Läsanvisningar till kapitel $3.1 - 3.5$

3.1 Polynom och rationella funktioner

I början av detta avsnittet så går boken igenom hur man faktoriserar polynom. Jag utgår från att ni vet hur man gör detta.

Låt nu $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ vara ett polynom av grad n. Vi kan då skriva om p i termer av $(z - w)$. Detta gör man genom att betrakta $p(\zeta + w)$ varvid man får att

$$p(\zeta + w) = d_0 + d_1\zeta + \cdots + d_n\zeta^n.$$

Substituera nu tillbaka till z, dvs $\zeta = z - w$, så får vi att

$$p(z) = d_0 + d_1(z - w) + \cdots + d_n(z - w)^n.$$

Det som kan vara lite krångligt, dvs kräver mycket uträkningar, är att hitta koefficienterna $d_0, \dots, d_n$. Vore det inte bra om man kunde hitta dessa på något lättare sätt. Som tur är så finns det ett lätt sätt, nämligen att observera att

$$\begin{aligned}
&p(w) = d_0\\
&p'(w) = d_1\\
&p''(w) = 2d_2\\
&p^{(3)}(w) = 2 \cdot 3d_3\\
&\vdots\\
&p^{(n)}(w) = n!d_n
\end{aligned}$$

Detta bestämmer $d_0, \dots, d_n$, så vi får att

$$p(z) = \frac{p(w)}{0!} + \frac{p'(w)}{1!}(z - w) + \cdots + \frac{p^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(w)}{k!}(z - w)^k.$$

Alltså får vi Taylorutvecklingen av p kring w.

Boken går därefter igenom partialbråksuppdelning av rationella funktioner. Detta borde vara redan känt för er sedan tidigare kurser, så jag undviker därför ämnet. Den viktiga delen är hur man ”lätt” kan beräkna de olika koeffcienterna i ansatsen, där man använder att grader på polynom minskar vid derivering. Låt oss kolla på ett enkelt exempel.

Exempel 1. Låt $f(z) = \frac{2z}{(z+i)(z+1)}$. Vi ska nu använda partialbråksuppdelning för att skriva f som summan av två termer. Vi gör ansatsen

$$f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z+1}.$$

Vi måste nu bestämma A och B. Vi har att

$$A = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{2z}{z+1} = \frac{-2i}{-i+1} = 1 - i$$

och

$$B = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{2z}{z+1} = \frac{-2}{-1+i} = 1 + i\ ,$$

så

$$f(z) = \frac{1-i}{z+i} + \frac{1+i}{z+1}.$$

□

3.2 Den komplexa exponentialen, trigonometriska och hyperboliska funktioner

En sak man bör observera, som ni säkert gjorde i uppgift 1.4.11, är att den komplexa exponentialen inte är injektiv, utan den är periodisk med $2\pi i$. Jämför detta faktum med den reella exponentialen, som faktiskt är injektiv. Denna periodicitet utnyttjar man nu för att definiera de komplexa trigonometriska funktionerna $\sin z$ och $\cos z$. Ni känner säkert igen definitionen av de komplexa trigonometriska funktionerna från Eulers formel, som uttalar sig om den reella motsvarigheten. Eftersom e^z är hel, så kommer $\sin z$ och $\cos z$ också vara hel, eftersom de är definierade utifrån e^z.

Exempel 2. Vi ska visa att $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Sätt $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$. Eftersom $\sin z$ och $\cos z$ är hel så är även $\sin^2 z$ och $\cos^2 z$ hel, vilket ger att $f(z)$ är hel. Derivering ger att

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \cos \sin z = 0\ ,$$

så eftersom $\mathbb{C}$ är sammanhängande och öppen så betyder det att f är konstant. Eftersom $f(0) = 1$ så betyder det att $f(z) = 1$ för alla z. Alltså är $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. □

3.3 Logaritmfunktionen

Den komplexa logaritmen definierar vi som den inversa funktionen till den komplexa exponentialen, dvs

$$w = \log z \quad \text{om} \quad z = e^w \quad z \neq 0.$$

Eftersom e^z är periodisk så kommer även logaritmen bygga på argumentet:

$$\log z := \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z} \ ,$$

där ln är den reella logaritmen. Om vi nu väljer att restringera oss till en gren av argumentet, t.ex. principalgrenen, så kommer logaritmen självklart påverkas av detta. I detta fall så får vi

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

där det versala L:et är i analogi med A:et i $\operatorname{Arg} z$. Resten av avsnittet ger bara en massa egenskaper hos principal-logaritmen. Speciellt viktigt är att $\operatorname{Log} z$ är holomorf på $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Vidare har vi att

Sats 3.1. *Varje gren av* $\log z$ *är holomorf.*

och

Sats 3.2. *Det finns ingen gren av* $\log z$ *i* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Låt oss nu diskutera bokens terminologi angående flervärda funktioner. Observera att en funktion per definition är envärd, men vad menar de då med en flervärd funktion. En funktion $f\colon M \to N$, där M, N är mängder, kallas **flervärd** om för alla $p \in M$ så är $f(p)$ en delmängd till N. Vi ser alltså $f\colon M \to N$ som en flervärd funktion om $f\colon M \to \mathcal{P}(N)$ där $\mathcal{P}(N)$ är potensmängden.

Nu när vi har koll på flervärda funktioner så är det dags att få koll på koll på grenar. Låt $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, där $\Omega \subset \mathbb{C}$, vara en flervärd funktion. En **gren** av f är en funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ som är kontinuerlig i Ω och så att för varje $z \in \Omega$ är $F(z) \in f(z)$. Alltså är en gren av en flervärd funktion et kontinuerligt val av funktionsvärden så att funktionsvärdet i en viss punkt är ett av den flervärda funktionens värden.

3.4 ”Washers, wedges and walls”

Detta avsnitt går ut på att använda att både $\operatorname{Log} z$ och $\operatorname{Arg} z$ är harmoniska, eller om vi tar någon annan gren av logaritmen eller argumentet, för att hitta harmoniska funktioner med förskrivna randvärden. Låt oss göra ett exempel.

Exempel 3. Betrakta annulusen $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - (1+i)| < 2\}$. Vi ska hitta en harmonisk funktion $\phi(x, y)$ på A så att $\phi = 0$ på $|z - (1+i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z - (1+i)| = 2$.

Enligt föregående avsnitt så vet vi att $A \operatorname{Log}|z - (1+i)| + B$ är harmonisk. Enligt våra förskrivna randdata så måste vi ha att

$$A \operatorname{Log} 1 + B = 0 \ \text{ och } \ A \operatorname{Log} 2 + B = 10 \ ,$$

som ger att $B = 0$ och $A = \frac{10}{\operatorname{Log} 2}$. Detta ger att funktionen

$$\phi(x, y) = \phi(z) = 10\frac{\operatorname{Log}|z - (1+i)|}{\operatorname{Log} 2}$$

är harmonisk så att $\phi = 0$ på $|z-(1+i)| = 1$ och $\phi = 10$ på $|z-(1+i)| = 2$. $\square$

I övrigt, lägg inte ned för mycket tid på detta avsnitt, utan se det som en tillämpning på grenar och harmoniska funktioner.

3.5 Komplexa potenser och inversa trigonometriska funktioner

Komplexa potenser är något som definieras via den komplexa exponentialen och den komplexa logaritmen. Detta betyder att man ibland måste välja rätt gren för att få holomorficitet. Detta kan vara svårt ibland så låt oss göra ett exempel.

Exempel 4. Vi ska bestämma den största öppna mängd Ω så att $(1 - z^2)^{1/2}$ blir holomorf. Per definition så ges Ω av de $z \in \mathbb{C}$ så att $1 - z^2 \notin]-\infty, 0]$, så vi ska börja kolla vilka z som uppfyller att $1 - z^2 \in]-\infty, 0]$. Sätt $z = x + yi$, då får vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2xyi.$$

För att $1 - z^2 \in]-\infty, 0]$ så måste $xy = 0$, vilket ger två fall:
Fall 1: $(x = 0)$
Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 + y^2 \geq 1.$$

Fall 2: $(y = 0)$
Då har vi att

$$1 - z^2 = 1 - x^2 ,$$

så $1 - x^2 = 0$ betyder att $|x| \geq 1$.

Om vi slår ihop fall 1 och 2 så får vi att den största mängden så att $(1-z^2)^{1/2}$ blir holomorf är

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |x| < 1 \;\text{ och/eller }\; y = 0\}.$$

$\square$

Resten av avsnittet behandlar inverser till trigonometriska funktioner. Detta behöver ni bara läsa kursivt.