

Läsanvisningar

till

kapitel 1.1 – 2.2

Jag tänkte bara kort berätta hur strukturen hos dessa läsanvisningar kommer vara innan vi kör gång på allvar. Jag kommer i dessa läsanvisningar säga vad jag anser är viktigt för kursen, samt försöka skapa lite mer förståelse för de olika begreppen i kursen. Läsanvisningarna kommer också ligga i grund för de föreläsningar som vi kommer ha på de olika momenten. Läsanvisningarna kommer även vara en del av eran kurslitteratur, och jag förväntar mig att ni läser dem noga och reflekterar över dess innehåll. Läsanvisningarna kommer att följa bokens linjer med vissa tillskott; lite flera satser, definitioner och några annorlunda bevis, satser och definitioner. De flesta av de tillskotten jag har valt att lägga till ger en modern syn på komplex analysen, och dessa kommer jag speciellt trycka på under kursens gång.

Låt oss nu börja:

1.1 Komplexa tals algebraiska struktur

Vi kommer hela tiden beteckna \mathbb{R} som de reella talen, och \mathbb{C} som de komplexa talen, som vi under kursens gång kommer lära känna lite bättre. Det första avsnittet i boken kommer vara, hoppas jag i alla fall, en ren repetition av de komplexa talens algebraiska struktur. Boken gillar representera komplexa tal genom den så kallade rektangulära formen, dvs på formen $x + yi$, och jag tycker att man ska se komplexa tal som en punkt i det komplexa talplanet. Det tåls att påpeka att den rektangulära formen är bara *ett* sätt att representera ett komplext tal. Ett annat sätt är den så kallade polära formen, som dyker upp i avsnitt 1.3 och 1.4, och ett tredje sätt är genom en matrisrepresentation: om $z = x + yi \in \mathbb{C}$, så kan vi representera z genom en 2×2 matris, nämligen

$$z = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Detta gör man genom att välja lämplig bas i \mathbb{R}^2 . Varför blir detta ett komplext tal? Prova att reda ut detta, genom att till exempel multiplicera två stycken komplexa tal på denna form. Vad lärde vi oss av detta då? Jo, ett komplext tal är en punkt i planet som kan representeras på ett flertal sätt.

En intressant egenskap som de komplexa talen har, i jämförelse med de reella talen är följande:

Lemma 1.1. Om $z \in \mathbb{C}$ så existerar det en $w \in \mathbb{C}$ så att $w^2 = z$.

Beviset av detta lemma kan ni se som en lätt övning, ett tips är att ni låter $z = a + bi$ och $w = x + yi$ och helt enkelt löser ekvationen $w^2 = z$ för de reella talen x och y . Om ni räknar rätt så får ni ett ekvationssystem på följande form:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} .$$

Som ni alla vet så blir Lemma 1.1 svårt att lösa för de reella talen, för t.ex. så finns det inget reellt tal x så att $x^2 = -1$.

Det finns fler olikheter mellan \mathbb{R} och \mathbb{C} . Man kan nämligen inte prata om ett positivt eller negativt komplext tal, utan det är en egenskap som de reella talen har. Detta är en väldigt viktig del i förståelsen av de komplexa talen, och jag rekommenderar att ni försöker göra uppgift 1.1.30 i boken som utreder detta faktum.

Jag ska bara kort nämna real och imaginärdelen av ett komplext tal, som jag egentligen bara gör för att påpeka någon egenskap hos dessa. Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så är realdelen respektive imaginärdelen till z

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad , \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad ,$$

så $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$. Funktionerna Re och Im har en linjäritetsegenskap, nämligen

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \quad , \quad \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w).$$

Men de uppfyller däremot inte en multiplikativ egenskap:

$$\operatorname{Re}(zw) \neq \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(w) \quad , \quad \operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w).$$

1.2 Punktrepresentationen av ett komplext tal

Detta avsnitt handlar egentligen om att man på enklaste vis kan identifiera \mathbb{C} med \mathbb{R}^2 . Detta faktum borde inte förvåna er allt för mycket, eftersom man i elementära kurser brukar ha denna syn. Rent konkret så låter man, om $z = a + bi \in \mathbb{C}$, vara punkten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Men en punkt i \mathbb{R}^2 kan ju representeras som en vektor, så vi kan börja prata om vinklar, längder med mera. En längd av en vektor (a, b) i \mathbb{R}^2 ges, via Pythagoras sats, av $\sqrt{a^2 + b^2}$, så via våran identifikation med \mathbb{C} , så kan vi definiera **absolutbeloppet** av $z = a + bi$ genom

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Eftersom detta är längden av en vektor i \mathbb{R}^2 , så är det bättre att se, precis som i det reella fallet, absolutbeloppet som avståndet från z till origo. På detta vis så är

$|z - w|$ helt enkelt avståndet från z till w . Jämför med det reella absolutbeloppet som definieras genom

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} .$$

En väldigt viktig egenskap som det komplexa absolutbeloppet, som vi hädanefter bara kommer benämna med absolutbeloppet, har är att även den uppfyller den så kallade triangelolikheten:

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Denna har ni som uppgift att visa i uppgift 1.3.15. Försök att göra denna uppgift på två sätt; både geometriskt och med mer handfast räknande. Triangelolikheten kan generaliseras på följande sätt

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| .$$

Denna är dock inte lika lätt att visa. Slutligen ska jag nämna en annan egenskap hos absolutbeloppet:

$$z\bar{z} = |z|^2 ,$$

som trots sin enkelhet kan vara en väldigt användbar likhet. Här är \bar{z} , förstås, det komplexa konjugatet, dvs om $z = x + iy$ så är $\bar{z} = x - iy$.

1.3 Vektorer och polära former

Vi fortsätter med, genom detta avsnitt också, att betrakta \mathbb{C} som \mathbb{R}^2 . Man börjar nu allt mera se komplexa tal som vektorer, som element i \mathbb{R}^2 . Detta gör man bitvis för att kunna definiera en vinkel mellan vektorn i fråga och realaxeln, dvs x -axeln. Denna vinkel kallas för **argumentet** för ett komplext tal. En väldigt viktig anmärkning är att argumentet *inte* ett tal utan en mängd, nämligen om $z \in \mathbb{C}$ så är

$$\arg(z) := \{ \theta + 2\pi n : n \in \mathbb{Z} \} ,$$

där \mathbb{Z} är mängden av alla heltal, och θ är vinkeln mellan vektorn z och realaxeln.

Exempel 1. Om $z = 1 + i$ så är

$$\arg(z) = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

och *inte*

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} .$$

Däremot så kommer $\frac{\pi}{4} \in \arg(z)$. □

Hoppas detta synsätt inte förvirrar alltför mycket. Låt oss förvirra lite mera: Om $z \in \mathbb{C}$ och om vi har beräknat mängden $\arg(z)$, så kan vi förstås välja att restringera denna mängd till ett halvöppet intervall istället, av längd t.ex 2π . Då man gör en sådan restriktion, så kommer det för alla $z \in \mathbb{C}$ finnas ett unikt θ så att $\arg(z) = \theta$. Ett val av ett sådant intervall, och observera att det verkligen är ett val man gör, brukar man kalla en **gren** av $\arg(z)$. Den speciella grenen $]-\pi, \pi]$ kallas för **principalgrenen** och då vi kollar på denna gren så brukar vi skriva $\arg(z)$ som $\text{Arg}(z)$, där det versala A:et är viktigt. Då brukar vi kalla Arg för **principalargumentet**. Med detta synsättet i bakfickan så kan vi via en identifiering av \mathbb{R}^2 med \mathbb{C} ta oss fram till en vektorform för komplexa tal, dvs något som bestäms av en längd och en riktning. Denna representation kallas för **polär form** och skrivs som

$$z = x + yi = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) ,$$

där $\theta = \text{Arg}(z)$. Observera att $\cos \theta + i \sin \theta$ är en enhetsvektor, så denna bestämmer bara riktningen på våran vektor z . Därefter skalar vi denna enhetsvektor med längden av z .

Slutligen vill jag bara påpeka att ni bör göra uppgift 1.3.13, som utreder några egenskaper hos Arg . Denna uppgift är med så att ni inte ska göra några enkla misstag när ni räknar med principalargumentet.

1.4 Den komplexa exponentialen

Den komplexa exponentialen introduceras i detta avsnitt, och i skillnad med reell analys så defnierar man *inte* den komplexa exponentialen genom att låta $e^z = w$ om och endast om $z = \log w$. Man utgår istället från vad man vill att den ska uppfylla, nämligen

$$(1) \quad e^z e^w = e^{z+w}$$

$$(2) \quad \frac{de^z}{dz} = e^z ,$$

för alla $z, w \in \mathbb{C}$. Eftersom boken gör denna "approach" så kan ni läsa om hur man går vidare från dessa två ekvationer där. I alla fall så kommer man fram till att det är bäst att definiera e^z genom

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y) ,$$

där $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Utifrån detta så ser man bland annat att $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Nu kanske ni reagerar, eftersom vi sa att ett komplext tal z är på polär form om $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, så vi kan skriva varje komplext tal z , förutsatt att det är noll förstås, som $z = |z|e^{i\theta}$, där $\theta = \text{Arg}(z)$. Speciellt ger definitionen av den komplexa exponentialen att

$$|e^z| = |e^x e^{yi}| = |e^x| |e^{yi}| = e^x ,$$

eftersom $e^x > 0$.

1.5 Exponenter och rötter

Exponenter och rötter är något som ni alla känner till från tidigare kurser. Kom ihåg att ekvationer på formen $z^k = 1$ ger upphov till jämnt fördelade lösningar på enhetscirkeln $|z| = 1$.

1.6 Topologi

Nu har vi kommit fram till ett avsnitt som är väldigt viktigt att få en bra känsla för. Vi kommer i detta avsnitt koncentrera oss på de mängder vi kommer att jobba med under så gott som hela kursen, nämligen öppna mängder. Topologiska begrepp som öppna, slutna och sammanhängande mängder känner ni flesta redan till från tidigare analyskurser, men jag tänkte göra en hyfsad genomgång ändå. Om ni inte visste det så är topologiska begrepp något som är viktigt inom analysen, eftersom de beskriver öppna mängder, och öppna mängder är något som de ”flesta” definitioner och satser bygger på.

Så vad är en öppen mängd. Boken kör en något annorlunda definition av en öppen mängd, än vad jag kommer att göra. Jag kommer kort och gott säga att en mängd $U \subset \mathbb{C}$ är **öppen** om för varje $z \in U$ så innehåller U en öppen boll $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, där $r > 0$. Denna definition kräver dock att man vet den definition som boken ger samt att man vet att bollen $B(z, r)$ är öppen. Att $B(z, r)$ är öppen kan ni visa i uppgift 1.6.1, så tills vidare så får ni helt enkelt köpa att $B(z, r)$ är öppen. Observera att denna boll är egentligen en disk, men jag säger oftast boll. Observera vidare att en öppen mängd i \mathbb{R} är inte öppen i \mathbb{C} , eftersom alla öppna mängder i \mathbb{R} är öppna intervall, och dessa innehåller ingen boll i \mathbb{C} . Vidare så säger vi att en mängd $S \subset \mathbb{C}$ är **sluten** om $S^c := \mathbb{C} \setminus S$ är en öppen mängd. Observera att denna definition är en övning i boken, nämligen uppgift 1.6.13.

En annan viktig topologisk egenskap är att vara både öppen och sammanhängande. Detta kallas ett **område** eller **domän**. En definition som ni säkert känner till är att en mängd $U \subset \mathbb{C}$ sägs vara (**topologiskt**) **sammanhängande** om det *inte* finns $A \subset U$ och $B \subset U$ öppna så att $A \cap B = \emptyset$ och $A \cup B = U$. Denna definition finns inte i boken, utan boken säger att en *öppen* mängd $U \subset \mathbb{C}$ är (**polygontågs**)-**sammanhängande** om det till varje par av punkter så finns det ett polygontåg helt i U som sammanbinder punkterna. Ett **polygontåg** är helt enkelt en följd av räta linjer med sammanbundna ändpunkter.

Anmärkning till definitionen av sammanhängande.

Polygontågsdefinitionen kräver *öppna* mängder medan i den andra så funkar det med vilken mängd som helst. \square

Exempel 2. Ett typexempel på ett en mängd som är topologiskt sammanhängande men inte polygontågs-sammanhängande är en halvcirkel. Denna är en sluten och

topologiskt sammanhängande mängd, men vi kan inte förbinda två punkter på cirkelbågen med ett polygontåg. \square

Däremot så är dessa två sammanhängande-definitioner samma sak på öppna mängder:

Sats 1.2. *Låt U vara öppen i \mathbb{C} . Då är U polygontågs-sammanhängande om och endast om U är topologiskt sammanhängande.*

Bevis. Börja anta att U är polygontågs-sammanhängande. Antag vidare, för en motsägelse, att U inte är topologiskt sammanhängande. Då är $U = V \cup W$ där V, W är icke-tomma och öppna. Observera att V och W är slutna. Låt $z \in V$ och $w \in W$. Enligt antagande så finns det ett polygontåg mellan z och w . Låt detta polygontåg ges av en kurva $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ så att $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$, dvs en kurva som börjar i z och slutar i w . Låt

$$T = \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in V\}.$$

Observera att $T \neq \emptyset$, eftersom $0 \in T$, och observera att T är begränsad av 1. Låt c vara den minsta övre begränsningen till T , dvs $c = \sup T$. Då är $c \neq 1$, och per definition av övre begränsning så finns det en följd $\{t_n\}$ med $c < t_n \leq 1$ så att $\gamma(t_n) \in W$ och $t_n \rightarrow c$. Kontinuitet ger att

$$\gamma(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n),$$

så eftersom W är sluten så följer det att $\gamma(c) \in W$.

På samma sätt så finns det en följd $\{s_n\}$ med $0 \leq s_n \leq c$ så att $s_n \rightarrow c$ och $\gamma(s_n) \in V$. Nu ger kontinuitet och slutenhet hos V att $\gamma(c) \in V$. Dessa båda följdargument ger vår motsägelse, så U är topologiskt sammanhängande.

Antag nu att U är topologiskt sammanhängande. Låt $z_0 \in U$, och låt

$$V = \{z \in U : z \sim z_0\},$$

där \sim betyder att det finns ett polygontåg mellan z och z_0 . Vi påstår att V är öppen, så låt oss visa detta:

Antag att det finns ett polygontåg från z_0 till z_1 i U . Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z_1, r) \subset U$. Om $z \in B(z_1, r)$ så finns ett polygontåg, en rät linje i detta fall, från z till z_1 . Alltså finns det en även ett polygontåg från z till z_0 via z_1 , så V är verkligen öppen.

Vi påstår härnäst att V är sluten. Antag därför att $\{z_n\} \subset V$ är en följd och att $z_n \rightarrow z \in U$. Vi måste visa att $z \in V$. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(z, r) \subset U$ kring z med radie r . För något n så kommer $z_n \in B(z, r)$. Då finns det en rät linje i $B(z, r)$ från z till z_n , för det fixerade n :et ovan. Alltså finns det ett polygontåg från z till z_0 , så $z \in V$.

Vi har nu visat att V är både öppen och sluten, så $V = U$, vilket gett att U är polygontågs-sammmanhängande. \square

Vi har nu kommit fram till bokens första ”riktiga” sats, som grovt säger att om $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett område, uppfyller att dess partiella derivator försvinner så måste f vara konstant. Dess bevis är ganska lätt och bygger på att man kan byta ut räta linjer i polygontåg som varken är horisontella eller vertikala mot en kedja av små horisontella och vertikala linjer.

Slutligen så går boken igenom några fler topologiska begrepp:

Vi säger att en mängd $S \subset \mathbb{C}$ är **begränsad** om det finns en boll $B(z, r) \supset S$, där $z \in S$ och $r > 0$. Detta betyder alltså att för alla $z \in S$ så måste $|z| < r$.

Ibland vill man kolla på randen till en mängd, ganska ofta faktiskt. Vi säger att z är en **randpunkt** till $S \subset \mathbb{C}$ om varje boll kring z innehåller åtminstone en punkt i S och en punkt utanför S . Mängden av randpunkter till en mängd S skriver vi som ∂S .

1.7 Riemannsfären och den stereografiska projektionen

Den så kallade Riemannsfären är inget annat än det komplexa talplanet \mathbb{C} med en extra punkt som vi har format en sfär av. Den punkten som vi lägger till är ∞ , och denna punkt låter vi vara nordpolen på sfären. Vi identifierar denna sfär med enhetssfären, dvs den med radie 1, och det är enhetssfären som vi brukar kalla Riemannsfären. Vi kommer beteckna det utvidgade komplexa talplanet med $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. I \mathbb{C}_∞ har vi följande räkneregler:

- $z + \infty = \infty$
- $z \cdot \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{z}{\infty} = 0$

Den stereografiska projektionen använder vi för att identifiera punkter på Riemannsfären med punkter i planet. Den fungerar på följande vis:

- Låt Riemannsfären stå med sydpolen i origo i \mathbb{C}_∞ .
- Tag en punkt p på Riemannsfären.
- Drag en rät linje genom nordpolen(N) och p .
- Den punkt som linjen skär \mathbb{C}_∞ är värdet för den stereografiska projektionen.

Observera att nordpolen och $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ avbildas på varandra via den stereografiska projektionen.

Det första exemplet i detta avsnitt är väldigt viktigt, och beskriver den inversa stereografiska projektionen i koordinater. Här är en genomgång av exemplet:

Exempel 3. Låt $z = x + yi$. Identifiera \mathbb{C} med \mathbb{R}^2 , så $z = (x, y)$. Eftersom Riemannsfären ligger i \mathbb{R}^3 så kan vi via en identifiering mellan \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^3 uppfatta z som punkten $(x, y, 0)$. Linjen l genom $N = (0, 0, 1)$ och $z = (x, y, 0)$ ges då av, enligt en linjär algebra kurs,

$$(x_1, x_2, x_3) = l(t) = N + t\vec{Nz} = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) = (tx, ty, 1-t) \quad -\infty < t < \infty.$$

Eftersom sfärens ekvation ges av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ så skär linjen sfären precis då

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 = t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t + 1.$$

Denna ekvation är samma sak som

$$t(t(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0,$$

som har lösningarna $t = 0$ eller $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}$. Om $t = 0$ så hamnar vi via linjen l i nordpolen $(0, 0, 1)$. Annars så får vi att

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Detta bestämmer alltså en punkt på Riemannsfären om vi utgår från en punkt $z = x + yi$ i det komplexa talplanet. \square

Exempel 4. Punkten $z = 1 + i$ korresponderar mot punkten

$$\left(\frac{2 \operatorname{Re}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(1 + i)}{|1 + i|^2 + 1}, \frac{|1 + i|^2 - 1}{|1 + i|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

på Riemannsfären. \square

Om vi vill uttrycka den stereografiska projektionen i koordinater så kan vi använda exemplet ovan:

Exempel 5. Låt (x_1, x_2, x_3) vara en punkt på Riemannsfären. Då kan vi använda oss av en linje genom N och (x_1, x_2, x_3) ner till \mathbb{C} . Denna ges då av

$$x = \frac{x_1}{t}, \quad y = \frac{x_2}{t}, \quad t = 1 - x_3,$$

så

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Detta ger en punkt $z = x + yi$ i \mathbb{C} . \square

Exempel 6. Låt oss använda den stereografiska projektionen på punkten $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Vi får då enligt exemplet ovan att

$$x = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad y = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 ,$$

så $z = 1 + i$ är bilden av den stereografiska projektionen. Jämför exempel 4. \square

Jobba nu igenom exempel 2 i boken, vilkens förståelse kommer vara viktigt för oss senare under kursen.

Efter detta så gör boken en utredning om avstånd på Riemannsfären. Försök att få en bra geometrisk bild av Riemannsfären och detta avstånd. Detta kommer inte vara ett avstånd på sfären, utan det Euklidiska avståndet i \mathbb{R}^3 . Kan ni tänka ut vad det kortaste avståndet på sfären är, dvs om man transporteras på ytan. (*Ledning: Jämför uppgift 1.7.3*).

2.1 Funktioner i en komplex variabel

Nu är det dags att titta på funktioner $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Det första betraktelsesättet man går igenom är att man ännu en gång ser \mathbb{C} som \mathbb{R}^2 , dvs vi skriver ett komplext tal z på formen $x + yi$. På detta vis så kan vi dela upp vår funktion som

$$f(z) = f(x + yi) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

där u och v är reellvärda funktioner i två reella variabler. Observera att grafen till $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, som man brukar beteckna med $\Gamma(f)$, är ett 4-dimensionellt reellt vektorrum.

Anmärkning 1. Grafen definieras genom

$$\Gamma(f) = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : f(z) = w\}.$$

\square

Exempel 7. Låt oss uttrycka funktionen $f(z) = e^{3z}$ på formen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. För att göra detta, låt $z = x + yi$. Då är

$$\begin{aligned} f(z) = f(x + yi) &= f(x, y) = e^{3(x+yi)} = e^{3x} e^{3yi} = e^{3x} (\cos 3y + i \sin 3y) = \\ &= e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y. \end{aligned}$$

\square

Exempel 8. Låt $z = x + yi$ och betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$. Vi ska skriva f i termer av z och \bar{z} . För att göra detta så börjar vi att komma ihåg att

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

och

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Då får vi att

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right) - 2 + i\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right) = \dots \\ &\dots = |z|^2 + i\bar{z} - 2, \end{aligned}$$

$$\text{så } f(x, y) = f(z) = |z|^2 + i\bar{z} - 2. \quad \square$$

Detta exempel ger oss en väg från \mathbb{R}^2 till \mathbb{C} , och det är ett mycket mer "komplext" vis att skriva funktioner i termer av z och \bar{z} , dvs se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ som en funktion i z och \bar{z} . Så genom transformationerna $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ och $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ kan vi uppfatta funktioner i x och y som funktioner i z och \bar{z} , som då kommer ge samma information om funktionen i fråga. Eftersom vi håller på med komplex analys så tycker jag att det är bättre att få en komplex syn på det hela.

2.2 Kapitel 2.2 - Gränsvärden och kontinuitet

Detta avsnitt borde vara välkänt för alla. Det enda som skiljer det komplexa synsättet från det reella är att vi har en dimension extra. Låt oss repetera lite ändå.

Genom denna repetition kommer jag vara lite oprecis och lite slapp i beteckningarna. Vi säger att en följd $\{z_n\}$ **konvergerar** mot z , $z_n \rightarrow z$, om följden för eller senare ligger godtyckligt nära z , dvs om det finns en boll kring z med godtycklig liten radie så att "svansen" på följden ligger helt i bollen. Konvergenta följder är begränsade, så speciellt om $z_n \rightarrow z$ så är

$$\lim_{w \rightarrow 0} |w||z_n - z| = 0.$$

Detta kan vara användbart i vissa tillfällen. Observera att $z_n = x_n + y_n i \rightarrow x + y i$ om och endast om $x_n \rightarrow x$ och $y_n \rightarrow y$ (se uppgift 2.2.3).

Kontinuitet för komplexa funktioner är en direkt generalisering av den reella kontinuiteten, så det borde inte vara något problem att följa boken.