella talen har. Detta är en väldigt viktig del i förståelsen av de komplexa talen, och jag rekomenderar att ni försöker göra uppgift 1.1.30 i boken som utreder detta faktum.

Jag ska bara kort nämna real och imaginärdelen av ett komplext tal, som jag egentligen bara gör för att påpeka någon egenskap hos dessa. Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så är realdelen respektive imaginärdelen till z

$$\operatorname{Re}(z) = a \ \ , \ \ \operatorname{Im}(z) = b \ ,$$

så $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$. Funktionerna Re och Im har en linjäritetsegenskap, nämligen

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \ \ , \ \ \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w).$$

Men de uppfyller däremot inte en multiplikativ egenskap:

$$\operatorname{Re}(zw) \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) \ \ , \ \ \operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w).$$

1.2 Punktrepresentationen av ett komplext tal

Detta avsnitt handlar egentligen om att man på enklaste vis kan identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$. Detta faktum borde inte förvåna er allt för mycket, eftersom man i elementära kurser brukar ha denna syn. Rent konkret så låter man, om $z = a + bi \in \mathbb{C}$, vara punkten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Men en punkt i $\mathbb{R}^2$ kan ju representeras som en vektor, så vi kan börja prata om vinklar, längder med mera. En längd av en vektor (a, b) i $\mathbb{R}^2$ ges, via Pythagoras sats, av $\sqrt{a^2 + b^2}$, så via våran identifikation med $\mathbb{C}$, så kan vi definiera **absolutbeloppet** av $z = a + bi$ genom

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Eftersom detta är längden av en vektor i $\mathbb{R}^2$, så är det bättre att se, precis som i det rella fallet, absolutbeloppet som avståndet från z till origo. På detta vis så är

$|z-w|$ helt enkelt avståndet från z till w. Jämför med det reella absloutbeloppet som definieras genom

$$|x| := \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} .$$

En väldigt viktig egenskap som det komplexa absolutbeloppet, som vi hädanefter bara kommer benämna med absolutbeloppet, har är att även den uppfyller den så kallade triangelolikheten:

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Denna har ni som uppgift att visa i uppgift 1.3.15. Försök att göra denna uppgift på två sätt; både geometriskt och med mer handfast räknande. Triangelolikheten kan generaliseras på följande sätt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Denna är dock inte lika lätt att visa. Slutligen ska jag nämna en annan egenskap hos absolutbeloppet:

$$z\overline{z} = |z|^2 ,$$

som trots sin enkelhet kan vara en väldigt användbar likhet. Här är $\overline{z}$, förstås, det komplexa konjugatet, dvs om $z = x + iy$ så är $\bar{z} = x - iy$.

1.3 Vektorer och polära former

Vi fortsätter med, genom detta avsnitt också, att betrakta $\mathbb{C}$ som $\mathbb{R}^2$. Man börjar nu allt mera se komplexa tal som vektorer, som element i $\mathbb{R}^2$. Detta gör man bitvis för att kunna definiera en vinkel mellan vektorn i fråga och realaxeln, dvs x-axeln. Denna vinkel kallas för **argumentet** för ett komplext tal. En väldigt viktig anmärkning är att argumentet *inte* ett tal utan en mängd, nämligen om $z \in \mathbb{C}$ så är

$$\arg(z) := \{\theta + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} ,$$

där $\mathbb{Z}$ är mängden av alla heltal, och θ är vinkeln mellan vektorn z och realaxeln.

Exempel 1. Om $z = 1 + i$ så är

$$\arg(z) = \{\frac{\pi}{4} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

och *inte*

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}.$$

Däremot så kommer $\frac{\pi}{4} \in \arg(z)$. □

Hoppas detta synsätt inte förvirrar alltför mycket. Låt oss förvirra lite mera: Om $z \in \mathbb{C}$ och om vi har beräknat mängden $\arg(z)$, så kan vi förstås välja att restringera denna mängd till ett halvöppet intervall istället, av längd t.ex 2π. Då man gör en sådan restriktion, så kommer det för alla $z \in \mathbb{C}$ finnas ett unikt θ så att $\arg(z) = \theta$. Ett val av ett sådant intervall, och observera att det verkligen är ett val man gör, brukar man kalla en **gren** av $\arg(z)$. Den speciella grenen $]-\pi, \pi]$ kallas för **principalgrenen** och då vi kollar på denna gren så brukar vi skriva $\arg(z)$ som $\operatorname{Arg}(z)$, där det versala A:et är viktigt. Då brukar vi kalla Arg för **principalargumentet**. Med detta synsättet i bakfickan så kan vi via en identifiering av $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$ ta oss fram till en vektorform för komplexa tal, dvs något som bestäms av en längd och en riktning. Denna representation kallas för **polär form** och skrivs som

$$z = x + yi = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) ,$$

där $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Observera att $\cos\theta + i\sin\theta$ är en enhetsvektor, så denna bestämmer bara riktningen på våran vektor z. Därefter skalar vi denna enhetsvektor med längden av z.

Slutligen vill jag bara påpeka att ni bör göra uppgift 1.3.13, som utreder några egenskaper hos Arg. Denna uppgift är med så att ni inte ska göra några enkla misstag när ni räknar med principalargumentet.

1.4 Den komplexa exponentialen

Den komplexa exponentialen introduceras i detta avsnitt, och i skillnad med reell analys så defnierar man *inte* den komplexa exponentialen genom att låta $e^z = w$ om och endast om $z = \log w$. Man utgår istället från vad man vill att den ska uppfylla, nämligen

(1) $e^z e^w = e^{z+w}$

(2) $\frac{de^z}{dz} = e^z$,

för alla $z, w \in \mathbb{C}$. Eftersom boken gör denna ”approach” så kan ni läsa om hur man går vidare från dessa två ekvationer där. I alla fall så kommer man fram till att det är bäst att definiera e^z genom

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y) ,$$

där $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Utifrån detta så ser man bland annat att $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Nu kanske ni reagerar, eftersom vi sa att ett komplext tal z är på polär form om $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, så vi kan skriva varje komplext tal z, förutsatt att det är noll förstås, som $z = |z|e^{i\theta}$, där $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Speciellt ger definitionen av den komplexa exponentialen att

$$|e^z| = |e^x e^{yi}| = |e^x||e^{yi}| = e^x ,$$

eftersom $e^x > 0$.

1.5 Exponenter och rötter

Exponenter och rötter är något som ni alla känner till från tidigare kurser. Kom ihåg att ekvationer på formen $z^k = 1$ ger upphov till jämnt fördelade lösningar på enhetscirkeln $|z| = 1$.

1.6 Topologi

Nu har vi kommit fram till ett avsnitt som är väldigt viktigt att få en bra känsla för. Vi kommer i detta avsnitt koncentrera oss på de mängder vi kommer att jobba med under så gott som hela kursen, nämligen öppna mängder. Topologiska begrepp som öppna, slutna och sammanhängande mängder känner ni flesta redan till från tidigare analyskurser, men jag tänkte göra en hyfsad genomgång ändå. Om ni inte visste det så är topologiska begrepp något som är viktigt inom analysen, eftersom de beskriver öppna mängder, och öppna mängder är något som de "flesta" definitioner och satser bygger på.

Så vad är en öppen mängd. Boken kör en något annorlunda definition av en öppen mängd, än vad jag kommer att göra. Jag kommer kort och gott säga att en mängd $U \subset \mathbb{C}$ är **öppen** om för varje $z \in U$ så innehåller U en öppen boll $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, där $r > 0$. Denna definition kräver dock att man vet den defintion som boken ger samt att man vet att bollen $B(z, r)$ är öppen. Att $B(z, r)$ är öppen kan ni visa i uppgift 1.6.1, så tills vidare så får ni helt enkelt köpa att $B(z, r)$ är öppen. Observera att denna boll är egentligen en disk, men jag säger oftast boll. Observera vidare att en öppen mängd i $\mathbb{R}$ är inte öppen i $\mathbb{C}$, eftersom alla öppna mängder i $\mathbb{R}$ är öppna intervall, och dessa innehåller ingen boll i $\mathbb{C}$. Vidare så säger vi att en mängd $S \subset \mathbb{C}$ är **sluten** om $S^c := \mathbb{C} \setminus S$ är en öppen mängd. Observera att denna definition är en övning i boken, nämligen uppgift 1.6.13.

En annan viktig topologisk egenskap är att vara både öppen och sammanhängande. Detta kallas ett **område** eller **domän**. En definition som ni säkert känner till är att en mängd $U \subset \mathbb{C}$ sägs vara **(topologiskt) sammanhängande** om det *inte* finns $A \subset U$ och $B \subset U$ öppna så att $A \cap B = \emptyset$ och $A \cup B = U$. Denna definition finns inte i boken, utan boken säger att en *öppen* mängd $U \subset \mathbb{C}$ är **(polygontågs)-sammanhängande** om det till varje par av punkter så finns det ett polygontåg helt i U som sammanbinder punkterna. Ett **polygontåg** är helt enkelt en följd av räta linjer med sammanbundna ändpunkter.

Anmärkning till definitionen av sammanhängande.
Polygontågsdefinitionen kräver *öppna* mängder medan i den andra så funkar det med vilken mängd som helst. □

Exempel 2. Ett typexempel på ett en mängd som är topologiskt sammanängande men inte polygontågs-sammanhängande är en halvcirkel. Denna är en sluten och topologiskt sammanhängande mängd, men vi kan inte förbinda två punkter på cirkelbågen med ett polygontåg. $\square$

Däremot så är dessa två sammanhängande-definitioner samma sak på öppna mängder:

Sats 1.2. *Låt U vara öppen i $\mathbb{C}$. Då är U polygontågs-sammanhängande om och endast om U är topologiskt sammanhängande.*

Bevis. Börja anta att U är polygontågs-sammanhängande. Antag vidare, för en motsägelse, att U inte är topologiskt sammanhängande. Då är $U = V \cup W$ där V, W är icke-tomma och öppna. Observera att V och W är slutna. Låt $z \in V$ och $w \in W$. Enligt antagande så finns det ett polygontåg mellan z och w. Låt detta polygontåg ges av en kurva $\gamma\colon [0,1] \to U$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$, dvs en kurva som börjar i z och slutar i w. Låt

$$T = \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in V\}.$$

Observera att $T \neq \emptyset$, eftersom $0 \in T$, och observera att T är begränsad av 1. Låt c vara den minsta övre begränsningen till T, dvs $c = \sup T$. Då är $c \neq 1$, och per definition av övre begränsning så finns det en följd $\{t_n\}$ med $c < t_n \leq 1$ så att $\gamma(t_n) \in W$ och $t_n \to c$. Kontinuitet ger att

$$\gamma(c) = \lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) \ ,$$

så eftersom W är sluten så följer det att $\gamma(c) \in W$.

På samma sätt så finns det en följd $\{s_n\}$ med $0 \leq s_n \leq c$ så att $s_n \to c$ och $\gamma(s_n) \in V$. Nu ger kontinuitet och slutenhet hos V att $\gamma(c) \in V$. Dessa båda följdargument ger vår motsägelse, så U är topologiskt sammanhängande.

Antag nu att U är topologiskt sammanhängande. Låt $z_0 \in U$, och låt

$$V = \{z \in U : z \sim z_0\} \ ,$$

där $\sim$ betyder att det finns ett polygontåg mellan z och z_0. Vi påstår att V är öppen, så låt oss visa detta:

Antag att det finns ett polygontåg från z_0 till z_1 i U. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z_1, r) \subset U$. Om $z \in B(z_1, r)$ så finns ett polygontåg, en rät linje i detta fall, från z till z_1. Alltså finns det en även ett polygontåg från z till z_0 via z_1, så V är verkligen öppen.

Vi påstår härnäst att V är sluten. Antag därför att $\{z_n\} \subset V$ är en följd och att $z_n \to z \in U$. Vi måste visa att $z \in V$. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z, r) \subset U$ kring z med radie r. För något n så kommer $z_n \in B(z, r)$. Då finns det en rät linje i $B(z, r)$ från z till z_n, för det fixerade n:et ovan. Alltså finns det ett polygontåg från z till z_0, så $z \in V$.

Vi har nu visat att V är både öppen och sluten, så $V = U$, vilket get att U är polygontågs-sammmanhängande. $\square$

Vi har nu kommit fram till bokens första ”riktiga” sats, som grovt säger att om $f\colon D \to \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett område, uppfyller att dess partiella derivator försvinner så måste f vara konstant. Dess bevis är ganksa lätt och bygger på att man kan byta ut räta linjer i polygontåg som varken är horisontella eller vertikala mot en kedja av små horisontella och vertikala linjer.

Slutligen så går boken igenom några fler topologiska begrepp:

Vi säger att en mängd $S \subset \mathbb{C}$ är **begränsad** om det finns en boll $B(z, r) \supset S$, där $z \in S$ och $r > 0$. Detta betyder alltså att för alla $z \in S$ så måste $|z| < r$.

Ibland vill man kolla på randen till en mängd, ganska ofta faktiskt. Vi säger att z är en **randpunkt** till $S \subset \mathbb{C}$ om varje boll kring z innehåller åtminstone en punkt i S och en punkt utanför S. Mängden av randpunkter till en mängd S skriver vi som ∂S.

1.7 Riemannsfären och den stereografiska projektionen

Den så kallade Riemannsfären är inget annat än det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med en extra punkt som vi har format en sfär av. Den punkten som vi lägger till är ∞, och denna punkt låter vi vara nordpolen på sfären. Vi identifierar denna sfär med enhetssfären, dvs den med radie 1, och det är enhetssfären som vi brukar kalla Riemannsfären. Vi kommer beteckna det utvidgade komplexa talplanet med $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. I $\mathbb{C}_\infty$ har vi följande räkneregler:

- $z + \infty = \infty$
- $z \cdot \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{z}{\infty} = 0$

Den stereografiska projektionen använder vi för att identifiera punkter på Riemannsfären med punkter i planet. Den fungerar på följande vis:

- Låt Riemannsfären stå med sydpolen i origo i $\mathbb{C}_\infty$.
- Tag en punkt p på Riemannsfären.
- Drag en rät linje genom nordpolen(N) och p.
- Den punkt som linjen skär $\mathbb{C}_\infty$ är värdet för den stereografiska projektionen.

Observera att nordpolen och $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ avbildas på varandra via den stereografiska projektionen.

Det första exemplet i detta avsnitt är väldigt viktigt, och beskriver den inversa stereografiska projektionen i koordinater. Här är en genomgång av exemplet:

Exempel 3. Låt $z = x + yi$. Identifiera $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$, så $z = (x, y)$. Eftersom Riemannsfären ligger i $\mathbb{R}^3$ så kan vi via en identifiering mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ uppfatta z som punkten $(x, y, 0)$. Linjen l genom $N = (0, 0, 1)$ och $z = (x, y, 0)$ ges då av, enligt en linjär algebra kurs,

$$(x_1, x_2, x_3) = l(t) = N + t\overrightarrow{Nz} = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) = (tx, ty, 1-t) \quad -\infty < t < \infty.$$

Eftersom sfärens ekvation ges av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ så skär linjen sfären precis då

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t + 1.$$

Denna ekvation är samma sak som

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0 \ ,$$

som har lösningarna $t = 0$ eller $t = \frac{2}{x^2+y^2+1} = \frac{2}{|z|^2+1}$. Om $t = 0$ så hamnar vi via linjen l i nordpolen $(0, 0, 1)$. Annars så får vi att

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1} \ , \ x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1} \ , \ x_3 = 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Detta bestämmer alltså en punkt på Riemannsfären om vi utgår från en punkt $z = x + yi$ i det komplexa talplanet. □

Exempel 4. Punkten $z = 1 + i$ korresponderar mot punkten

$$\left(\frac{2\operatorname{Re}(1+i)}{|1+i|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(i+1)}{|1+i|^2+1}, \frac{|1+i|^2-1}{|1+i|^2+1}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

på Riemannsfären. □

Om vi vill uttrycka den stereografiska projektionen i koordinater så kan vi använda exemplet ovan:

Exempel 5. Låt (x_1, x_2, x_3) vara en punkt på Riemannsfären. Då kan vi använda oss av en linje genom N och (x_1, x_2, x_3) ner till $\mathbb{C}$. Denna ges då av

$$x = \frac{x_1}{t} \ , \ y = \frac{x_2}{t} \ , \ t = 1 - x_3 \ ,$$

så

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3} \ , \ y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Detta ger en punkt $z = x + yi$ i $\mathbb{C}$. □

Exempel 6. Låt oss använda den stereografiska projektionen på punkten $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Vi får då enligt exemplet ovan att

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 \quad y = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 \ ,$$

så $z = 1 + i$ är bilden av den stereografiska projektionen. Jämför exempel 4. $\square$

Jobba nu igenom exempel 2 i boken, vilkens förståelse kommer vara viktigt för oss senare under kursen.

Efter detta så gör boken en utredning om avstånd på Riemannsfären. Försök att få en bra geometrisk bild av Riemannsfären och detta avstånd. Detta kommer inte vara ett avstånd på sfären, utan det Euklidiska avståndet i $\mathbb{R}^3$. Kan ni tänka ut vad det kortaste avståndet på sfären är, dvs om man transporteras på ytan. (*Ledning: Jämför uppgift* 1.7.3).

2.1 Funktioner i en komplex variabel

Nu är det dags att titta på funktioner $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Det första betraktelsesättet man går igenom är att man ännu en gång ser $\mathbb{C}$ som $\mathbb{R}^2$, dvs vi skriver ett komplext tal z på formen $x + yi$. På detta vis så kan vi dela upp våran funktion som

$$f(z) = f(x + yi) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \ ,$$

där u och v är reellvärda funktioner i två reella variabler. Observera att grafen till $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, som man brukar beteckna med $\Gamma(f)$, är ett 4-dimensionellt reellt vektorrum.

Anmärkning 1. Grafen definieras genom

$$\Gamma(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(z) = w\}.$$

$\square$

Exempel 7. Låt oss uttrycka funktionen $f(z) = e^{3z}$ på formen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. För att göra detta, låt $z = x + yi$. Då är

$$f(z) = f(x + yi) = f(x, y) = e^{3(x+yi)} = e^{3x}e^{3yi} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y) =$$

$$= e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y.$$

$\square$

Exempel 8. Låt $z = x+yi$ och betrakta funktionen $f(x, y) = x^2+y^2+y-2+ix$. Vi ska skriva f i termer av z och $\overline{z}$. För att göra detta så börjar vi att komma ihåg att

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

och

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Då får vi att

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right) - 2 + i\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right) = \cdots$$

$$\cdots = |z|^2 + i\overline{z} - 2\ ,$$

så $f(x,y) = f(z) = |z|^2 + i\overline{z} - 2$. $\square$

Detta exempel ger oss en väg från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{C}$, och det är ett mycket mer ”komplext” vis att skriva funktioner i termer av z och $\overline{z}$, dvs se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som en funktion i z och $\overline{z}$. Så genom transformationerna $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ och $y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ kan vi uppfatta funktioner i x och y som funktioner i z och $\overline{z}$, som då kommer ge samma information om funktionen i fråga. Eftersom vi håller på med komplex analys så tycker jag att det är bättre att få en komplex syn på det hela.

2.2 Kapitel 2.2 - Gränsvärden och kontinuitet

Detta avsnitt borde vara välkänt för alla. Det enda som skiljer det komplexa synsättet från det reella är att vi har en dimension extra. Låt oss repetera lite ändå.

Genom denna repetition kommer jag vara lite oprecis och lite slapp i beteckningarna. Vi säger att en följd $\{z_n\}$ **konvergerar** mot z, $z_n \to z$, om följden för eller senare ligger godtyckligt nära z, dvs om det finns en boll kring z med godtycklig liten radie så att ”svansen” på följden ligger helt i bollen. Konvergenta följder är begränsade, så speciellt om $z_n \to z$ så är

$$\lim_{w \to 0} |w||z_n - z| = 0.$$

Detta kan vara användbart i vissa tillfällen. Observera att $z_n = x_n + y_n i \to x + yi$ om och endast om $x_n \to x$ och $y_n \to y$ (se uppgift 2.2.3).

Kontinuitet för komplexa funktioner är en direkt generalisering av den reella kontinuiteten, så det borde inte vara något problem att följa boken.

Läsanvisningar
till
kapitel 2.3 – 2.5

2.3 Analytiska funktioner

Analytiska funktioner, eller holomorfa funktioner som vi kommer kalla dem, är de funktioner som vi komer studera så gott som resten av kursen. Boken kommer i början av detta avsnitt gå igenom vad för slags funktioner som är ”tillåtna”. Det är dessa funktioner som vi kommer kalla holomorfa. Det boken trycker på är att de tillåtna funktionerna är precis de som inte innehåller några $\overline{z}$. Vi ska nu gå ifrån boken och definiera holomorficitet på ett annorlunda vis, genom en rad av definitioner.

Definition 2.3. *Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f\colon U \to \mathbb{R}$ en funktion. Vi säger att f är en $\mathcal{C}^k$-**funktion**, $k \in \mathbb{N}$ fixt, om alla dess partiella derivator existerar och är kontinuerliga. Vi skriver detta som $f \in \mathcal{C}^k(U)$.*

Anmärkning 2. Vi definierar $\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(U)$, och säger att $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ är **slät** på U, eller bara $\mathcal{C}^\infty$ på U. □

Så hur gör man då för en funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, där $U \subset \mathbb{C}$ är öppen. jo, vi säger att $f \in \mathcal{C}^k(U)$ om $u, v \in \mathcal{C}^k(U)$, där $f = u + iv$.

Definition 2.4. *Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en $\mathcal{C}^1$-funktion och låt $z = x + yi$. Då definierar vi*

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f.$$

Anmärkning 3. Differentialoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ är båda komplexlinjära, dvs

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial}{\partial z} f + \beta\frac{\partial}{\partial z} g$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ och $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$. □

Nu kanske ni tycker det känns konstigt med ett minustecken på $\frac{\partial}{\partial z}$ och inget minustecken på $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, men denna definition kommer egentligen från följande:

Jo, man vill att $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ ska uppfylla att

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 \ , \quad \frac{\partial}{\partial z} \overline{z} = 0$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{z} = 1$$

så man definierar differentialoperatorerna så att dessa ekvationer blir uppfyllda.

Anmärkning 4. Ni har sett detta sätt att definiera saker tidigare, nämligen när vi definierade e^z. □

Det är dags att definiera holomorficitet, och eftersom man inte vill tillåta $\overline{z}$ så definierar man

Definition 2.5. *Låt $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen. Vi säger att f är* **holomorf** *om*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0.$$

Detta betecknar vi med $f \in \mathcal{O}(U)$.

Observation 1. Så ett sätt att se holomorficitet är att f ligger i kärnan till differentialoperatorn $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. □

Exempel 9. I de föregående läsanvisningarna så uttryckte vi funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$ som $f(z) = |z|^2 + i\overline{z} - 2$. Enligt definitionen för holomorficitet så är denna funktion inte holomorf. □

Vidare så säger vi att en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som är holomorf på hela $\mathbb{C}$ kallas **hel** (*eng. entire*), dvs $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

I boken så kan ni läsa att en funktion som är deriverbar i varje punkt är holomorf, och denna definition är förstås ekvivalent med våran definition av holomorficitet (försök gärna visa detta). Men vad är då derverbarhet? Jo, det är samma sak som i det reella fallet, men för fullständighetens skull, låt oss även ge denna definition:

Definition 2.6. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är öppen och att $f : U \to \mathbb{C}$ är en funktion. Om gränsvärdet*

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \qquad w \in U$$

existerar så säger vi att f är deriverbar i w. Detta skriver vi som $f'(w)$ eller $\left.\frac{df}{dz}\right|_w$.

Anmärkning 5. Blanda inte ihop $\frac{d}{dz}$ med $\frac{\partial}{\partial z}$. □

Observation 2. f' kan existera på U utan att $f \in \mathcal{C}^1(U)$. $\square$

Alla deriveringsregler fungerar som vanligt, dvs produktregeln och kvotregeln. Följande sats knyter samman holomorficitet och deriverbarhet. Det är en bra övning att försöka visa den.

Sats 2.7. *Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och $f\colon U \to \mathbb{C}$ en funktion. Då gäller*

(*a*) *Om $f \in \mathcal{O}(U)$ så existerar f' på U och $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ på U.*

(*b*) *Om $f \in \mathcal{C}^1(U)$ och f' existerar så är f holomorf på U.*

Detta betyder alltså speciellt att $\frac{d}{dz}$ och $\frac{\partial}{\partial z}$ är samma sak för funktioner som vi vet är holomorfa, t.ex. funktionen z.

Exempel 10. Låt $p(z) = az^n$. Låt oss visa att p är en hel funktion. För det första så ger binomialsatsen att p är en $\mathcal{C}^1$ funktion på hela $\mathbb{C}$. Vidare så har vi, enligt linjäritet, produktregeln och att z är holomorf, att

$$\frac{d}{d\bar{z}} z^n = 0.$$

Alltså p holomorf på hela $\mathbb{C}$. Gör detaljerna själva. $\square$

Låt oss avsluta med en liten diskussion om holomorfa funktioner. Vad är det som är så himla bra med dem, och vad skiljer dem från reellt deriverbara funktioner. Jo, holomorfa funktioner är oändligt många gånger deriverbara, medan en reell funktion som är deriverbar på en öppen mängd behöver inte vara två gånger deriverbar på samma öppna mängd. För holomorfa funktioner så är deriverbarhet och holomorficitet samma sak. Detta faktum kommer från att för att komplexa gränsvärden ska existera så måste man gå mot gränspunkten på väldigt många sätt, så deriverbarhet blir helt plötsligt något starkt.

2.4 Cauchy-Riemanns ekvationer

Cauchy-Riemanns ekvationer är både nödvändiga och tillräckliga villkor på att en funktion ska vara holomorf. Bokens bevis av detta är ganska knöligt, medan våran moderna ”approach” blir väldigt enkel.

Sats 2.8. *Antag att $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Antag även att $f = u + iv$. Då är $f \in \mathcal{O}(U)$ om och endast om*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

gäller i varje punkt i U.

Anmärkning 6. Ekvationerna ovan brukar kallas för **Cauchy-Riemanns ekvationer**. □

Bevis. Antag först att $f \in \mathcal{O}(U)$. Då gäller att

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) ,$$

dvs att $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Omvänt om Cauchy-Riemanns ekvationer håller på U, så betyder det att

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 ,$$

så $f \in \mathcal{O}(U)$. □

Följd 2.9. *Om $f : U \to \mathbb{C}$ är holomorf, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, så är*

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f = -i\frac{\partial}{\partial y} f.$$

Bevis. Eftersom f är holomorf så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f ,$$

dvs $\frac{\partial}{\partial x} f = -i\frac{\partial}{\partial y} f$. Vidare så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right) f$$

så $\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial x} f$. □

Vi ska nu visa satsen i boken som säger att om derivatan är identiskt noll för en funktion så är funktionen konstant. Bokens bevis bygger egentligen på en sats från den reella analysen, så vi har valt att bevisa satsen med mer komplexa metoder. Lägg märke till bevismetoden för satsens bevis, som är ofta vanlig; man visar en sak lokalt först (i en boll), och därefter använder man detta för att visa det generella resultatet.

Sats 2.10. *Antag att $f \in \mathcal{O}(D)$, där $D \subset \mathbb{C}$ är ett område, och att $f' \equiv 0$ på D, då är f konstant på D.*

Bevis. Låt $B(a, r)$ vara en boll kring $a \in D$ med radie r. Då ligger denna boll helt inne i D, eftersom D är öppen, och kom ihåg att en boll är sammanhängande. Tag nu en godtycklig punkt $b \in B(a, r)$. Om vi visar att $f(a) = f(b)$ så kommer detta betyda att f är konstant. Eftersom $B(a, r)$ är sammanhängande så kan vi hitta ett polygontåg mellan a och b, som bara består av vertikala och horisontella linjer, som ligger helt inne i $B(a,r)$. Om det finns en hörnpunkt, kalla denna c. Då är $c = a+h$ och $b = c+ik$ för några $h, k \in \mathbb{R}$. Vi kan anta att $h \geq 0$, eftersom annars är det bara att byta roll på a och c. Sätt

$$g(x) = f(a+x).$$

Detta är en funktion i en reell variabel och är definierad i en omgivning av $[0,h]$. För $x \in [0,h]$ betrakta

$$g'(x) = \lim_{y \to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = \lim_{y \to x} \frac{f(a+y)-f(a+x)}{y-x} = f'(a+x) = 0 \ ,$$

eftersom $f \in \mathcal{O}(B(a,r))$ och $f' \equiv 0$ på $B(a,r)$. Alltså är g konstant på $[0,h]$, eftersom g är reell. Detta ger att

$$f(c) = g(h) = g(0) = f(a).$$

På samma sätt så får vi att $f(b) = f(c)$ så $f(a) = f(b)$, vilket ger att f är konstant på $B(a,r)$.

Låt oss nu betrakta vårt område D. Fixera ett $a \in D$ och tag en godtycklig $b \in D$. Eftersom D är sammanhängande så kan vi hitta ett polygontåg γ mellan a och b. Välj nu, för varje $p \in \gamma$, en boll $B(p,r)$ som ligger helt inne i D. Detta är förstås möjligt eftersom D är öppen. Observera att alla dessa bollar kommer att täcka γ, och eftersom γ är kompakt så kan vi välja ut ett ändligt antal av dessa bollar. Enligt vårat lokala resultat för en boll så kommer f vara konstant på alla dessa bollar. Eftersom vi har ett ändligt antal bollar så kommer f vara konstant på hela γ. På grund av att b var godtyckligt vald, så drar vi slutsatsen att f är konstant på hela D. $\square$

Villkoret här, precis som i sats 1 i avsnitt 1.6, så är det viktigt med en sammanhängande mängd. För t.ex. om f är konstant 0 på en öppen mängd A och 1 på en annan öppen mängd B, och A och B är disjunkta, så är $f' \equiv 0$ på $A \cup B$ men $f(a) \neq f(b)$ för alla $a \in A$ och $b \in B$.

2.5 Harmoniska funktioner

Harmoniska funktioner är de som ligger i kärnan till Laplaceoperatorn

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mer precist, om $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ett område, så säger vi att f är **harmonisk** om

$$\Delta f = 0.$$

på D. Laplaceoperatorn kan komplext uttryckas genom

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}.$$

Visa gärna detta faktum som en övning.

Vi har följande förhållande mellan holomorfa och harmoniska funktioner:

Sats 2.11. *Låt $D \subset \mathbb{C}$ vara ett område och $f\colon D \to \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på D. Skriv $f = u + iv$, då är u och v harmoniska på D.*

Beviset är en direkt konsekvens av Cauchy-Riemanns ekvationer och ni bör försöka bevisa denna sats innan ni tittar i boken.

Men hur är det med omvändningen till denna sats. Om vi har en harmonisk funktion u, kan vi då hitta en harmonisk funktion v så att $f = u + iv$ blir holomorf? Svaret är ja, och då kallar man v för harmoniska konjugatet till u. Låt oss förklara hur det går till:

- Vi utgår från att u är en harmonisk funktion.
- Vi vill hitta en harmonisk v så att $f = u + iv$ blir holomorf, så utifrån Cauchy-Riemanns ekvationer har vi att

  $$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

  som genom integrering bestämmer v plus en konstan C som beror på x, så $v(x, y) = p)x, y) + C(x)$. (Detta beror på vilken ekvation vi integrerar).
- Cauchy-Riemanns ekvationer ger nu att

  $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}\ ,$$

  som då bestämmer $C'(x)$, som i sin tur bestämmer $C(x)$.
- På detta sätt så har vi bestämt v så att $f = u + iv$ blir holomorf.

Exempel 11. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\mathrm{Re}(f) = u(x, y) = ax^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$ och $f(0) = i$, där $a \in \mathbb{R}$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6ax + 2 - 2x - 2 = 6ax - 12x.$$

Alltså är u harmonsik om och endast om $6ax - 12x = 0$, dvs om $a = 2$. Vi har alltså bestämt a så att u blir harmonisk.

För att bestämma ett harmoniskt konjugat till u betraktar vi Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy + 2y + 1 \end{cases} .$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2x$ så kan vi integrera med avseende på y, vilket ger att

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C(x) \ ,$$

där $C \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bara beror på x. Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy + 2y + C'(x) = 12xy + 2y + 1$$

enligt ekvationerna ovan. Alltså måste $C'(x) = 1$, så $C(x) = x + d$, för $d \in \mathbb{R}$. Detta ger att alla harmoniska konjugat till u ges av

$$v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d.$$

Alltså är de holomorfa funktioner som uppfyller $u = \mathrm{Re}(f)$:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i(6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + d).$$

Utifrån $f(0) = i$ så får vi att $d = 1$, och om vi uttrycker f i termer av z och $\overline{z}$ så får vi att $f(z) = 2z^3 + z^2 + iz + i$. Detta bekräftar att f verkligen är holomorf. $\square$

Läsanvisningar
till
kapitel 3.1 − 3.5

3.1 Polynom och rationella funktioner

I början av detta avsnittet så går boken igenom hur man faktoriserar polynom. Jag utgår från att ni vet hur man gör detta.

Låt nu $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ vara ett polynom av grad n. Vi kan då skriva om p i termer av $(z - w)$. Detta gör man genom att betrakta $p(\zeta + w)$ varvid man får att

$$p(\zeta + w) = d_0 + d_1\zeta + \cdots + d_n\zeta^n.$$

Substituera nu tillbaka till z, dvs $\zeta = z - w$, så får vi att

$$p(z) = d_0 + d_1(z - w) + \cdots + d_n(z - w)^n.$$

Det som kan vara lite krångligt, dvs kräver mycket uträkningar, är att hitta koefficienterna $d_0, \ldots, d_n$. Vore det inte bra om man kunde hitta dessa på något lättare sätt. Som tur är så finns det ett lätt sätt, nämligen att observera att

$$\begin{aligned}
&p(w) = d_0\\
&p'(w) = d_1\\
&p''(w) = 2d_2\\
&p^{(3)}(w) = 2 \cdot 3d_3\\
&\vdots\\
&p^{(n)}(w) = n!d_n
\end{aligned}$$

Detta bestämmer $d_0, \ldots, d_n$, så vi får att

$$p(z) = \frac{p(w)}{0!} + \frac{p'(w)}{1!}(z - w) + \cdots + \frac{p^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(w)}{k!}(z - w)^k.$$

Alltså får vi Taylorutvecklingen av p kring w.

Boken går därefter igenom partialbråksuppdelning av rationella funktioner. Detta borde vara redan känt för er sedan tidigare kurser, så jag undviker därför ämnet. Den viktiga delen är hur man ”lätt” kan beräkna de olika koeffcienterna i ansatsen, där man använder att grader på polynom minskar vid derivering. Låt oss kolla på ett enkelt exempel.

Exempel 12. Låt $f(z) = \frac{2z}{(z+i)(z+1)}$. Vi ska nu använda partialbråksuppdelning för att skriva f som summan av två termer. Vi gör ansatsen

$$f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z+1}.$$

Vi måste nu bestämma A och B. Vi har att

$$A = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{2z}{z+1} = \frac{-2i}{-i+1} = 1 - i$$

och

$$B = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{2z}{z+1} = \frac{-2}{-1+i} = 1 + i \ ,$$

så

$$f(z) = \frac{1-i}{z+i} + \frac{1+i}{z+1}.$$

□

3.2 Den komplexa exponentialen, trigonometriska och hyperboliska funktioner

En sak man bör observera, som ni säkert gjorde i uppgift 1.4.11, är att den komplexa exponentialen inte är injektiv, utan den är periodisk med $2\pi i$. Jämför detta faktum med den reella exponentialen, som faktiskt är injektiv. Denna periodicitet utnyttjar man nu för att definiera de komplexa trigonometriska funktionerna $\sin z$ och $\cos z$. Ni känner säkert igen definitionen av de komplexa trigonometriska funktionerna från Eulers formel, som uttalar sig om den reella motsvarigheten. Eftersom e^z är hel, så kommer $\sin z$ och $\cos z$ också vara hel, eftersom de är definierade utifrån e^z.

Exempel 13. Vi ska visa att $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Sätt $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Eftersom $\sin z$ och $\cos z$ är hel så är även $\sin^2 z$ och $\cos^2 z$ hel, vilket ger att $f(z)$ är hel. Derivering ger att

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \cos \sin z = 0 \ ,$$

så eftersom $\mathbb{C}$ är sammanhängande och öppen så betyder det att f är konstant. Eftersom $f(0) = 1$ så betyder det att $f(z) = 1$ för alla z. Alltså är $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. □

3.3 Logaritmfunktionen

Den komplexa logaritmen definierar vi som den inversa funktionen till den komplexa exponentialen, dvs

$$w = \log z \ \text{ om } \ z = e^w \quad z \neq 0.$$

Eftersom e^z är periodisk så kommer även logaritmen bygga på argumentet:

$$\log z := \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi n \ \ , \ n \in \mathbb{Z} \ ,$$

där ln är den reella logaritmen. Om vi nu väljer att restringera oss till en gren av argumentet, t.ex. principalgrenen, så kommer logaritmen självklart påverkas av detta. I detta fall så får vi

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

där det versala L:et är i analogi med A:et i $\operatorname{Arg} z$. Resten av avsnittet ger bara en massa egenskaper hos principal-logaritmen. Speciellt viktigt är att $\operatorname{Log} z$ är holomorf på $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. Vidare har vi att

Sats 3.12. *Varje gren av* $\log z$ *är holomorf.*

och

Sats 3.13. *Det finns ingen gren av* $\log z$ *i* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Låt oss nu diskutera bokens terminologi angående flervärda funktioner. Observera att en funktion per definition är envärd, men vad menar de då med en flervärd funktion. En funktion $f\colon M \to N$, där M, N är mängder, kallas **flervärd** om för alla $p \in M$ så är $f(p)$ en delmängd till N. Vi ser alltså $f\colon M \to N$ som en flervärd funktion om $f\colon M \to \mathcal{P}(N)$ där $\mathcal{P}(N)$ är potensmängden.

Nu när vi har koll på flervärda funktioner så är det dags att få koll på koll på grenar. Låt $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$, vara en flervärd funktion. En **gren** av f är en funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ som är kontinuerlig i Ω och så att för varje $z \in \Omega$ är $F(z) \in f(z)$. Alltså är en gren av en flervärd funktion et kontinuerligt val av funktionsvärden så att funktionsvärdet i en viss punkt är ett av den flervärda funktionens värden.

3.4 ”Washers, wedges and walls”

Detta avsnitt går ut på att använda att både $\operatorname{Log} z$ och $\operatorname{Arg} z$ är harmoniska, eller om vi tar någon annan gren av logaritmen eller argumentet, för att hitta harmoniska funktioner med förskrivna randvärden. Låt oss göra ett exempel.

Exempel 14. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1+i)| < 2\}$. Vi ska hitta en harmonisk funktion $\phi(x, y)$ på A så att $\phi = 0$ på $|z - (1+i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1+i)| = 2$.

Enligt föregående avsnitt så vet vi att $A \operatorname{Log}|z - (1+i)| + B$ är harmonisk. Enligt våra förskrivna randdata så måste vi ha att

$$A \operatorname{Log} 1 + B = 0 \ \text{ och } \ A \operatorname{Log} 2 + B = 10 \ ,$$

som ger att $B = 0$ och $A = \frac{10}{\mathrm{Log}\,2}$. Detta ger att funktionen

$$\phi(x, y) = \phi(z) = 10\frac{\mathrm{Log}\,|z - (1 + i)|}{\mathrm{Log}\,2}$$

är harmonisk så att $\phi = 0$ på $|z-(1+i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z-(1+i)| = 2$. □

I övrigt, lägg inte ned för mycket tid på detta avsnitt, utan se det som en tillämpning på grenar och harmoniska funktioner.

3.5 Komplexa potenser och inversa trigonometriska funktioner

Komplexa potenser är något som definieras via den komplexa exponentialen och den komplexa logaritmen. Detta betyder att man ibland måste välja rätt gren för att få holomorficitet. Detta kan vara svårt ibland så låt oss göra ett exempel.

Exempel 15. Vi ska bestämma den största öppna mängd Ω så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf. Per definition så ges Ω av de $z \in \mathbb{C}$ så att $1 - z^2 \notin] - \infty, 0]$, så vi ska börja kolla vilka z som uppfyller att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$. Sätt $z = x + yi$, då får vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2xyi.$$

För att $1 - z^2 \in] - \infty, 0]$ så måste $xy = 0$, vilket ger två fall:
Fall 1: $(x = 0)$
Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 + y^2 \geq 1.$$

Fall 2: $(y = 0)$
Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 \ ,$$

så $1 - x^2 = 0$ betyder att $|x| \geq 1$.

Om vi slår ihop fall 1 och 2 så får vi att den största mängden så att $(1-z^2)^{1/2}$ blir holomorf är

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |x| < 1 \ \text{ och/eller } \ y = 0\}.$$

□

Resten av avsnittet behandlar inverser till trigonometriska funktioner. Detta behöver ni bara läsa kursivt.

Läsanvisningar
till
kapitel 4.1 – 4.6

4.1 Konturer

Detta är ett avsnitt om kurvor och hur man parametriserar kurvor, som borde vara en repetition från lägre kurser. Låt oss gå igenom lite ändå.

Definition 4.14. *Låt* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *vara ett kompakt intervall. En* **kurva** *i* $\mathbb{C}$ *är en kontinuerlig funktion* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$.

Anmärkning 7. Att γ är kontinuerlig betyder att den är kontinuerlig på $]a, b[$. □

Om γ är en kurva på ett intervall $[a, b]$ så säger vi att γ är **sluten** om $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ett enkelt exempel på en sluten kurva är en cirkel. Vidare så säger vi att en kurva γ är **enkel** om

$$\gamma|_{[a,b[}$$

är injektiv. Ett exempel på en enkel kurva är alla kurvor som inte skär sig själv. Kurvor som skär sig själv kan inte vara enkel, eftersom man får problem med injektiviteten i skärningspunkten.

Definition 4.15. *En kurva* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *kallas en* $\mathcal{C}^1$**-kurva**, $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, *om* γ *är en kontinuerligt deriverbar funktion.*

Definition 4.16. *En kurva* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *kallas för en* **styckvis** $\mathcal{C}^1$**-kurva** *om det finns en ändlig partition*

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$$

så att för varje $j = 0, 1, \ldots, n-1$ *gäller att*

$$\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]} \in \mathcal{C}^1([a_j, a_{j+1}]).$$

Anmärkning 8. Det är detta boken kallar för en kontur. □

Om vi definierar summan av två kurvor $\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ och $\gamma_2\colon [b, c] \to \mathbb{C}$ genom

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \ t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & , \ t \in]b, c] \end{cases}$$

så ser vi att om $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva, så är

$$\gamma = \gamma|_{[a_0,a_1]} + \cdots + \gamma|_{[a_{n-1},a_n]}.$$

Kan man lägga ihop kurvor så kan man förstås dra ifrån kurvor, och en negativ kurva är inget annat än samma kurva fast åt motsatt håll, dvs om $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en kurva så definierar vi $(-\gamma)\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ genom

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$$

som genomlöper samma punkter fast i omvänd ordning.

Något som är viktigt men väldigt enkelt och intuitivt är Jordans kurvsats som ger oss en orientering av kurvor. Jordans kurvsats säger att en sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}$ delar planet i två områden, nämligen i det inre och det yttre. (Se bilden på sidan 159). Om det inre är till vänster då man rör sig längs en kurva så säger vi att kurvan är **positivt orienterad**, annars så är den **negativt orienterad**.

Slutligen så går boken igenom hur man mäter längden av en kurva, som borde inte vara förvånande för någon. Det är nämligen precis samma sak som ni har lärt er under tidigare analyskurser. Längden av en $\mathcal{C}^1$-kurva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ges av

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

En viktig egenskap hos längdfunktionen är att den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ. (Längdfunktionen är alltså invariant definierad!) Låt oss visa detta.

Proposition 4.17. *Låt $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ vara en parametrisering av en kurva, och låt $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ vara en strikt växande funktion så att $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$. Då är $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ en annan parametrisering av samma kurva som γ_1 och*

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2).$$

Bevis.

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_2'(t)|dt = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)|dt$$

enligt kedjeregeln. Eftersom φ är växande så är $\varphi'(t) > 0$, vilket ger att

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t)dt.$$

Gör nu variabelsubstitutionen $s = \varphi(t)$, så $ds = \varphi'(t)dt$. Då blir de nya integrationsgränserna $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$, så

$$l(\gamma_2) = \int_a^b |\gamma_1'(s)|ds = l(\gamma_1).$$

□

4.2 Konturintegraler

Integration definieras genom Riemannsummor, dvs via över- och undersummor. Detta är ni välbekannta med, så jag ska inte plåga er med det. Däremot så ska jag dra en annan definition av integral. Låt $f = u + iv$ vara en kontiunerlig funktion $[a, b] \to \mathbb{C}$, där u och v är kontinuerliga funktioner på $[a, b]$. Vi definierar **integralen** över $[a, b]$ genom

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Detta ligger i grund för definitionen av kurvintegraler:

Definition 4.18. *Antag att $f\colon U \to \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion definierad på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva med $\gamma([a, b]) \subset U$. Då definierar vi* **integralen** *av f längs med γ genom*

$$\int_\gamma f = \oint_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

där $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ är partitionen av $[a, b]$ från definitionen av en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva.

Anmärkning 9. Man använder ibland beteckningen $\oint$ för att säga att det är en kurvintegral. □

Denna defintion visar sig vara "vettig", eftersom den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ. Jag lämnar detta som en övningsuppgift (jämför Proposition 4.17).

Exempel 16. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Om i deriverar γ så får vi $\gamma'(t) = ie^{it}$. Då blir, enligt definition,

$$\oint_\gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

□

Nu till ett exempel som är väldigt viktigt, som speciellt kommer vara viktigt för oss senare.

Exempel 17. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$, så

$$\oint_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{(n+1)it}dt.$$

Vi får då två fall:
Fall 1: $(n \neq -1)$
Då är

$$\oint_\gamma z^n dz = i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1} \left(e^{(n+1)i2\pi} - e^0 \right) = 0.$$

Fall 2: $(n = -1)$
Då är

$$\oint_\gamma z^n dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Alltså är

$$\oint_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1. \end{cases} .$$

□

Om $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva, så definierar man att integralen över γ att vara samma sak som att integrera över de olika delarna och lägga ihop delresultaten, dvs

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Speciellt betyder detta att om vi vill beräkna integralen över en kurva γ som vi genomlöper n gånger, så blir

$$\int_{n\cdot\gamma} f = n \int_\gamma f \ ,$$

där $n \cdot \gamma$ är kurvan γ som genomlöps n gånger.

Anmärkning 10. Om vi vill beräkna $\oint_{(-\gamma)} f$ så är detta samma sak som att beräkna $-\oint_\gamma f$. □

Två olikheter som är användbara lite då och då är

$$\left| \int f dz \right| \leq \int |f| dz$$

och $|f(z)| \leq M$ för alla z så är $\int |f| dz \leq \int M$. Vi ska nu använda dessa olikheter för att visa följande välkända sats:

Sats 4.19. *Låt $f \colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en kontinuerlig funktion, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva på $[a, b]$. Antag att det existerar en konstant $M \geq 0$ så att $|f(z)| \leq M$ för alla z på γ. Då gäller*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Bevis.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \le$$

$$\le M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M \cdot l(\gamma)\ ,$$

så

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M \cdot l(\gamma).$$

□

Följd 4.20. *Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$ vara en kontinuerlig funktion på den öppna $U \subset \mathbb{C}$, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Då gäller*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \sup_{z\in\gamma(t)} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Exempel 18. Låt oss visa att $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \le \pi e$ då γ är övre halvan av enhetscirkeln. Vi ska använda oss av Sats 4.19. Vi börjar beräkna längden av γ:

$$l(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(t)|dt = \int_0^\pi |ie^{it}|dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

Därefter så måste vi hitta en övre gräns för $\frac{e^z}{z}$ på γ. z på γ kan skrivas som $z = e^{it} = \cos t + i\sin t$, så

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| = \left|\frac{e^{\cos t + i\sin t}}{e^{it}}\right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \le e\ ,$$

eftersom $0 \le \cos t \le 1$. Så om vi sätter $M = e$ så får vi att

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \le M \cdot l(\gamma) = \pi e.$$

□

4.3 Oberoende av väg

Detta avsnitt har två höjdpunkter. Den första är en så gott som integralkalkylens huvudsats och den andra säger att vi kan integrera en funktion över vilken väg som helst, om den bara har samma start och slutpunkt. Låt oss börja med den första.

Sats 4.21. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är en öppen mängd och att $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva så att $\gamma([a,b]) \subset U$. Om $f \in \mathcal{O}(U)$ så gäller att*

$$\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_z dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bevis. Det är tillräckligt att visa satsen för en del av kurvan γ, så vi antar att γ är en $\mathcal{C}^1$-kurva. Vi börjar med att observera att $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Låt $f \circ \gamma = u + iv$. Då ger kedjeregeln att

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Detta ger att

$$\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_z = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b u'(t)dt + i\int_a^b v'(t)dt =$$

$$= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = u(b) + iv(b) - (u(a) + i(v(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Låt oss kolla på ett lätt exempel på denna sats.

Exempel 19. Låt γ vara enhetscirkeln e^{it}, $0 \le t \le 2\pi$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$. Om $f(z) = \frac{z}{2}$ så är $f'(z) = z$. Låt oss kolla på höger respektive vänsterledet i satsen:

$$VL = \oint_\gamma f'(z)dz = \oint_\gamma zdz = \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = \frac{1}{2}[e^{2it}]_0^{2\pi} = 0.$$

$$HL = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i})^2 - \frac{1}{2}(e^0)^2 = 0\ ,$$

så $\oint_\gamma zdz = 0$, men det visste vi redan. □

Följd 4.22. *Antag att U är ett område i $\mathbb{C}$ och antag att $f \in \mathcal{O}(U)$ med $f'(z) \equiv 0$ på U. Då är f konstant på U.*

Bevis. Fizera $z_0 \in U$. För $z \in U$ så finns det en $\mathcal{C}^1$-kurva $\gamma\colon [0,1] \to U$ så att $\gamma(0) = z_0$ och $\gamma(1) = z$ (Varför?). Då ger föregående sats att

$$f(z_0) - f(z) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1)) = \oint_\gamma f'(z)dz = \oint_\gamma 0dz = 0\ ,$$

så $f(z_0) = f(z)$. Men eftersom z var godtycklig så är f konstant. □

Nu till nästa huvudresultat.

Sats 4.23. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är ett område och f är kontinuerlig på U. Då är följande ekvivalent*

1. *f har en primitiv funktion i U*

2. *$\oint_\gamma f(z)dz = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i U.*

3. *$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor med samma start- och ändpunkt.*

Om ni kommer ihåg satsen om konservativa vektorfält från någon flervariabelkurs så är den analog med satsen ovan, den säger nämligen

Sats 4.24. *Antag att $U \subset \mathbb{R}^n$ är ett område och F är ett kontinuerligt vektorfält på U. Då är följande ekvivalent*

1. *F är konservativ på U*

2. *$\oint_\gamma F \cdot dr = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i U.*

3. *$\oint_{\gamma_1} F \cdot dr = \oint_{\gamma_2} F \cdot dr$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor med samma start- och ändpunkt.*

Denna sats om konservativa vektorfält ingår förstås inte i kursen, utan jag tyckte det vore kul att analogin bara. En sak som man bör observera är att Sats 4.23 gäller för kontinuerliga funktioner, så den gäller speciellt för holomorfa funktioner.

4.4 Cauchys integralsats

Vi ska i detta avsnitt jobba med något som kallas ett enkelt sammanhängande område, som är så gott som en mängd *utan* hål. För dessa områden så gäller Cauchys integralsats, som säger att integralen av holomorfa funktioner över, enkla, slutna $\mathcal{C}^1$-kurvor är noll. Låt oss jobba oss fram till denna viktiga sats inom komplexanalysen.

Definition 4.25. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $\gamma_0 \colon [0,1] \to \Omega$ och $\gamma_1 \colon [0,1] \to \Omega$ vara kurvor. Antag att $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ och $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$. Vi säger att γ_0 och γ_1 är* **homotopa** *i Ω om det finns en kontinuerlig funktion $H \colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ så att*

1. *$H(0,t) = \gamma_0(t)$*

2. *$H(1,t) = \gamma_1(t)$*

3. *$H(s,0) = p$*

4. *$H(s,1) = q$*

för alla $s, t \in [0,1]$. Funktionen H kallas för en **homotopi** *av γ_0 och γ_1.*

En homotopi är helt enkelt en kontinuelig deformering av γ_0 till γ_1, dvs kurvan γ_0 deformeras på ett "bra" sätt till kurvan γ_1.

Definition 4.26. *Ett område $\Omega \subset \mathbb{C}$ där varje sluten kurva är homotop med en punkt kallas ett* **enkelt sammanhängande område***.*

För att ni ska få en känsla för dessa nya områden så rekommenderar jag att ni gör följande viktiga övning: Försök rita exempel på öppna mängder som är

- sammanhängande men inte enkelt sammanhängande
- enkelt sammanhängande men inte sammanhängande
- både enkelt sammanhängande och sammanhängande
- varken sammanhängande eller enkelt sammanhängande

Nu undrar ni säkert vad som är så bra med homotopa kurvor. Svaret på denna fråga är att integralen över homotopa kurvor blir samma sak:

Sats 4.27. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område och γ_0, γ_1 vara slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor som är homotopa i Ω. Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ så är*

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Bevis. Länka samman kurvorna γ_0 och γ_1 med en enkel $\mathcal{C}^1$-kurva γ. Då är kurvan $\widetilde{\gamma} = \gamma_0 + \gamma - \gamma_1 - \gamma$ en sluten, enkel, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. (Rita en bild!). Eftersom f är holomorf så har f en primitiv funktion på Ω, så

$$0 = \oint_{\widetilde{\gamma}} f = \oint_{\gamma_0} f + \oint_{\gamma} f - \oint_{\gamma_1} f - \oint_{\gamma} f = \oint_{\gamma_0} f - \oint_{\gamma_1} f\ ,$$

så $\oint_{\gamma_0} f = \oint_{\gamma_1} f$. □

En omedelbar konsekvens av denna sats är

Sats 4.28. Cauchys integralsats
Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och antag att γ är en sluten, enkel $\mathcal{C}^1$-kurva i Ω. Då gäller

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

för alla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Bevis. Eftersom γ är homotop med en punkt $\{p\}$ så gäller att

$$\oint_{\gamma} f = \oint_{\{p\}} f = 0.$$

$\square$

Exempel 20. Låt oss betrakta integralen $\int_{|z|=1} z^n dz$ igen, fast den är gången med hjälp av Cauchys integralsats. Vi vet att

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}$$

Låt oss kolla på tre fall:
Fall 1: $(n \geq 0)$
Då är z^n holomorf på $\mathbb{C}$ som är enkelt sammanhängande, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$.
Fall 2: $(n = -1)$
Då är $z^n = \frac{1}{z}$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ men har ingen primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 2\pi i$.
Fall 3: $(n < -1)$
Då är z^n holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ och har en primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$. $\square$

Exempel 21. Låt oss beräkna $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ där γ är en cirkel med positiv orientering. Om a ligger utanför γ så är $\frac{1}{z-a}$ holomorf i γ, så Cauchys integralsats ger att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

Antag nu att a ligger innanför γ. Deformera nu γ till en cirkel runt a med radie 1, dvs $|z-a| = 1$. Då får vi enligt homotopisatsen att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=1} \frac{dz}{z-a} = \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$

enligt föregående exempel. Alltså är

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & , \text{om } a \in \text{Ext}(\gamma) \\ 2\pi i & , \text{om } a \in \text{Int}(\gamma) \end{cases} ,$$

där $\text{Int}(\gamma)$ är det inre av γ och $\text{Ext}(\gamma)$ är det yttre av γ. $\square$

Det är speciellt viktigt med detta exempel för att beräkna vissa kurvintegraler.

Exempel 22. Låt oss beräkna $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)}$. Eftersom

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

så blir

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)} = \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)} + \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i \ ,$$

enligt exemplet ovan. □

4.5 Cauchys integralformel och dess konsekvenser

Cauchys integralformel är kanske den mest viktiga satsen inom denna kurs. Den säger att vi kan uttrycka en holomorf funktion som en integral av sig själv. Ett sådant resultat finns inte inom den reella analysen, som kanske gör komplexanalysen så speciell. Här kommer en formulering och ett bevis.

Sats 4.29. Cauchys integralformel
Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är öppen och att $f \in \mathcal{O}(U)$. Låt $z_0 \in U$ och $r > 0$ vara sådan att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$. Då gäller för varje $z \in B(z_0, r)$ att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Anmärkning 11. Blanda inte ihop Cauchys integralsats och Cauchys integralformel. □

Bevis. Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Eftersom $z \in B(z_0, r)$ och eftersom $f(z)$ inte är en funktion av ζ, så får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Om vi visar att $\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ så är vi klara. Deformera nu $|z - z_0| = r$ till en cirkel $|z - z_0| = \varepsilon$. Kalla den nya cirkeln för γ_ε. Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Sätt $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$. Då gäller att

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M2\pi i\varepsilon}{\varepsilon} = M2\pi.$$

Eftersom $f \in \mathcal{O}(U)$, så är den speciellt kontiunerlig, så

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} M = 0 \text{ och } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \ ,$$

så satsen följer. □

Detta gör det möjligt att beräkna visa integraler ännu lättare, som följande exempel visar.

Exempel 23. Låt oss beräkna $\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2}$ där γ är kurvan $|z+1| = 2$. Vi börjar med att skriva om integranden:

$$\frac{z^2}{4-z^2} = \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}.$$

Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{2-z}$ är holomorf innanför γ, så Cauchys integralformel ger att

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z+2} dz \ ,$$

så

$$\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+2} dz = f(-2)2\pi i = \frac{(-2)^2}{2-(-2)} \cdot 2\pi i = 2\pi i.$$

□

Utifrån detta exempel så ser vi vilken kraft denna sats har. Men kan även beräkna derivator med hjälp av integraler. Detta brukar kallas för Cauchys integralformler för derivator och har utseendet:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

En slags omvändning till Cauchys integralsats är den så kallade Moreras sats:

Sats 4.30. (Moreras sats)
Om f är kontinuerlig på ett område $\Omega \subset \mathbb{C}$ och om

$$\int_\gamma f dz = 0$$

för alla slutna, enkla, styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i Ω, då är $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Bevis. Att f har en primitiv funktion F vet vi enligt Sats 4.23. F är holomorf, så det följder att $F' = f$ är holomorf, eftersom alla derivatorna av en holomorf funktion är holomorfa. □

4.6 Begänsningar för holomorfa funktioner

Detta avsnitt innehåller många satser med namn; Cauchyuppskattningar, Liouvilles sats, och maximumprincipen. (Avsnittet innehåller algebrans fundamentalsats också, men den känner ni redan till).

Sats 4.31. *(***Cauchyuppskattningar***)*
Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$ vara holomorf på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $p \in U$ och antag att $\overline{B(p,r)} \subset U$, $r > 0$. Sätt $M = \sup_{z\in\overline{B(p,r)}} |f(z)|$. Då gäller

$$|f^{(k)}(p)| \le \frac{Mk!}{r^k}$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Beviset är lätt och bygger bara på Cauchys integralformel för derivator och uppskattningen för kurvintegraler med längden av kurvan och M. Låt oss göra ett exempel.

Exempel 24. Låt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ uppfylla att $|f(z)| \le e^{|z|^2}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Vi ska visa att $|f^{(4)}(0)| < 70$. Cauchyuppskattningen ger att

$$|f^{(4)}(0)| \le \frac{4!M}{r^4},$$

där $M = \sup_{z\in\overline{B(0,r)}} |f(z)|$. Vi behöver bara ha ett $r > 0$ så låt oss ta $r = 1$. Detta ger att

$$|f^{(4)}(0)| \le \frac{4!e^{1^2}}{1^4} = 24e < 70.$$

□

Liouvilles sats säger att en begränsad hel funktion är konstant, dvs det finns inga icke-konstanta holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$ som är begränsade.

Sats 4.32. *(***Liouvilles sats***)*
En begränsad hel funktion är konstant.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ så att $|f(z)| \le C$, för något $C \ge 0$. Fixera ett $p \in \mathbb{C}$, och låt $r > 0$. Använd Cauchyuppskattningen med $k = 1$:

$$|f'(p)| \le \frac{C1!}{r^1} = \frac{C}{r}.$$

Eftersom denna olikhet gäller för alla $r > 0$ så måste $f'(p) = 0$. Men eftersom p var godtyckligt, så är $f' \equiv 0$ på $\mathbb{C}$. Men då vet vi att f måste vara konstant. □

Vad ska nu detta vara bra för? Jo, man t.ex. visa at om f är en hel icke-konstant funktion så finns det för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ en punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ så att $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. (Försök att visa detta).Observera vidare att man använder Liouvilles sats för att visa algebrans fundamentalsats.

Nästa viktiga resultat är maximumprincipen, i två olika versioner. För beviset av satsen så behöver vi att holomorfa funktioner har en medelvärdesegenskarp: Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ så är

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Sats 4.33. *(***Maximumprincipen (version 1)***)*
Om Ω är ett område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $|f|$ har ett lokalt maximum i Ω så måste f vara konstant i Ω.

Anmärkning 12. Ett lokalt maximum betyder att för alla $p \in \Omega$ så gäller att $|f(p)| \geq |f(z)|$ för alla $z \in \Omega$. □

Bevis. Låt oss först bevisa resultatet i fallet av boll $B(z, R)$. Antag att $B(z, R)$ är sådan att $|f(z)| = \sup_{w \in B(z,R)} |f(w)|$. Tag ett $0 < r < R$. Medelvärdesegenskapen för holomorfa funktioner ger att

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta =$$

$$= |f(z)| \frac{2\pi}{2\pi}.$$

Alltså har vi likhet hela vägen, så speciellt har vi att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \ ,$$

så

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})|) d\theta.$$

Eftersom $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| \geq 0$, så ger det att $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| = 0$ för alla θ. På grund av att detta är sant för alla $r < R$ så betyder det att $|f|$ är konstant på $B(z, R)$ och eftersom f är holomorf så betyder det att f är konstant.

Låt oss nu visa satsen i fallet av ett område. Antag att $|f|$ antar sitt maximum i $z \in \Omega$, och antag för en motsägelse att $|f|$ inte är konstant på Ω. Då finns det en punkt $w \in \Omega$ så att $|f(w)| < |f(z)|$ (se ovan). Låt γ vara ett polygontåg mellan z och w; $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$. Låt

$$T = \inf\{t \in [0, 1] : |f(\gamma(t))| < |f(z)|\}.$$

Detta betyder att $|f(\gamma(t))| = |f(z)|$ om $t \in [0, T]$, men det finns punkter $t > T$ (godtyckligt nära T) där vi har olikhet. Tag nu en boll $B(\gamma(T), r) \subset \Omega$. Föregående argument ger att $|f|$ är konstant på $B(\gamma(T), r)$, vilket motsäger definitionen av T, så $|f|$ måste vara konstant, så f måste vara konstant, eftersom f är holomorf. □

Sats 4.34. *(***Maximumprincipen (version 2)***)*
Om Ω är ett begränsat område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och f är kontinuerlig på $\overline{\Omega}$, så antar $|f|$ sitt maximum på $\partial\Omega$.

Anmärkning 13. Det är denna sats som man brukar använda, så kom ihåg denna. □

Exempel 25. Låt oss beräkna maximum för $|e^{z^2}|$ på enhetsdisken. Eftersom enhetsdisken är ett begränsad område och e^{z^2} är holomorf på enhetsdisken, samt e^{z^2} är kontinuerlig på $\overline{B(0,1)}$. Nu ger maximumprincipen att $|e^{z^2}|$ antar sitt maximum på $|z| = 1$. Sätt därefter $z = e^{it}$. Då är

$$|e^{(e^{it})^2}| = |e^{e^{2it}}| = |e^{\cos 2t + i \sin 2t}| = e^{\cos 2t} \leq e \ ,$$

eftersom $0 \leq \cos 2t \leq 1$. Detta maximum antar den för $z = \pm 1$. □

Läsanvisningar
till
kapitel 5.1 – 5.8

5.1 Följder och serier

Detta avsnitt är repetition, och jag hoppas att ni snart kan snappa upp det som står däri. Speciellt viktigt är det att komma ihåg vad en geometrisk serie är, och vad likformig konvergens är.

5.2 Taylorserier

Taylorserier är något ni är bekannt med sedan era reellanalyskurser. Höjdpunkten i detta avsnitt säger att holomorfa funktioner har en Taylorutveckling. Men låt oss börja lite lungt.

Om $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en $\mathcal{C}^\infty$ funktion, då har f en formell serieutveckling

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j$$

för fixt $p \in \mathbb{R}$. Det som kanske bör noteras är att det inte är någon garanti att denna serie konvergerar för något x förutom $x = p$. Om serien konvergerar för något $x \neq p$ så kan vi *inte* säga att serien är lika med $f(x)$.

Exempel 26. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} .$$

Vi har att f är $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ med $0 = f'(0) = f''(0) = \cdots$. Alltså är Taylorserien av f kring $p = 0$ lika med

$$0 + 0x + 0x^2 + \cdots .$$

Denna är konvergent för alla x och summan är identiskt lika med noll. Men $f(x) = 0$ endast om $x = 0$. □

Efter denna utvikning låt oss kasta oss in i Taylors sats.

Sats 5.35. *(***Taylors sats***)*
Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ så har f:s Taylorserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

konvergensradie åtminstone R. Vidare så konvergerar Taylorserien mot $f(z)$ för varje $z \in B(z_0, R)$.

Bevis. Vi ska först visa att Taylorserien konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$ om $0 < r < R$. Tag därför ett $r < \rho < R$ och låt γ vara cirkeln runt z_0 med radie ρ, så γ är enkel, sluten, positivt orienterad $\mathcal{C}^1$-kurva. Då ger Cauchys integralformel att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

om $|z - z_0| \leq r$. Vi ska börja med att skriva om integranden. Vi har att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}$$

och eftersom vi integrerar de ζ som ligger på γ har vi att

$$|z - z_0| \leq r < \rho = |\zeta - z_0|$$

dvs

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1.$$

Nu kan vi använda oss av en geometrisk serie, dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Detta ger att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Sätt nu $M = \sup_{|z-z_0|\leq r} |f(z)|$. Då är $M < \infty$. Låt

$$f_k(\zeta) = \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta).$$

Då är

$$|f_k(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \leq \frac{M}{\rho}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^k.$$

Vi har nu skrivit om integranden som

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta).$$

Eftersom $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k$$

en konvergent geometrisk serie. Nu ger Weierstrass M-test att

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)$$

konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, \rho)}$.

Vi får nu att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta$$

eftersom serien konvergerar likformigt. Vidare så får vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right)^{k+1} d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

enligt Cauchys integralformel för derivator. Detta ger att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

$\square$

Försök nu räkna lite övningar för att få en känsla för det hela. Beviset för Taylors sats är viktigt, eftersom det innehåller så många delar av kursen.

5.3 Potensserier

I början av detta avsnitt repeterar vi lite om potensserier och likformigt kontinuerliga funktioner, och en viktig sats som säger att om vi har likformig konvergens så får vi flytta in ”lim” innanför integralen. Detta är allt gammal skåpmat, så det första riktiga resultatet i detta avsnitt är

Sats 5.36. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara enkelt sammanhängande och antag att $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag vidare att $f_n \to f$ likformigt på Ω. Då är f holomorf på Ω.*

Försök visa denna sats innan ni kollar på bokens bevis. Ni an följa följande steg:

- Dra slutsatsen att f är kontinuerlig (varför?)
- Betrakta $\lim \int_\gamma f_n$.
- Vad vet du om $\int_\gamma f$.
- Dra slutsatsen att $\int_\gamma f = 0$.
- Använd Moreras sats.

5.4 Konvergensteori

Denna teori borde ni känna till, annars är det dags att läsa detta avsnitt ordentligt. Lägg märke till att vi redan, i beviset av Taylor sats, använt Weierstrass M-test. Jag lämnar detaljerna till er själva.

5.5 Laurentserier

Taylorserier gav oss en möjlighet att uttrycka holomorfa funktioner i en potensserie. I detta avsnitt vill vi uttrycka en holomorf funktion med singulariteter, dvs där den inte är definierad, i en potensserie.

Låt $0 \leq r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2 \leq +\infty$ och låt $z_0 \in \mathbb{C}$. Sätt

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

och

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Antag att $f \in \mathcal{O}(A)$. Då är

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \ ,$$

där serierna är absolutkonvergenta och konvergerar likformigt på mängder av typen B. Serieutveckligen kallas för Laurentserieutvecklingen av f på A kring z_0.

Om γ är en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Då ges koefficienterna i Laurentserieutvecklingen av

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

och

$$b_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{j-1}d\zeta \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Observation 3. Observera att beviset av denna sats är liknande av beviset av Taylors sats. $\square$

Anmärkning 14. Det är lockande att skriva

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$$

som i Taylorutvecklingen, med det vore fel ty $f^{(j)}(z_0)$ behöver nödvändigtvis ej vara väldefinierat. $\square$

Observation 4. Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r_2))$, då blir Laurentserieutvecklingen precis Taylorutvecklingen av f kring z_0. $\square$

Anmärkning 15. Laurentserieutvecklingen är entyigt bestämd enligt en sats i boken, och detta faktum använder man bland anant i uträkningar. $\square$

Låt oss göra några exempel. Innan ni kollar på dessa, se till att ni har koll på geometriska serier.

Exempel 27. Låt

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \text{ och } A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

och

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(A_1)$ och $f \in \mathcal{O}(A_2)$. Låt oss Laurentserieutveckla f i de olika områdena. För det första har vi att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^j ,$$

där vi använde en geometrisk serie, eftersom $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ är precis samma sak som $|z| > 1$ (dvs vi befinner oss i området A_1.) Så denna serie konvergerar på A_1.

Låt oss nu hitta en Laurentserieutveckling på A_2 för f. Vi har att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} z^j = -\frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j ,$$

där vi har använt oss av en geometrisk serie, eftersom $|z| < 1$. Så serien konvergerar på A_2. $\square$

Exempel 28. Låt oss Laurentserieutveckla $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}$ i området

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}.$$

Vi har att

$$\frac{1}{z^2+4z+3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+3}$$

om vi använder partialbråksuppdelning.

Termen $\frac{1}{z+1}$ är holomorf på $|z| > 1$. Vi har, om vi använder en geometrisk serie, att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{z^{j+1}}$$

som konvergerar för $|z| > 1$.

Vidare så är termen $\frac{1}{z+3}$ holomorf på $|z| < 3$. Vi har att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{z}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^j}{3^{j+1}}.$$

Även här har vi använt oss av en geometrisk serie. De båda fallen ovan ger nu att

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{z^{j+1}} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^j}{3^{j+1}}$$

som är Laurentserieutvecklingen av f i området A. $\square$

5.6 Nollställen och singulariteter

Nollställen antar jag att ni har lite koll på. En viktig observation, som är en följd i boken, är att en holomorf funktion har isolerade nollställen. Singulariteter är, precis som vi har nämnt förrut, punkter där en funktion inte är definierad. Man kan däremot ha olika typer av singulariteter, och man använder sig av Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner för att klassificera de olika typerna av singulariteter. Mer precist har vi:

Definition 5.37. *Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och antag att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$, $r > 0$. Om $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ så säger vi att f har en* **isolerad singularitet** *i z_0.*

Eftersom $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ så har f följande Laurentserieutveckling

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$$

åtminstone på $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Vi ska använda oss av koefficienterna c_j till denna Laurentserieutveckling för att klassificera de olika singulariteterna.

1. Om $c_j = 0$ för alla $j < 0$ så säger vi att f har en **hävbar singularitet** i z_0.
2. Om det finns ett $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, så att $c_k \neq 0$ och $c_j = 0$ för alla $j < -k$, så säger vi att f har en **pol** i z_0 av ordning k.
3. Om $c_j \neq 0$ för oändligt många *negativa* j, då säger vi att f har en **väsentlig singularitet** i z_0.

Anmärkning 16. Koefficienten c_{-1} kallas för f:s **residue** i punkten z_0. Detta kommer bli mer klart i kapitel 6. □

Låt oss gå igenom dessa olika typer av singulariteter.

- Antag att f har en hävbar singularitet i z_0. Detta är faktiskt ingen singularitet, utan man häver verkligen den. Då är Laurentserieutvecklingen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ inget annat än Taylorutvecklingen för f som är holomorf i $B(z_0, r)$ förutsatt vi definierar $f(z_0) = c_0$. Vidare så har vi att f är begränsad i någon omgivning $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. En annan viktig egenskap hos hävbara singulariteter är att

  $$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

  existerar och är ändlig. Vidare så är

  $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

  Vi sammanfattar att z_0 är en hävbar singularitet för f omm $|f|$ är begränsad nära z_0 omm $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existerar och är ändlig omm vi kan omdefinera f så att f blir holomorf i z_0.

- Antag nu att f har en pol av ordning k. Då har vi att

  $$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

  Vidare så kan vi skriva f som

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

  där g är en holomorf funktion med $g(z_0) \neq 0$. Detta betyder speciellt att $1/f$ kommer ha ett nollställe i z_0 av ordning k. Vidare så har vi att

  $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$$

  och att

  $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

  existerar och är ändlig.

- Låt oss slutligen diskutera väsentliga singulariteter. Dessa punkter är konstiga punkter, och gränsvärdet $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existerar inte, vare sig det blir ändligt eller oändligt. Vidare så har vi Picards sats som säger att $f(z)$ antar alla komplexa tal i en omgivning till z_0 med ett möjligt undantag. Detta betyder, med topologiska termer, att värdemängden för f är tät i $\mathbb{C}$.

Exempel 29. Betrakta funktionen

$$f(z) = \begin{cases} \cos z & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Laurentserieutvecklingen av f kring z_0 är

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j}}{(2j)!} z^{2n}$$

på mängden $0 < |z|$. Per defintion så har f en hävbar singularitet i $z_0 = 0$. □

Exempel 30. Funktionen $f(z) = e^{-1/z}$ har en väsentlig singularitet i $z_0 = 0$. I varje omgivning $B(0,r) \setminus \{0\}$ så antar denna funktion alla komplexa värden utom 0. □

Exempel 31. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$. Vi ser att f har en isolerad singularitet i $z = 0$. Vidare har vi att

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 0.$$

Eftersom $\lim_{z\to 0} z f(z)$ existerar inte så har f en pol av ordning 2. □

5.7 Punkten i oändligheten

I detta avsnitt så går boken igenom Riemannsfären igen. Den här gången så kollar vi på singulariteter för funktioner i ∞, och det man gör är helt enkelt att man kollar på $f\left(\frac{1}{w}\right)$ och avgör vilken typ av singularitet den har då.

5.8 Analytisk fortsättning

Tänk om vi har en funktion f som är holomorf på ett område Ω. Om vi då kan hitta en holomorf funktion F på Ω', där $\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$ så att $F|_\Omega = f$, så säger vi att F är en **analytisk fortsättning** av f. Vi har följande viktiga sats om analytiska fortsättningar.

Sats 5.38. *Om $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ ett område, har en analytisk fortsättning till ett område Ω_2, då finns det en entydig $F \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ så att $F|_{\Omega_1} = f$.*

Läs detta avsnitt lite kursivt, men försök att rita bilder över de olika resultaten.

Läsanvisningar
till
kapitel 6.1 – 6.7

6.1 Residuesatsen

Hela kapitel 6 handlar om att beräkna olika typer av integraler på så gott som samma vis. Om ni kommmer ihåg från förra avsnittet om Laurentserieutvecklingar, så kallas koefficienten c_{-1} i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ för **residuen** i z_0. Eftersom koefficienten i en Laurentserieutveckling definieras genom en integral så kan vi använda residuer till att beräkna integraler. Men varför just koefficienten c_{-1}? Låt oss motivera detta intresse av residuer.

Låt γ vara en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva kring origo. Då är

$$\int_\gamma z^n = \begin{cases} 0 & , \ n \neq -1 \\ 2\pi i & , \ n = -1 \end{cases} .$$

Antag nu att f är en holomorf funktion med en singularitet i origo. Då har f en Laurentserieutveckling i någon annulus A kring 0; $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$. Denna konvergerar likformigt på γ, förutsatt γ ligger helt i A och innehåller origo. Då är

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \int_\gamma z^j dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Alltså är koefficienten c_{-1} viktig, och det leder till följande definition. (Denna definition har ni sett förrut, i alla fall mer eller mindre, men jag tänkte vara mera precis här).

Definition 6.39. *Låt f vara en funktion med en isolerad singularitet i punkten z_0. Då kallas koefficienten c_{-1} i f:s Laurentserieutveckling $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ för f:s* **residue** *i punkten z_0. Detta skriver vi som*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \ \text{ eller } \ \operatorname{Res}(z_0).$$

Observation 5. Enligt definition så har vi att

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_o|=r} f(z)dz$$

då $r > 0$ är tillräckligt litet. □

Vi kan även göra några fler fundamentala observationer:

1. Om f har en hävbar singularitet i z_0 så är $\text{Res}(f, z_0) = 0$ enligt Cauchys integralsats.

2. Om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j.$$

   Detta ger att

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0) f_1(z)$$

   där $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$. Derivera nu $(k - 1)$ gånger, då får vi

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)! c_{-1} + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0) f_1(z).$$

   Låt nu $z \to z_0$. Då blir

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)! c_{-1} + 0.$$

   Alltså om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z).$$

Exempel 32. Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2}$ har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Detta ger att

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} 1 = 0.$$

□

Exempel 33. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^3}$ som har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Då är

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^3}{(e^z - 1)^3} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^3 =$$

$$= \lim_{z \to 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \frac{d}{dz} \frac{z}{(e^z - 1)} = 3 \lim_{z \to 0} 3 \left(\frac{z}{(e^z - 1)} \right)^2 \cdot \frac{(e^z - 1) - ze^z}{(e^z - 1)^2} = \cdots = -\frac{3}{2}.$$

För att inse detta, kolla på Taylorutvecklingen av e^z. □

Om vi har flera singulariteter som ligger innanför en kurva, kan vi då använda oss av residuer för att beräkna en integral? Svaret är ja, och besvaras av Cauchys residuesats.

Sats 6.40. *(***Cauchys residuesats***)*
Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ förutom i de isolerade singulariteterna $z_1, \ldots, z_n$. Antag att γ är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i Ω och att $z_1, \ldots, z_n$ ligger inuti γ. Då gäller

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Bevis. Vi ska använda induktion över antalet singulariteter.
Om $n = 0$:
Då är f holomorf i ett enkelt sammanhängande område som innehåller γ. Då ger Cauchys integralsats att

$$VL = \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Vidare så har vi att $HL = 0$ så det stämmer i fallet $n = 0$, dvs inga singulariteter.

Antag nu att satsen är sann för $(n-1)$ stycken singulariteter. Låt $\varepsilon > 0$ vara så litet så att $|z - z_n| \leq \varepsilon$ *ej* innehåller någon av $z_1, \ldots, \overline{z}_{n-1}$. Tag därför två punkter p_1 och p_2 på $|z - z_n| = \varepsilon$. Förbind p_1 och p_2 med kurvan γ i punkterna q_1 respektive q_2. Kalla dessa γ_1 respektive γ_2. Låt C_1 vara övre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$ från p_1 till p_2, och låt C_2 vara undre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$. Vidare låt γ_3 vara den del av γ som går från q_1 til q_2 och låt γ_4 vara den del av γ som förbinder q_2 med q_1, så $\gamma = \gamma_3 + \gamma_4$. (Rita en bild över detta!) Bilda nu

$$\widetilde{\gamma} = \gamma_3 - \gamma_2 - C_2 - \gamma_1 + \gamma_1 - C_1 + \gamma_2 + \gamma_4$$

som är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Då har vi att

$$\int_\gamma f - \int_{|z-z_n|} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Alltså är

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_j)\ ,$$

så satsen är sann för n stycken singulariteter. □

Exempel 34. Vi ska beräkna $I = \int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z-1)}dz$ där γ är en "snäll" kurva som innehåller 0 och 1. Cauchys residuesats ger att

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(1)).$$

Vi har att $z = 1$ är en enkel pol, ty $\cos \pi \neq 0$, så

$$\text{Res}(1) = \lim_{z \to 1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2} = -1.$$

Vidare så är $z = 0$ en pol av ordning 2, ty $\cos 0 \neq 0$, så

$$\text{Res}(0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z - 1} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{-\pi \sin(\pi z)(z-1) - \cos(\pi z)}{(z-1)^2} = \frac{0 - 1}{(-1)^2} = -1.$$

Detta ger att

$$I = 2\pi i(-1 - 1) = -4\pi i.$$

$\square$

6.2 Trigonometriska integraler över $[0, 2\pi]$

Vi ska i detta avsnitt beräkna integraler på formen $\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ med hjälp av Cauchys residuesats. Antag att funktionen U ovan är en rationell funktion i $\cos \theta, \sin \theta$ med reella koefficienter som är ändlig på $[0, 2\pi]$. Låt $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ vara en kurva som ges av $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Observera att $e^{-i\theta} = \frac{1}{\gamma(\theta)}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$. Kom nu ihåg Eulers formler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Då gäller att

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad , \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

där $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Gör nu substitutionen $d\theta = \frac{dz}{iz}$ så får vi

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_\gamma U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) fracdziz.$$

Och nu är vi i ett läge där vi kan använda Cauchys residuesats. Låt oss kolla på ett exempel.

Exempel 35. Låt $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, och betrakta

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}.$$

Vi ska beräkna I. Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Gör nu variabelsubstitution i I. Då får vi, om vi använder $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$,

$$I = \int_\gamma \frac{1}{1 + a^2 - \frac{2a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{idz}{(z-a)(az-1)}.$$

Vi ser nu att integranden har enkla poler i $z = a$ och $z = \frac{1}{a}$. Residuen i dessa punkter är

$$\mathrm{Res}(a) = \lim_{z\to a} \frac{i}{a\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

och

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{z\to \frac{1}{a}} \frac{i}{a(z-a)} = \frac{i}{1-a^2}.$$

Vi måste nu kolla på olika fall för a:

Om $0 < a < 1$, då ligger a innanför γ och $1/a$ utanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i\left(\frac{i}{a^2-1}\right) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Om $a > 1$, då ligger a utanför γ och $1/a$ innanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i\left(\frac{i}{1-a^2}\right) = \frac{2\pi}{a^2-1}.$$

□

6.3 Obestämda integraler av speciella funktioner över $]-\infty,\infty[$

Vi ska försöka beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ genom att använda komplex analys. Detta gör vi genom att helt enkelt låta $f(z)$ vara den reella funktionen $f(x)$ fast i den komplexa variabeln z, så t.ex. om $f(x) = x^2 + 1$ så är $f(z) = z^2 + 1$. Låt $I_R = [-R, R]$ och låt $C_R = Re^{i\theta}$, för $0 \leq \theta \leq \pi$. Sätt $\gamma_R = C_R + I_R$. Låt nu $R > 0$ vara tillräckigt stort så att $f(z)$:s isolerade singulariteter med $Im(z) > 0$ ligger innanför γ_R. Då vet vi att

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz$$

och enligt Cauchys residuesats så har vi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j)\ ,$$

där $z_1, \dots, z_n$ är f:s isolerade singulariteter så att $\mathrm{Im}(z_j) > 0$. Vi får då att

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz.$$

Låt nu $R \to \infty$, så vi betraktar

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)dz.$$

Eftersom vi befinner oss på realaxeln i integralen över I_R så kan vi gå tillbaka till den reella funktionen, dvs

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(x)dx.$$

Om nu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig, så brukar vi kalla detta för principalvärdet och skriver

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Observation 6. Exemplet i boken om att p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$ är viktigt, eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ inte existerar. $\square$

Så om $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existerar och är ändlig så får vi att

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz + \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Alltså om vi kan visa att $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ så skulle vi ha beräknat p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Lyckligtvis så finns det ett lemma som hjälper till här:

Lemma 6.41. *Om $f(z) = P(z)/Q(z)$, där P och Q är polynom så att*

$$\mathrm{grad}(Q) \geq 2 + \mathrm{grad}(P)$$

då är

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Exempel 36. Låt oss beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

Ni får själva kolla att I är konvergent, så

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

Låt oss nu gå över till den komplexa funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$. Observera att $\text{grad}(Q) \geq 2 + \text{grad}(P)$ så lemmat ovan ger att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 \ ,$$

där C_R är halvcirkeln $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Eftersom ekvationen $z^4 + 1 = 0$ har lösningarna $z_1 = e^{\pi i/4}, z_2 = e^{3\pi i/4}, z_3 = e^{5\pi i/4}$ och $z_4 = e^{7\pi i/4}$, så z_1 och z_2 ligger innanför $\gamma_R = C_R + I_R$. Detta betyder att

$$I = 2\pi i(\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2)).$$

Vi har att

$$\text{Res}(z_k) = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

för $k = 1, 2, 3, 4$. Detta betyder att

$$I = \frac{2\pi i}{4}(e^{-\pi i/4} + e^{-3\pi i/4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Denna metod blir ofta lättare än den gamla metoden med integralkalkylens huvudsats.

Anmärkning 17. Metoden som har beskrivits i detta avsnitt fungerar inte om singulariteterna ligger på $Im(z) = 0$, utan detta ska vi få lära oss i senare avsnitt.

□

6.4 Obestämda integraler av trigonometriska funktioner

Vi ska fortsätta med att beräkna principalvärdet för integraler på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx)dx \ \text{ och } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx)dx \ ,$$

där P och Q är polynom. För att beräkna dessa integraler så använder vi samma metod som i föregående avsnitt. Det man observerar är att

$$\text{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad \text{Im}(e^{it}) = \sin t \ ,$$

så
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx)dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx}dx\right)$$
och
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx)dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx}dx\right).$$
Konstruktionen med kurvan $\gamma = C_R + I_R$ kan man använda även här, och Jordans lemma hjälper en på traven:

Lemma 6.42. *(***Jordans lemma***)*
Om $m > 0$ och P och Q är polynom så att

$$\operatorname{grad}(Q) \geq 1 + \operatorname{grad}(P)$$

då är
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}dz = 0 \ ,$$
där C_R är en halvcirkel med radie R.

Exempel 37. Vi ska beräkna p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2}dx$. Sätt

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \ ,$$

så har f poler i $\pm i$. Eftersom

$$\operatorname{grad}((z^2+1)^2) \geq 1 + \operatorname{grad}(z^3)$$

så kan vi använda oss av Jordans lemma, så

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 0 \ ,$$

där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet. Eftersom i är den enda polen i övre halvplanet, så ger Cauchys residuesats att

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2}dx = \operatorname{Im}(2\pi i \operatorname{Res}(i)).$$

Om man beräknar residuen så får man $\operatorname{Res}(i) = \frac{1}{4e}$, vilket betyder att

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2}dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \cdot \frac{1}{4e}\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

□

6.5 Speciella konturer

Detta avsnitt handlar om hur man beräknar integraler med singulariteter på den reella axeln. Det man gör är att man lägger en halvcirkel med godtyckligt liten radie runt singulariteten och därefter så använder man Cauchys residuesats. För att beräkna integralen längs denna halvcirkel, eller någon cirkelbåge, kring en singularitet använder man följande lemma:

Lemma 6.43. *Om f har en enkel pol i $z = c$ och T_r är en cirkelbåge kring c definierad genom $c + re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, då gäller att*

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{T_r} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, c).$$

Dessa metoder lär man sig lättast om man räknar lite. Därför ger jag ett exempel.

Exempel 38. Låt oss beräkna $I = \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x+1} dx$. Vi har att Jordans lemma ger oss

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = 0.$$

Vidare så ger lemmat från detta avsnitt att

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{S_r} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = -\pi i \operatorname{Res}(-1) \ ,$$

där S_r är en halvcirkel kring singulariteten $z = -1$. Eftersom

$$\operatorname{Res}(-1) = \lim_{z \to -1} (z+1) \cdot \frac{e^{2iz}}{z+1} = e^{-2i}$$

så får vi att

$$I = \pi i e^{-2i}.$$

$\square$

6.6 Integraler av flervärda funktioner

Även i detta avsnitt så beräknar vi integraler, fast nu är integranden en flervärd funktion. Jag tycker att ni ska gå igenom detta avsnitt och räkna några uppgifter. Jag kommer här bara gå igenom ett exempel så jag hoppas det är tillräckligt.

Exempel 39. Vi ska beräkna $\int_0^{\infty} \frac{\ln(px)}{q^2+x^2} dx$ för $p, q > 0$. Sätt $g(z) = \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2+z^2}$. Då gäller att $\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z)) = \ln |z|$. Då är $\operatorname{Log}(z)$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Observera att g har en enkel pol i iq. Då är

$$\operatorname{Res}(g, iq) = \frac{\ln(pq)}{2qi} + \frac{\pi}{4q}.$$

Observera att vi inte behöver något belopp på pq då vi tar den naturliga logaritmen, eftersom både p och q är icke-negativa. Låt $0 < r < q < R$ och låt S_r vara en halvcirkel kring origo med godtyckligt liten radie r i övre halvplanet, och låt C_R vara en halvcirkel kring origo med stor radie R. Låt $\gamma = C_R + [-R, r] + S_r + [r, R]$. Då ger Cauchys residuesats att

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, iq) = \frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q}.$$

Vi har att

$$\int_r^R g = \int_r^R \frac{\log(pz)}{q^2+z^2}dz$$

som går mot $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz$ då $R \to \infty$ och $r \to 0^+$. Vidare har vi att

$$\int_{-R}^{-r} g = \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz = \int_R^r \frac{\mathrm{Log}(-pz)}{q^2+(-z)^2}(-dz) = \int_r^R \frac{\mathrm{Log}(pz)+\pi i}{q^2+z^2}dz$$

som går mot

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2+z^2}dz$$

då $R \to \infty$ och $r \to 0^+$.

Vi gör nu ett variabelbyte, som ger att

$$\left|\int_{C_R} g\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\mathrm{Log}(Re^{i\theta})}{q^2+R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\ln|R|+i\theta}{q^2+R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \frac{\ln R+\pi}{R^2-q^2}\pi R \to 0$$

då $R \to \infty$. Jag lämnar åt er att visa att $\left|\int_{S_r} g\right| \to 0$ då $r \to 0^+$. Detta ger att

$$\int_\gamma g \to \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz + \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2+z^2}dz$$

då $R \to \infty$ och $r \to 0^+$. Så vi får att

$$\frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(pz)}{q^2+z^2}dz + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2+z^2}dz.$$

Om vi jämför real och imaginärdel så får vi att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(px)}{q^2+x^2}dx = \frac{\pi \ln(pq)}{2q}$$

och

$$\int_0^\infty \frac{1}{q^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2q}.$$

$\square$

6.7 Argumentprincipen och Rouches sats

Meromorfa funktioner är holomorfa funktioner med poler. Med dessa så kan vi med hjälp av nollställen och poler beräkna en viss typ av integraler. Mer precist har vi:

Sats 6.44. *(***Argumentprincipen***)*
Låt $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ vara en meromorf funktion, där Ω är ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{C}$. Låt γ vara en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Antag att f saknar poler och nollställen på γ. Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0(f) - N_p(f)\ ,$$

där $N_p(f)$ är summan av ordningen av poler innanför γ och $N_0(f)$ är summan av ordningen av nollställena innanför γ.

Denna sats ska vi använda till att visa Rouches sats som uttalar sig om nollställen för funktioner.

Sats 6.45. *(***Rouches sats***)*
Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att

$$|f(z)| < |g(z)|$$

på en enkel, sluten styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva γ i Ω. Då måste f och g ha samma antal nollställen innanför γ (räknat med multiplicitet).

Bevis. Säg att $g = f + h$, där $|h| < |f|$ på γ. Detta ger att $f \neq 0$ på γ. Betrakta homotopin $F_t(z) = F(t, z) = f(z) + th(z)$, $0 \leq t \leq 1$, som överför f till g. På γ har vi att

$$|F_t| \geq |f| - t|h| \geq |f| - |h| > 0.$$

Låt $N(t)$ vara antalet nollställen till F_t i det inre av γ. Då ger argumentprincipen att

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_t'(z)}{F_t(z)}dz.$$

Eftersom N är definierad av en integral av en kontinuerlig funktion, så måste N vara kontinuerlig. Vidare så antar N bara heltalsvärden (den räknar ju antal!). Därför måste $N(0) = N(1)$ vilket betyder att antalet nollställen hos $F_0 = f$ är samma som antalet nollställen hos $F_1 = g$. $\square$

Rouches sats säger att vi kan göra ”små” holomorfa störningar och även ha lika många nollställen.

Exempel 40. Vi ska undersöka hur många nollställen $f(z) = z^3 + 2 + e^{-z}$ har i det högra halvplanet. Låt $g(z) = z^3 + 2$ och $h(z) = e^{-z}$. Då är $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Låt γ vara den slutna kurva som går i en halvcirkel C_R från iR till $-iR$ och därefter linjen l_R från iR till $-iR$. Då gäller att

$$|g(z)| = |z^3 + 2| \geq |z|^3 - 2 = R^3 - 2$$

då $R^3 > 2$ på C_R, och

$$|h(z)| = |e^{-z}| = \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z}} \leq 1$$

på C_R. På linjen l_R så gäller att

$$|g(iy)| = |(iy)^3 + 2| = \sqrt{y^6 + 4} \geq 2$$

och

$$|h(iy)| = |e^{-iy}| = 1.$$

Alltså är $|g(z)| > |h(z)|$ på γ.

Vi kollar nu på hur många nollställen g har innanför γ. Löser vi $g(z) = 0$ så ser vi att den har 2 stycken nollställen innanför γ om $R > 2^{1/3}$. Då ger Rouches sats att g och f har samma antal nollställen innanför γ. Eftersom $R > 2^{1/3}$ är godtycklig så följer det att f har två nollställen i högra halvplanet. □

Exempel 41. Betrakta $p(z) = z^3 + 3z - 1$. Vi påstår att p har alla sina nollställen i $B(0, 2)$. Vi ser att p har exakt tre nollställen enligt algebrans fundamentalsats. Låt $r(z) = z^3$ som har alla sina nollställen i origo, så speciellt i $B(0, 2)$. På $\partial B(0, 2)$ så är $|r(z)| = 8$. Vidare så är $q(z) = 3z - 1$ en liten störning av $r(z)$. På $\partial B(0, 2)$ så är

$$|q(z)| = |3z - 1| \leq 3 \cdot 2 + 1 < |r(z)|.$$

Rouches sats ger att r och p har lika många nollställen i $B(0, 2)$. □

Exempel 42. Låt $f \in \mathcal{O}(B(0, 1+\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Antag att $f(0) = 3$ och att $|f(z)| > 7$ då $|z| = 1$. Vi påstår att f har ett nollställe i $B(0, 1)$. Låt $h(z) = -3$. Vi har att $|f(z)| > |h(z)|$ på $\partial B(0, 1)$ så har f och $g = f + h$ lika många nollställen i $B(0, 1)$. Men $g(0) = f(0) + h(0) = 0$ så f måste ha ett nollställe i $B(0, 1)$. □

Rouches sats ger i sin tur följande sats

Sats 6.46. *(***Öppna avbildningssatsen***)*
En holomorf, icke-konstant funktion är öppen, dvs bilden av öppna mängder är öppna.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, där Ω är ett område i $\mathbb{C}$. Tag $V \subset \Omega$ öppen. Vi ska visa att $f(V)$ är öppen. Eftersom V är öppen så finns det en boll $\overline{B(a, r)} \subset V$ där $a \in V$. Enligt identitetssatsen så finns det ett r så att $B(a, r)$ är en sådan boll, och så att om vi definierar

$$m = \inf\{|f(z) - f(a)| : z \in \partial B(a, r)\}$$

så är $m > 0$. Detta är inget annat än avståndet från $f(a)$ till $f(\partial B(a,r))$. Tag en $w \in B(f(a), m)$ och sätt $g(z) = f(z) - w$. Vi ska nu använda Rouches sats:

Sätt $g_0(z) = f(z) - f(a)$. Denna har minst ett nollställe i $B(a,r)$. Sätt $g_1(z) = f(a) - w$ som då är konstant. För $z \in \partial B(a,r)$ är nu

$$|g_0(z)| = |f(z) - f(a)| \geq m > |f(a) - w| = |g_1(z)|$$

och därför har $g_0 + g_1 = g$ samma antal nollställen i $B(a,r)$ som g_0, dvs minst 1. Vad betyder nu detta? Jo, för vårt godtyckliga val av $w \in B(f(a), m)$ så finns ett $z_0 \in B(a,r)$ så att $0 = g(z_0) = f(z_0) - w$, så $f(z_0) = w$. Därför är $B(f(a), m) \subset f(B(a,r)) \subset f(V)$, så $f(V)$ innehåller en boll, så $f(V)$ är öppen. $\square$

Läsanvisningar
till
kapitel 7.1 – 7.4

7.1 Invarians av Laplaceekvationen

Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ett område, är bijektiv med holomorf invers så säger vi att f är **biholomorf**. Detta avsnitt handlar om att harmoniska funktioner är invarianta under biholomorfa avbildningar. Låt oss se varför: Låt φ vara harmonisk i Ω och betrakta $\widetilde{\Omega} = f^{-1}(\Omega)$ där $f \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ är bijektiv. Låt $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$. Vi påstår nu att $\widetilde{\varphi}$ är harmonisk på $\widetilde{\Omega}$. Vi har att

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f^{-1}}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{(f^{-1})}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \overline{(f^{1})}'$$

eftersom f^{-1} är holomorf. (Hur vet vi det?). Vidare har vi att

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial \overline{z}} \overline{(f^{1})}' + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{(f^{1})}'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \overline{\left(\frac{\partial (f^{-1})}{\partial \overline{z}} \right)} = 0$$

eftersom φ är harmonisk och (f^{-1}) är holomorf. Alltså är $\Delta \widetilde{\varphi} = 0$.

I övrigt så läs detta avsnitt kursivt.

7.2 Geometriska betraktelser

Läs detta avsnitt försiktigt. Här introduceras så kallade konforma avbildningarm, dvs avbildningar som bevarar vinklar mellan två kurvor i en speciell punkt. Detta betyder att om γ_1 och γ_2 möts i en punkt z, så är vinkeln mellan dessa lika med vinkeln mellan $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ i punkten $f(z)$. Koncentrera er inte på bevis i detta avsnitt, utan ideér. Avslutningsvis så bör man känna till, utan bevis, följande sats:

Sats 7.47. *Om Ω och $\widetilde{\Omega}$ är enkelt sammanhängande områden som inte är lika med $\mathbb{C}$, så finns en biholomorf avbildning $f \colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$.*

Kom ihåg att detta bara är en existenssats, så vi vet inte hur denna avbildning ser ut!

7.3 Möbiusavbildningar (7.3-7.4)

Vi tar nu hand om både avsnitt 7.3 och 7.4 som avslutar kursen. Vi ska börja med att gå igenom några typer av avbildningar.

- Translation: Detta är en funktion $f(z) = z + c$, $c \in \mathbb{C}$. En translation flyttar ett objekt c ”steg”.
- Rotation: Funktionen $f(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$, roterar ett objekt med θ radianer moturs.
- Skalning: $f(z) = \rho z$, $\rho \in \mathbb{R}, \rho \geq 0$, ör en skalningsfunktion, så den förminskar eller förstorar objekt. Speciellt har vi att om $w = f(z)$, för w_1, w_2 i w-planet

$$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)| = |\rho z_1 - \rho z_2| = \rho |z_1 - z_2|.$$

- Affina avbildningar: Detta är en avbildning på formen $f(z) = az + b$. Vi kan skriva f som en komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

  där f_1 är en rotation, f_2 en skalning, och f_3 en translation.
- Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$. Läs om detta i boken.

Dessa olika typer av avbildningar är viktiga för så kallade Möbiusavbildningar, så det är dags att definiera dessa:

Definition 7.48. *En Möbiusavbildning är en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som definieras genom*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$.

Anmärkning 18. Villkoret $ad - bc \neq 0$ betyder att determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ska vara nollskild. □

Observation 7.

- Om $c = 0$, då är $ad \neq 0$ och

$$f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$$

  är en affin avbildning.

- Om $c \neq 0$, då har $f(z)$ en pol i $z = -\frac{d}{c}$.
- Om $a \neq 0$, då har $f(z)$ ett nollställe i $z = -\frac{b}{a}$.

$\square$

Affina avbildningar kan vi betrakta som avbildningar $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ med $\infty \mapsto \infty$. Då blir dessa avbildningar bijektiva. Om vi betraktar inversionsavbildningen som en avbildning $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ med $0 \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto 0$ så blir även denna bijektiv. Vad händer då om vi betraktar Möbiusavbildningar som avbildningar på $\mathbb{C}_\infty$? Jo, de blir också bijektiva, och om $c \neq 0$ så $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto \frac{a}{c}$. Vidare så ges dess derivata av

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2}$$

och f:s invers av

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Observation 8. Notera att f^{-1} också är en Möbiusavbildning med $\infty \mapsto -\frac{d}{c}$ och $\frac{a}{c} \mapsto \infty$. $\square$

Vi har följande viktiga sats om Möbiusavbildningar:

Sats 7.49. *Låt f vara en Möbiusavbildning. Då gäller att*

1. *f kan uttryckas som en sammansättning av en ändlig följd av translationer, rotationer, skalningar och inversioner.*
2. *$f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ är bijektiva.*
3. *f avbildar mängden $\{\text{linjer}, \text{cirklar}\}$ på sig själv.*

Slutsats (3) i satsen ovan betyder speciellt att en linje kan avbildas på en cirkel och vice versa. För Möbiusavbildningar har vi en annan viktig sats, nämligen:

Sats 7.50. *(***Avbildningsprincipen**
Låt f vara en Möbiusavbildning och låt γ vara en enkel styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}_\infty$. Då är $\mathbb{C} \setminus \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ en disjunkt union av två områden. Vidare så är $\gamma^* := f(\gamma)$ en kurva i $\mathbb{C}_\infty$ och $\mathbb{C} \setminus \gamma^* = f(\Omega_1) \cup f(\Omega_2)$.

Anmärkning 19. Rita en bild av avbildningsprincipen. $\square$

Nu till några exempel.

Exempel 43. Betrakta $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Detta är en Möbiusavbildning eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Vi har att
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}.$$
Låt $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = 2z$ och $f_4(z) = z + 1$. Då är
$$f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z).$$
Låt oss kolla hur f avbildar $|z| = 1$. Först så translaterar f_1 cirkeln. Efter detta så blir cirkeln en linje via inversionen. Därefter så förlänger vi linjen med f_3 och slutligen så translaterar vi linjen igen. Alltså avbildar f cirkeln $|z| = 1$ på en linje. Efterso en linje bestäms av två punkter så tar vi två punkter på enhetscirkeln och avbildar dessa med f:
$$i \mapsto \frac{i+1}{i-1} = i$$
och
$$-1 \mapsto 0.$$
Den enda linjen som går genom 0 och i är $\text{Re}(z) = 0$. Så bilden av $|z| = 1$ under f är $\text{Re}(z) = 0$.

Låt oss kolla med avbildningsprincipen vart det inre av $|z| = 1$ och det yttre hamnar. Tag därför en punkt innanför, t.ex. $z = 0$. Denna avbildas av f till -1, så vi drar slutsatsen att allt innanför cirkeln avbildas till vänstra halvplanet ($\text{Re}(z) < 0$), och avbildar allt utanför cirkeln till högra halvplanet ($\text{Re}(z) > 0$). (Tag en annan punkt och testa!) $\square$

Exempel 44. Vi ska beskriva bilden av $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ under avbildningen $f(z) = \frac{z-i}{z}$. Eftersom
$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i \neq 0$$
så är f en Möbiusavbildning.

För att få koll på hur detta område avbildas med f ska vi använda oss av argumentprincipen. Problemet är att vi inte har några kurvor att avbilda. Därför kollar vi vad som händer med $\operatorname{Im} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = 1$.

Vi börjar med $\operatorname{Im} z = 0$. Eftersom f har en pol i $z = 0$ som ligger på $\operatorname{Im} z = 0$ så måste denna linje avbildas på en linje. En linje bestäms av två punkter på $\operatorname{Im} z = 0$, t.ex. $z = -1$ och $z = 1$. Dessa ger att
$$f(-1) = 1 + i$$
och
$$f(1) = 1 - i.$$
Vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z = 0$ på $\operatorname{Re} z = 1$. För att bestämma hur $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas, så tar vi en punkt med $\operatorname{Im} z > 0$ och använder avbildningsprincipen,

Tag t.ex. $z = i$, då får vi att $f(i) = 0$, så vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z > 0$ på $\operatorname{Re} z < 1$. Låt oss nu kolla på hur f avbildar $\operatorname{Im} z = 1$. Funktionen f saknar pol på $\operatorname{Im} z = 1$, därför måste $\operatorname{Im} z$ avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter. Vi har att

$$f(-1+i) = \frac{1}{2}(1+i) \ ,$$

$$f(i) = 0$$

och

$$f(1+i) = \frac{1}{2}(1-i)$$

där $-1+i, 0$ och $1+i$ ligger på $\operatorname{Im} z = 1$. Ur detta får man cirkelns ekvation, vi får räkna lite själva också, $|z - 1/2| = 1/2$. Men hur avbildas $\operatorname{Im} z < 1$. Tag en punkt med $\operatorname{Im} z < 1$, t.ex. $i/2$, så får vi att $f(i/2) = -1$, så z med $\operatorname{Im} z < 1$ avbildas utanför cirkeln $|z - 1/2| = 1/2$.

Alla uträkningar ovan ger att området A avbildas via f till

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1 \ , \ |z - 1/2| > 1/2\}.$$

Rita en bild över vad som händer! $\square$