Läsanvisningar
till
kapitel 4.1 − 4.6

4.1 Konturer

Detta är ett avsnitt om kurvor och hur man parametriserar kurvor, som borde vara en repetition från lägre kurser. Låt oss gå igenom lite ändå.

Definition 4.1. *Låt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vara ett kompakt intervall. En* **kurva** *i $\mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$.*

Anmärkning 1. Att γ är kontinuerlig betyder att den är kontinuerlig på $]a, b[$. $\square$

Om γ är en kurva på ett intervall $[a, b]$ så säger vi att γ är **sluten** om $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ett enkelt exempel på en sluten kurva är en cirkel. Vidare så säger vi att en kurva γ är **enkel** om

$$\gamma|_{[a,b[}$$

är injektiv. Ett exempel på en enkel kurva är alla kurvor som inte skär sig själv. Kurvor som skär sig själv kan inte vara enkel, eftersom man får problem med injektiviteten i skärningspunkten.

Definition 4.2. *En kurva $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ kallas en* **$\mathcal{C}^1$-kurva**, *$\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$, om γ är en kontinuerligt deriverbar funktion.*

Definition 4.3. *En kurva $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ kallas för en* **styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva** *om det finns en ändlig partition*

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$$

så att för varje $j = 0, 1, \ldots, n - 1$ gäller att

$$\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]} \in \mathcal{C}^1([a_j, a_{j+1}]).$$

Anmärkning 2. Det är detta boken kallar för en kontur. $\square$

Om vi definierar summan av två kurvor $\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ och $\gamma_2\colon [b, c] \to \mathbb{C}$ genom

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \ t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & , \ t \in]b, c] \end{cases}$$

så ser vi att om $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva, så är

$$\gamma = \gamma|_{[a_0,a_1]} + \cdots + \gamma|_{[a_{n-1},a_n]}.$$

Kan man lägga ihop kurvor så kan man förstås dra ifrån kurvor, och en negativ kurva är inget annat än samma kurva fast åt motsatt håll, dvs om $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en kurva så definierar vi $(-\gamma)\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ genom

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$$

som genomlöper samma punkter fast i omvänd ordning.

Något som är viktigt men väldigt enkelt och intuitivt är Jordans kurvsats som ger oss en orientering av kurvor. Jordans kurvsats säger att en sluten, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}$ delar planet i två områden, nämligen i det inre och det yttre. (Se bilden på sidan 159). Om det inre är till vänster då man rör sig längs en kurva så säger vi att kurvan är **positivt orienterad**, annars så är den **negativt orienterad**.

Slutligen så går boken igenom hur man mäter längden av en kurva, som borde inte vara förvånande för någon. Det är nämligen precis samma sak som ni har lärt er under tidigare analyskurser. Längden av en $\mathcal{C}^1$-kurva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ges av

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

En viktig egenskap hos längdfunktionen är att den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ. (Längdfunktionen är alltså invariant definierad!) Låt oss visa detta.

Proposition 4.4. *Låt $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ vara en parametrisering av en kurva, och låt $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ vara en strikt växande funktion så att $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$. Då är $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ en annan parametrisering av samma kurva som γ_1 och*

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2).$$

Bevis.

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_2'(t)|dt = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)|dt$$

enligt kedjeregeln. Eftersom φ är växande så är $\varphi'(t) > 0$, vilket ger att

$$l(\gamma_2) = \int_c^d |\gamma_1'(\varphi(t))|\varphi'(t)dt.$$

Gör nu variabelsubstitutionen $s = \varphi(t)$, så $ds = \varphi'(t)dt$. Då blir de nya integrationsgränserna $\varphi(c) = a$ och $\varphi(d) = b$, så

$$l(\gamma_2) = \int_a^b |\gamma_1'(s)|ds = l(\gamma_1).$$

□

4.2 Konturintegraler

Integration definieras genom Riemannsummor, dvs via över- och undersummor. Detta är ni välbekannta med, så jag ska inte plåga er med det. Däremot så ska jag dra en annan definition av integral. Låt $f = u + iv$ vara en kontiunerlig funktion $[a, b] \to \mathbb{C}$, där u och v är kontinuerliga funktioner på $[a, b]$. Vi definierar **integralen** över $[a, b]$ genom

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Detta ligger i grund för definitionen av kurvintegraler:

Definition 4.5. *Antag att $f\colon U \to \mathbb{C}$ är en kontinuerlig funktion definierad på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva med $\gamma([a, b]) \subset U$. Då definierar vi* **integralen** *av f längs med γ genom*

$$\int_\gamma f = \oint_\gamma f(z)dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

där $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ är partitionen av $[a, b]$ från definitionen av en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva.

Anmärkning 3. Man använder ibland beteckningen $\oint$ för att säga att det är en kurvintegral. $\square$

Denna defintion visar sig vara ”vettig”, eftersom den är oberoende av val av parametrisering av kurvan γ. Jag lämnar detta som en övningsuppgift (jämför Proposition 4.4).

Exempel 1. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Om i deriverar γ så får vi $\gamma'(t) = ie^{it}$. Då blir, enligt definition,

$$\oint_\gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ie^{it}dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$\square$

Nu till ett exempel som är väldigt viktigt, som speciellt kommer vara viktigt för oss senare.

Exempel 2. Låt $\gamma(t) = e^{it}$ vara en kurva definierad på $[0, 2\pi]$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$, så

$$\oint_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n ie^{it}dt = i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)it}dt.$$

Vi får då två fall:
Fall 1: $(n \neq -1)$
Då är

$$\oint_\gamma z^n dz = i \left[\frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1} \left(e^{(n+1)i2\pi} - e^0 \right) = 0.$$

Fall 2: $(n = -1)$
Då är

$$\oint_\gamma z^n dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Alltså är

$$\oint_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1. \end{cases} .$$

□

Om $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva, så definierar man att integralen över γ att vara samma sak som att integrera över de olika delarna och lägga ihop delresultaten, dvs

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Speciellt betyder detta att om vi vill beräkna integralen över en kurva γ som vi genomlöper n gånger, så blir

$$\int_{n \cdot \gamma} f = n \int_\gamma f \ ,$$

där $n \cdot \gamma$ är kurvan γ som genomlöps n gånger.

Anmärkning 4. Om vi vill beräkna $\oint_{(-\gamma)} f$ så är detta samma sak som att beräkna $-\oint_\gamma f$. □

Två olikheter som är användbara lite då och då är

$$\left| \int f dz \right| \leq \int |f| dz$$

och $|f(z)| \leq M$ för alla z så är $\int |f|dz \leq \int M$. Vi ska nu använda dessa olikheter för att visa följande välkända sats:

Sats 4.6. *Låt $f \colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ öppen, vara en kontinuerlig funktion, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva på $[a, b]$. Antag att det existerar en konstant $M \geq 0$ så att $|f(z)| \leq M$ för alla z på γ. Då gäller*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Bevis.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq$$

$$\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\cdot l(\gamma)\ ,$$

så

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\cdot l(\gamma).$$

□

Följd 4.7. *Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$ vara en kontinuerlig funktion på den öppna $U \subset \mathbb{C}$, och låt γ vara en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. Då gäller*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\gamma(t)} |f(z)|\cdot l(\gamma).$$

Exempel 3. Låt oss visa att $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq \pi e$ då γ är övre halvan av enhetscirkeln. Vi ska använda oss av Sats 4.6. Vi börjar beräkna längden av γ:

$$l(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(t)|dt = \int_0^\pi |ie^{it}|dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

Därefter så måste vi hitta en övre gräns för $\frac{e^z}{z}$ på γ. z på γ kan skrivas som $z = e^{it} = \cos t + i\sin t$, så

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| = \left|\frac{e^{\cos t + i\sin t}}{e^{it}}\right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \leq e\ ,$$

eftersom $0 \leq \cos t \leq 1$. Så om vi sätter $M = e$ så får vi att

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leq M\cdot l(\gamma) = \pi e.$$

□

4.3 Oberoende av väg

Detta avsnitt har två höjdpunkter. Den första är en så gott som integralkalkylens huvudsats och den andra säger att vi kan integrera en funktion över vilken väg som helst, om den bara har samma start och slutpunkt. Låt oss börja med den första.

Sats 4.8. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är en öppen mängd och att $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva så att $\gamma([a,b]) \subset U$. Om $f \in \mathcal{O}(U)$ så gäller att*

$$\oint_\gamma \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_z dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bevis. Det är tillräckligt att visa satsen för en del av kurvan γ, så vi antar att γ är en $\mathcal{C}^1$-kurva. Vi börjar med att observera att $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Låt $f \circ \gamma = u + iv$. Då ger kedjeregeln att

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Detta ger att

$$\oint_\gamma \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_z = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b u'(t)dt + i\int_a^b v'(t)dt =$$

$$= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = u(b) + iv(b) - (u(a) + i(v(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Låt oss kolla på ett lätt exempel på denna sats.

Exempel 4. Låt γ vara enhetscirkeln e^{it}, $0 \leq t \leq 2\pi$. Då är $\gamma'(t) = ie^{it}$. Om $f(z) = \frac{z}{2}$ så är $f'(z) = z$. Låt oss kolla på höger respektive vänsterledet i satsen:

$$VL = \oint_\gamma f'(z)dz = \oint_\gamma zdz = \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = \frac{1}{2}[e^{2it}]_0^{2\pi} = 0.$$

$$HL = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i})^2 - \frac{1}{2}(e^0)^2 = 0\ ,$$

så $\oint_\gamma zdz = 0$, men det visste vi redan. □

Följd 4.9. *Antag att U är ett område i $\mathbb{C}$ och antag att $f \in \mathcal{O}(U)$ med $f'(z) \equiv 0$ på U. Då är f konstant på U.*

Bevis. Fizera $z_0 \in U$. För $z \in U$ så finns det en $\mathcal{C}^1$-kurva $\gamma\colon [0,1] \to U$ så att $\gamma(0) = z_0$ och $\gamma(1) = z$ (Varför?). Då ger föregående sats att

$$f(z_0) - f(z) = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1)) = \oint_\gamma f'(z)dz = \oint_\gamma 0dz = 0\ ,$$

så $f(z_0) = f(z)$. Men eftersom z var godtycklig så är f konstant. □

Nu till nästa huvudresultat.

Sats 4.10. *Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är ett område och f är kontinuerlig på U. Då är följande ekvivalent*

1. *f har en primitiv funktion i U*

2. *$\oint_\gamma f(z)dz = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i U.*

3. *$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor med samma start- och ändpunkt.*

Om ni kommer ihåg satsen om konservativa vektorfält från någon flervariabelkurs så är den analog med satsen ovan, den säger nämligen

Sats 4.11. *Antag att $U \subset \mathbb{R}^n$ är ett område och F är ett kontinuerligt vektorfält på U. Då är följande ekvivalent*

1. *F är konservativ på U*

2. *$\oint_\gamma F \cdot dr = 0$ för alla slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i U.*

3. *$\oint_{\gamma_1} F \cdot dr = \oint_{\gamma_2} F \cdot dr$ där γ_1, γ_2 är styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor med samma start- och ändpunkt.*

Denna sats om konservativa vektorfält ingår förstås inte i kursen, utan jag tyckte det vore kul att analogin bara. En sak som man bör observera är att Sats 4.10 gäller för kontinuerliga funktioner, så den gäller speciellt för holomorfa funktioner.

4.4 Cauchys integralsats

Vi ska i detta avsnitt jobba med något som kallas ett enkelt sammanhängande område, som är så gott som en mängd *utan* hål. För dessa områden så gäller Cauchys integralsats, som säger att integralen av holomorfa funktioner över, enkla, slutna $\mathcal{C}^1$-kurvor är noll. Låt oss jobba oss fram till denna viktiga sats inom komplexanalysen.

Definition 4.12. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område, och låt $\gamma_0\colon [0,1] \to \Omega$ och $\gamma_1\colon [0,1] \to \Omega$ vara kurvor. Antag att $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ och $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$. Vi säger att γ_0 och γ_1 är* **homotopa** *i Ω om det finns en kontinuerlig funktion $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ så att*

1. $H(0,t) = \gamma_0(t)$

2. $H(1,t) = \gamma_1(t)$

3. $H(s,0) = p$

4. $H(s,1) = q$

för alla $s, t \in [0,1]$. Funktionen H kallas för en **homotopi** *av γ_0 och γ_1.*

En homotopi är helt enkelt en kontinuelig deformering av γ_0 till γ_1, dvs kurvan γ_0 deformeras på ett "bra" sätt till kurvan γ_1.

Definition 4.13. *Ett område $\Omega \subset \mathbb{C}$ där varje sluten kurva är homotop med en punkt kallas ett* **enkelt sammanhängande område**.

För att ni ska få en känsla för dessa nya områden så rekommenderar jag att ni gör följande viktiga övning: Försök rita exempel på öppna mängder som är

- sammanhängande men inte enkelt sammanhängande
- enkelt sammanhängande men inte sammanhängande
- både enkelt sammanhängande och sammanhängande
- varken sammanhängande eller enkelt sammanhängande

Nu undrar ni säkert vad som är så bra med homotopa kurvor. Svaret på denna fråga är att integralen över homotopa kurvor blir samma sak:

Sats 4.14. *Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett område och γ_0, γ_1 vara slutna, enkla $\mathcal{C}^1$-kurvor som är homotopa i Ω. Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ så är*

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Bevis. Länka samman kurvorna γ_0 och γ_1 med en enkel $\mathcal{C}^1$-kurva γ. Då är kurvan $\widetilde{\gamma} = \gamma_0 + \gamma - \gamma_1 - \gamma$ en sluten, enkel, styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva. (Rita en bild!). Eftersom f är holomorf så har f en primitiv funktion på Ω, så

$$0 = \oint_{\widetilde{\gamma}} f = \oint_{\gamma_0} f + \oint_{\gamma} f - \oint_{\gamma_1} f - \oint_{\gamma} f = \oint_{\gamma_0} f - \oint_{\gamma_1} f \,,$$

så $\oint_{\gamma_0} f = \oint_{\gamma_1} f$. □

En omedelbar konsekvens av denna sats är

Sats 4.15. Cauchys integralsats
Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och antag att γ är en sluten, enkel $\mathcal{C}^1$-kurva i Ω. Då gäller

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

för alla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Bevis. Eftersom γ är homotop med en punkt $\{p\}$ så gäller att

$$\oint_{\gamma} f = \oint_{\{p\}} f = 0.$$

$\square$

Exempel 5. Låt oss betrakta integralen $\int_{|z|=1} z^n dz$ igen, fast den är gången med hjälp av Cauchys integralsats. Vi vet att

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}$$

Låt oss kolla på tre fall:
Fall 1: ($n \geq 0$)
Då är z^n holomorf på $\mathbb{C}$ som är enkelt sammanhängande, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$.
Fall 2: ($n = -1$)
Då är $z^n = \frac{1}{z}$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ men har ingen primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 2\pi i$.
Fall 3: ($n < -1$)
Då är z^n holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ och har en primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, så $\int_{|z|=1} z^n dz = 0$. $\square$

Exempel 6. Låt oss beräkna $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ där γ är en cirkel med positiv orientering. Om a ligger utanför γ så är $\frac{1}{z-a}$ holomorf i γ, så Cauchys integralsats ger att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

Antag nu att a ligger innanför γ. Deformera nu γ till en cirkel runt a med radie 1, dvs $|z-a| = 1$. Då får vi enligt homotopisatsen att

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=1} \frac{dz}{z-a} = \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$

enligt föregående exempel. Alltså är

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & , \text{om } a \in \text{Ext}(\gamma) \\ 2\pi i & , \text{om } a \in \text{Int}(\gamma) \end{cases} ,$$

där Int(γ) är det inre av γ och Ext(γ) är det yttre av γ. $\square$

Det är speciellt viktigt med detta exempel för att beräkna vissa kurvintegraler.

Exempel 7. Låt oss beräkna $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)}$. Eftersom

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

så blir

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)(z-1)} = \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)} + \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-2)} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i\ ,$$

enligt exemplet ovan. □

4.5 Cauchys integralformel och dess konsekvenser

Cauchys integralformel är kanske den mest viktiga satsen inom denna kurs. Den säger att vi kan uttrycka en holomorf funktion som en integral av sig själv. Ett sådant resultat finns inte inom den reella analysen, som kanske gör komplexanalysen så speciell. Här kommer en formulering och ett bevis.

Sats 4.16. Cauchys integralformel
Antag att $U \subset \mathbb{C}$ är öppen och att $f \in \mathcal{O}(U)$. Låt $z_0 \in U$ och $r > 0$ vara sådan att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$. Då gäller för varje $z \in B(z_0, r)$ att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Anmärkning 5. Blanda inte ihop Cauchys integralsats och Cauchys integralformel. □

Bevis. Vi gör ett gammalt trick inom matematiken:

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Eftersom $z \in B(z_0, r)$ och eftersom $f(z)$ inte är en funktion av ζ, så får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Alltså får vi att

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi i + \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Om vi visar att $\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ så är vi klara. Deformera nu $|z - z_0| = r$ till en cirkel $|z - z_0| = \varepsilon$. Kalla den nya cirkeln för γ_ε. Vi vill nu visa att

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Sätt $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(\gamma_\varepsilon(t)) - f(z)|$. Då gäller att

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon} l(\gamma_\varepsilon) = \frac{M2\pi i\varepsilon}{\varepsilon} = M2\pi.$$

Eftersom $f \in \mathcal{O}(U)$, så är den speciellt kontiunerlig, så

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} M = 0 \text{ och } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| = 0.$$

Detta ger att

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \ ,$$

så satsen följer. □

Detta gör det möjligt att beräkna visa integraler ännu lättare, som följande exempel visar.

Exempel 8. Låt oss beräkna $\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2}$ där γ är kurvan $|z+1| = 2$. Vi börjar med att skriva om integranden:

$$\frac{z^2}{4-z^2} = \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}.$$

Funktionen $f(z) = \frac{z^2}{2-z}$ är holomorf innanför γ, så Cauchys integralformel ger att

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z+2} dz \ ,$$

så

$$\int_\gamma \frac{z^2}{4-z^2} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+2} dz = f(-2)2\pi i = \frac{(-2)^2}{2-(-2)} \cdot 2\pi i = 2\pi i.$$

□

Utifrån detta exempel så ser vi vilken kraft denna sats har. Men kan även beräkna derivator med hjälp av integraler. Detta brukar kallas för Cauchys integralformler för derivator och har utseendet:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

En slags omvändning till Cauchys integralsats är den så kallade Moreras sats:

Sats 4.17. (Moreras sats)
Om f är kontinuerlig på ett område $\Omega \subset \mathbb{C}$ och om

$$\int_\gamma f dz = 0$$

för alla slutna, enkla, styckvisa $\mathcal{C}^1$-kurvor γ i Ω, då är $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Bevis. Att f har en primitiv funktion F vet vi enligt Sats 4.10. F är holomorf, så det följder att $F' = f$ är holomorf, eftersom alla derivatorna av en holomorf funktion är holomorfa. □

4.6 Begänsningar för holomorfa funktioner

Detta avsnitt innehåller många satser med namn; Cauchyuppskattningar, Liouvilles sats, och maximumprincipen. (Avsnittet innehåller algebrans fundamentalsats också, men den känner ni redan till).

Sats 4.18. *(***Cauchyuppskattningar***)*
Låt $f\colon U \to \mathbb{C}$ vara holomorf på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$. Låt $p \in U$ och antag att $\overline{B(p,r)} \subset U$, $r > 0$. Sätt $M = \sup_{z\in\overline{B(p,r)}} |f(z)|$. Då gäller

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{Mk!}{r^k}$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Beviset är lätt och bygger bara på Cauchys integralformel för derivator och uppskattningen för kurvintegraler med längden av kurvan och M. Låt oss göra ett exempel.

Exempel 9. Låt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ uppfylla att $|f(z)| \leq e^{|z|^2}$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Vi ska visa att $|f^{(4)}(0)| < 70$. Cauchyuppskattningen ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!M}{r^4} ,$$

där $M = \sup_{z\in\overline{B(0,r)}} |f(z)|$. Vi behöver bara ha ett $r > 0$ så låt oss ta $r = 1$. Detta ger att

$$|f^{(4)}(0)| \leq \frac{4!e^{1^2}}{1^4} = 24e < 70.$$

$\square$

Liouvilles sats säger att en begränsad hel funktion är konstant, dvs det finns inga icke-konstanta holomorfa funktioner på $\mathbb{C}$ som är begränsade.

Sats 4.19. *(***Liouvilles sats***)*
En begränsad hel funktion är konstant.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ så att $|f(z)| \leq C$, för något $C \geq 0$. Fixera ett $p \in \mathbb{C}$, och låt $r > 0$. Använd Cauchyuppskattningen med $k = 1$:

$$|f'(p)| \leq \frac{C1!}{r^1} = \frac{C}{r}.$$

Eftersom denna olikhet gäller för alla $r > 0$ så måste $f'(p) = 0$. Men eftersom p var godtyckligt, så är $f' \equiv 0$ på $\mathbb{C}$. Men då vet vi att f måste vara konstant. $\square$

Vad ska nu detta vara bra för? Jo, man t.ex. visa at om f är en hel icke-konstant funktion så finns det för varje $z_0 \in \mathbb{C}$ en punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ så att $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. (Försök att visa detta).Observera vidare att man använder Liouvilles sats för att visa algebrans fundamentalsats.

Nästa viktiga resultat är maximumprincipen, i två olika versioner. För beviset av satsen så behöver vi att holomorfa funktioner har en medelvärdesegenskarp: Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ så är

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Sats 4.20. *(***Maximumprincipen (version 1)***)*
Om Ω är ett område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och $|f|$ har ett lokalt maximum i Ω så måste f vara konstant i Ω.

Anmärkning 6. Ett lokalt maximum betyder att för alla $p \in \Omega$ så gäller att $|f(p)| \geq |f(z)|$ för alla $z \in \Omega$. □

Bevis. Låt oss först bevisa resultatet i fallet av boll $B(z, R)$. Antag att $B(z, R)$ är sådan att $|f(z)| = \sup_{w \in B(z,R)} |f(w)|$. Tag ett $0 < r < R$. Medelvärdesegenskapen för holomorfa funktioner ger att

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta =$$

$$= |f(z)| \frac{2\pi}{2\pi}.$$

Alltså har vi likhet hela vägen, så speciellt har vi att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \ ,$$

så

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})|) d\theta.$$

Eftersom $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| \geq 0$, så ger det att $|f(z)| - |f(z + re^{i\theta})| = 0$ för alla θ. På grund av att detta är sant för alla $r < R$ så betyder det att $|f|$ är konstant på $B(z, R)$ och eftersom f är holomorf så betyder det att f är konstant.

Låt oss nu visa satsen i fallet av ett område. Antag att $|f|$ antar sitt maximum i $z \in \Omega$, och antag för en motsägelse att $|f|$ inte är konstant på Ω. Då finns det en punkt $w \in \Omega$ så att $|f(w)| < |f(z)|$ (se ovan). Låt γ vara ett polygontåg mellan z och w; $\gamma(0) = z$ och $\gamma(1) = w$. Låt

$$T = \inf\{t \in [0, 1] : |f(\gamma(t))| < |f(z)|\}.$$

Detta betyder att $|f(\gamma(t))| = |f(z)|$ om $t \in [0,T]$, men det finns punkter $t > T$ (godtyckligt nära T) där vi har olikhet. Tag nu en boll $B(\gamma(T), r) \subset \Omega$. Föregående argument ger att $|f|$ är konstant på $B(\gamma(T), r)$, vilket motsäger definitionen av T, så $|f|$ måste vara konstant, så f måste vara konstant, eftersom f är holomorf. $\square$

Sats 4.21. *(***Maximumprincipen (version 2)***)*
Om Ω är ett begränsat område, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ och f är kontinuerlig på $\overline{\Omega}$, så antar $|f|$ sitt maximum på $\partial\Omega$.

Anmärkning 7. Det är denna sats som man brukar använda, så kom ihåg denna. $\square$

Exempel 10. Låt oss beräkna maximum för $|e^{z^2}|$ på enhetsdisken. Eftersom enhetsdisken är ett begränsad område och e^{z^2} är holomorf på enhetsdisken, samt e^{z^2} är kontinuerlig på $\overline{B(0,1)}$. Nu ger maximumprincipen att $|e^{z^2}|$ antar sitt maximum på $|z| = 1$. Sätt därefter $z = e^{it}$. Då är

$$|e^{(e^{it})^2}| = |e^{e^{2it}}| = |e^{\cos 2t + i \sin 2t}| = e^{\cos 2t} \leq e \ ,$$

eftersom $0 \leq \cos 2t \leq 1$. Detta maximum antar den för $z = \pm 1$. $\square$