Läsanvisningar
till
kapitel 2.3 – 2.5

2.3 Analytiska funktioner

Analytiska funktioner, eller holomorfa funktioner som vi kommer kalla dem, är de funktioner som vi komer studera så gott som resten av kursen. Boken kommer i början av detta avsnitt gå igenom vad för slags funktioner som är ”tillåtna”. Det är dessa funktioner som vi kommer kalla holomorfa. Det boken trycker på är att de tillåtna funktionerna är precis de som inte innehåller några $\overline{z}$. Vi ska nu gå ifrån boken och definiera holomorficitet på ett annorlunda vis, genom en rad av definitioner.

Definition 2.1. *Låt $U \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f\colon U \to \mathbb{R}$ en funktion. Vi säger att f är en $\mathcal{C}^k$-**funktion**, $k \in \mathbb{N}$ fixt, om alla dess partiella derivator existerar och är kontinuerliga. Vi skriver detta som $f \in \mathcal{C}^k(U)$.*

Anmärkning 1. Vi definierar $\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(U)$, och säger att $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ är **slät** på U, eller bara $\mathcal{C}^\infty$ på U. □

Så hur gör man då för en funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, där $U \subset \mathbb{C}$ är öppen. jo, vi säger att $f \in \mathcal{C}^k(U)$ om $u, v \in \mathcal{C}^k(U)$, där $f = u + iv$.

Definition 2.2. *Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en $\mathcal{C}^1$-funktion och låt $z = x + yi$. Då definierar vi*

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f.$$

Anmärkning 2. Differentialoperatorerna $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ är båda komplexlinjära, dvs

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{\partial}{\partial z} f + \beta \frac{\partial}{\partial z} g$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ och $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$. □

Nu kanske ni tycker det känns konstigt med ett minustecken på $\frac{\partial}{\partial z}$ och inget minustecken på $\frac{\partial}{\partial z}$, men denna definition kommer egentligen från följande:

Jo, man vill att $\frac{\partial}{\partial z}$ och $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ ska uppfylla att

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 \ , \quad \frac{\partial}{\partial z} \overline{z} = 0$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{z} = 1$$

så man definierar differentialoperatorerna så att dessa ekvationer blir uppfyllda.

Anmärkning 3. Ni har sett detta sätt att definiera saker tidigare, nämligen när vi definierade e^z. □

Det är dags att definiera holomorficitet, och eftersom man inte vill tillåta $\overline{z}$ så definierar man

Definition 2.3. *Låt $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen. Vi säger att f är* **holomorf** *om*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0.$$

Detta betecknar vi med $f \in \mathcal{O}(U)$.

Observation 1. Så ett sätt att se holomorficitet är att f ligger i kärnan till differentialoperatorn $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. □

Exempel 1. I de föregående läsanvisningarna så uttryckte vi funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 2 + ix$ som $f(z) = |z|^2 + i\overline{z} - 2$. Enligt definitionen för holomorficitet så är denna funktion inte holomorf. □

Vidare så säger vi att en funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som är holomorf på hela $\mathbb{C}$ kallas **hel** (*eng. entire*), dvs $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

I boken så kan ni läsa att en funktion som är deriverbar i varje punkt är holomorf, och denna definition är förstås ekvivalent med våran definition av holomorficitet (försök gärna visa detta). Men vad är då derverbarhet? Jo, det är samma sak som i det reella fallet, men för fullständighetens skull, låt oss även ge denna definition:

Definition 2.4. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är öppen och att $f\colon U \to \mathbb{C}$ är en funktion. Om gränsvärdet*

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \qquad w \in U$$

existerar så säger vi att f är deriverbar i w. Detta skriver vi som $f'(w)$ eller $\frac{df}{dz}\Big|_w$.

Anmärkning 4. Blanda inte ihop $\frac{d}{dz}$ med $\frac{\partial}{\partial z}$. □

Observation 2. f' kan existera på U utan att $f \in \mathcal{C}^1(U)$. $\square$

Alla deriveringsregler fungerar som vanligt, dvs produktregeln och kvotregeln. Följande sats knyter samman holomorficitet och deriverbarhet. Det är en bra övning att försöka visa den.

Sats 2.5. *Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och $f : U \to \mathbb{C}$ en funktion. Då gäller*

(a) *Om $f \in \mathcal{O}(U)$ så existerar f' på U och $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ på U.*

(b) *Om $f \in \mathcal{C}^1(U)$ och f' existerar så är f holomorf på U.*

Detta betyder alltså speciellt att $\frac{d}{dz}$ och $\frac{\partial}{\partial z}$ är samma sak för funktioner som vi vet är holomorfa, t.ex. funktionen z.

Exempel 2. Låt $p(z) = az^n$. Låt oss visa att p är en hel funktion. För det första så ger binomialsatsen att p är en $\mathcal{C}^1$ funktion på hela $\mathbb{C}$. Vidare så har vi, enligt linjäritet, produktregeln och att z är holomorf, att

$$\frac{d}{d\bar{z}} z^n = 0.$$

Alltså p holomorf på hela $\mathbb{C}$. Gör detaljerna själva. $\square$

Låt oss avsluta med en liten diskussion om holomorfa funktioner. Vad är det som är så himla bra med dem, och vad skiljer dem från reellt deriverbara funktioner. Jo, holomorfa funktioner är oändligt många gånger deriverbara, medan en reell funktion som är deriverbar på en öppen mängd behöver inte vara två gånger deriverbar på samma öppna mängd. För holomorfa funktioner så är deriverbarhet och holomorficitet samma sak. Detta faktum kommer från att för att komplexa gränsvärden ska existera så måste man gå mot gränspunkten på väldigt många sätt, så deriverbarhet blir helt plötsligt något starkt.

2.4 Cauchy-Riemanns ekvationer

Cauchy-Riemanns ekvationer är både nödvändiga och tillräckliga villkor på att en funktion ska vara holomorf. Bokens bevis av detta är ganska knöligt, medan våran moderna "approach" blir väldigt enkel.

Sats 2.6. *Antag att $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Antag även att $f = u + iv$. Då är $f \in \mathcal{O}(U)$ om och endast om*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

gäller i varje punkt i U.

Anmärkning 5. Ekvationerna ovan brukar kallas för **Cauchy-Riemanns ekvationer**. □

Bevis. Antag först att $f \in \mathcal{O}(U)$. Då gäller att

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) ,$$

dvs att $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Omvänt om Cauchy-Riemanns ekvationer håller på U, så betyder det att

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 ,$$

så $f \in \mathcal{O}(U)$. □

Följd 2.7. *Om $f\colon U \to \mathbb{C}$ är holomorf, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, så är*

$$\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{\partial}{\partial x}f = -i\frac{\partial}{\partial y}f.$$

Bevis. Eftersom f är holomorf så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f ,$$

dvs $\frac{\partial}{\partial x}f = -i\frac{\partial}{\partial y}f$. Vidare så är

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right)f$$

så $\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{\partial}{\partial x}f$. □

Vi ska nu visa satsen i boken som säger att om derivatan är identiskt noll för en funktion så är funktionen konstant. Bokens bevis bygger egentligen på en sats från den reella analysen, så vi har valt att bevisa satsen med mer komplexa metoder. Lägg märke till bevismetoden för satsens bevis, som är ofta vanlig; man visar en sak lokalt först (i en boll), och därefter använder man detta för att visa det generella resultatet.

Sats 2.8. *Antag att $f \in \mathcal{O}(D)$, där $D \subset \mathbb{C}$ är ett område, och att $f' \equiv 0$ på D, då är f konstant på D.*

Bevis. Låt $B(a, r)$ vara en boll kring $a \in D$ med radie r. Då ligger denna boll helt inne i D, eftersom D är öppen, och kom ihåg att en boll är sammanhängande. Tag nu en godtycklig punkt $b \in B(a, r)$. Om vi visar att $f(a) = f(b)$ så kommer detta betyda att f är konstant. Eftersom $B(a, r)$ är sammanhängande så kan vi hitta ett polygontåg mellan a och b, som bara består av vertikala och horisontella linjer, som ligger helt inne i $B(a,r)$. Om det finns en hörnpunkt, kalla denna c. Då är $c = a+h$ och $b = c+ik$ för några $h,k \in \mathbb{R}$. Vi kan anta att $h \geq 0$, eftersom annars är det bara att byta roll på a och c. Sätt

$$g(x) = f(a+x).$$

Detta är en funktion i en reell variabel och är definierad i en omgivning av $[0,h]$. För $x \in [0,h]$ betrakta

$$g'(x) = \lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{f(a+y) - f(a+x)}{y - x} = f'(a+x) = 0 \ ,$$

eftersom $f \in \mathcal{O}(B(a,r))$ och $f' \equiv 0$ på $B(a,r)$. Alltså är g konstant på $[0,h]$, eftersom g är reell. Detta ger att

$$f(c) = g(h) = g(0) = f(a).$$

På samma sätt så får vi att $f(b) = f(c)$ så $f(a) = f(b)$, vilket ger att f är konstant på $B(a,r)$.

Låt oss nu betrakta vårt område D. Fixera ett $a \in D$ och tag en godtycklig $b \in D$. Eftersom D är sammanhängande så kan vi hitta ett polygontåg γ mellan a och b. Välj nu, för varje $p \in \gamma$, en boll $B(p,r)$ som ligger helt inne i D. Detta är förstås möjligt eftersom D är öppen. Observera att alla dessa bollar kommer att täcka γ, och eftersom γ är kompakt så kan vi välja ut ett ändligt antal av dessa bollar. Enligt vårat lokala resultat för en boll så kommer f vara konstant på alla dessa bollar. Eftersom vi har ett ändligt antal bollar så kommer f vara konstant på hela γ. På grund av att b var godtyckligt vald, så drar vi slutsatsen att f är konstant på hela D. $\square$

Villkoret här, precis som i sats 1 i avsnitt 1.6, så är det viktigt med en sammanhängande mängd. För t.ex. om f är konstant 0 på en öppen mängd A och 1 på en annan öppen mängd B, och A och B är disjunkta, så är $f' \equiv 0$ på $A \cup B$ men $f(a) \neq f(b)$ för alla $a \in A$ och $b \in B$.

2.5 Harmoniska funktioner

Harmoniska funktioner är de som ligger i kärnan till Laplaceoperatorn

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mer precist, om $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ett område, så säger vi att f är **harmonisk** om

$$\Delta f = 0.$$

på D. Laplaceoperatorn kan komplext uttryckas genom

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}.$$

Visa gärna detta faktum som en övning.

Vi har följande förhållande mellan holomorfa och harmoniska funktioner:

Sats 2.9. *Låt $D \subset \mathbb{C}$ vara ett område och $f : D \to \mathbb{C}$ vara en holomorf funktion på D. Skriv $f = u + iv$, då är u och v harmoniska på D.*

Beviset är en direkt konsekvens av Cauchy-Riemanns ekvationer och ni bör försöka bevisa denna sats innan ni tittar i boken.

Men hur är det med omvändningen till denna sats. Om vi har en harmonisk funktion u, kan vi då hitta en harmonisk funktion v så att $f = u + iv$ blir holomorf? Svaret är ja, och då kallar man v för harmoniska konjugatet till u. Låt oss förklara hur det går till:

- Vi utgår från att u är en harmonisk funktion.
- Vi vill hitta en harmonisk v så att $f = u + iv$ blir holomorf, så utifrån Cauchy-Riemanns ekvationer har vi att

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

  som genom integrering bestämmer v plus en konstan C som beror på x, så $v(x, y) = p)x, y) + C(x)$. (Detta beror på vilken ekvation vi integrerar).
- Cauchy-Riemanns ekvationer ger nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}\ ,$$

  som då bestämmer $C'(x)$, som i sin tur bestämmer $C(x)$.
- På detta sätt så har vi bestämt v så att $f = u + iv$ blir holomorf.

Exempel 3. Vi ska konstruera en holomorf funktion f så att $\mathrm{Re}(f) = u(x, y) = ax^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$ och $f(0) = i$, där $a \in \mathbb{R}$. För att kunna göra detta så måste u vara harmonisk. Vi har att

$$\Delta u = 6ax + 2 - 2x - 2 = 6ax - 12x.$$

Alltså är u harmonsik om och endast om $6ax - 12x = 0$, dvs om $a = 2$. Vi har alltså bestämt a så att u blir harmonisk.

För att bestämma ett harmoniskt konjugat till u betraktar vi Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy + 2y + 1 \end{cases} .$$

Utifrån $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2x$ så kan vi integrera med avseende på y, vilket ger att

$$v(x, y) = 6x^2 y - 2y^3 + 2xy + C(x) ,$$

där $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bara beror på x. Vi får nu att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy + 2y + C'(x) = 12xy + 2y + 1$$

enligt ekvationerna ovan. Alltså måste $C'(x) = 1$, så $C(x) = x + d$, för $d \in \mathbb{R}$. Detta ger att alla harmoniska konjugat till u ges av

$$v(x, y) = 6x^2 y - 2y^3 + 2xy + x + d.$$

Alltså är de holomorfa funktioner som uppfyller $u = \mathrm{Re}(f)$:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i(6x^2 y - 2y^3 + 2xy + x + d).$$

Utifrån $f(0) = i$ så får vi att $d = 1$, och om vi uttrycker f i termer av z och $\overline{z}$ så får vi att $f(z) = 2z^3 + z^2 + iz + i$. Detta bekräftar att f verkligen är holomorf. $\square$