

Läsanvisningar

till

kapitel 5.1 – 5.8

5.1 Följder och serier

Detta avsnitt är repetition, och jag hoppas att ni snart kan snappa upp det som står däri. Speciellt viktigt är det att komma ihåg vad en geometrisk serie är, och vad likformig konvergens är.

5.2 Taylorserier

Taylorserier är något ni är bekant med sedan era reellanalyskurser. Höjdpunkten i detta avsnitt säger att holomorfa funktioner har en Taylorutveckling. Men låt oss börja lite lungt.

Om $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en C^∞ funktion, då har f en formell serieutveckling

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(p)}{j!} (x-p)^j$$

för fixt $p \in \mathbb{R}$. Det som kanske bör noteras är att det inte är någon garanti att denna serie konvergerar för något x förutom $x = p$. Om serien konvergerar för något $x \neq p$ så kan vi *inte* säga att serien är lika med $f(x)$.

Exempel 1. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Vi har att f är $C^\infty(\mathbb{R})$ med $0 = f'(0) = f''(0) = \dots$. Alltså är Taylorserien av f kring $p = 0$ lika med

$$0 + 0x + 0x^2 + \dots .$$

Denna är konvergent för alla x och summan är identiskt lika med noll. Men $f(x) = 0$ endast om $x = 0$. □

Efter denna utvikning låt oss kasta oss in i Taylors sats.

Sats 5.1. (Taylors sats)

Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$ så har f :s Taylorserie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

konvergensradie åtminstone R . Vidare så konvergerar Taylorserien mot $f(z)$ för varje $z \in B(z_0, R)$.

Bevis. Vi ska först visa att Taylorserien konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, r)}$ om $0 < r < R$. Tag därför ett $r < \rho < R$ och låt γ vara cirkeln runt z_0 med radie ρ , så γ är enkel, sluten, positivt orienterad \mathcal{C}^1 -kurva. Då ger Cauchys integralformel att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

om $|z - z_0| \leq r$. Vi ska börja med att skriva om integranden. Vi har att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

och eftersom vi integrerar de ζ som ligger på γ har vi att

$$|z - z_0| \leq r < \rho = |\zeta - z_0|$$

dvs

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Nu kan vi använda oss av en geometrisk serie, dvs att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Detta ger att

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k}{\zeta - z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Sätt nu $M = \sup_{|z - z_0| \leq r} |f(z)|$. Då är $M < \infty$. Låt

$$f_k(\zeta) = \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta).$$

Då är

$$|f_k(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^k \leq \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k.$$

Vi har nu skrivit om integranden som

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta).$$

Eftersom $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ så är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k$$

en konvergent geometrisk serie. Nu ger Weierstrass M -test att

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)$$

konvergerar likformigt på $\overline{B(z_0, \rho)}$.

Vi får nu att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta$$

eftersom serien konvergerar likformigt. Vidare så får vi att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right)^{k+1} d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0) \end{aligned}$$

enligt Cauchys integralformel för derivator. Detta ger att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

□

Försök nu räkna lite övningar för att få en känsla för det hela. Beviset för Taylors sats är viktigt, eftersom det innehåller så många delar av kursen.

5.3 Potensserier

I början av detta avsnitt repeterar vi lite om potensserier och likformigt kontinuerliga funktioner, och en viktig sats som säger att om vi har likformig konvergens så får vi flytta in "lim" innanför integralen. Detta är allt gammal skåpmat, så det första riktiga resultatet i detta avsnitt är

Sats 5.2. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara enkelt sammanhängande och antag att $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag vidare att $f_n \rightarrow f$ likformigt på Ω . Då är f holomorf på Ω .

Försök visa denna sats innan ni kollar på bokens bevis. Ni an följa följande steg:

- Dra slutsatsen att f är kontinuerlig (varför?)
- Betrakta $\lim \int_{\gamma} f_n$.
- Vad vet du om $\int_{\gamma} f$.
- Dra slutsatsen att $\int_{\gamma} f = 0$.
- Använd Moreras sats.

5.4 Konvergensteori

Denna teori borde ni känna till, annars är det dags att läsa detta avsnitt ordentligt. Lagg märke till att vi redan, i beviset av Taylor sats, använt Weierstrass M -test. Jag lämnar detaljerna till er själva.

5.5 Laurentserier

Taylorserier gav oss en möjlighet att uttrycka holomorfa funktioner i en potensserie. I detta avsnitt vill vi uttrycka en holomorf funktion med singulariteter, dvs där den inte är definierad, i en potensserie.

Låt $0 \leq r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2 \leq +\infty$ och låt $z_0 \in \mathbb{C}$. Sätt

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

och

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Antag att $f \in \mathcal{O}(A)$. Då är

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z - z_0)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

där serierna är absolutkonvergenta och konvergerar likformigt på mängder av typen B . Serierutvecklingen kallas för Laurentserierutvecklingen av f på A kring z_0 .

Om γ är en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis \mathcal{C}^1 -kurva. Då ges koefficienterna i Laurentserierutvecklingen av

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{j-1} d\zeta \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Observation 1. Observera att beviset av denna sats är liknande av beviset av Taylors sats. \square

Anmärkning 1. Det är lockande att skriva

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$$

som i Taylorutvecklingen, med det vore fel ty $f^{(j)}(z_0)$ behöver nödvändigtvis ej vara väldefinierat. \square

Observation 2. Om $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r_2))$, då blir Laurentseriutvecklingen precis Taylorutvecklingen av f kring z_0 . \square

Anmärkning 2. Laurentseriutvecklingen är entydigt bestämd enligt en sats i boken, och detta faktum använder man bland annat i uträkningar. \square

Låt oss göra några exempel. Innan ni kollar på dessa, se till att ni har koll på geometriska serier.

Exempel 2. Låt

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \text{ och } A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

och

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Då är $f \in \mathcal{O}(A_1)$ och $f \in \mathcal{O}(A_2)$. Låt oss Laurentseriutveckla f i de olika områdena. För det första har vi att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^j,$$

där vi använde en geometrisk serie, eftersom $|\frac{1}{z}| < 1$ är precis samma sak som $|z| > 1$ (dvs vi befinner oss i området A_1 .) Så denna serie konvergerar på A_1 .

Låt oss nu hitta en Laurentseriutveckling på A_2 för f . Vi har att

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^j = -\frac{1}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j,$$

där vi har använt oss av en geometrisk serie, eftersom $|z| < 1$. Så serien konvergerar på A_2 . \square

Exempel 3. Låt oss Laurentseriutveckla $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}$ i området

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}.$$

Vi har att

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{(z + 1)(z + 3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z + 3}$$

om vi använder partialbråksuppdelning.

Termen $\frac{1}{z+1}$ är holomorf på $|z| > 1$. Vi har, om vi använder en geometrisk serie, att

$$\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}}$$

som konvergerar för $|z| > 1$.

Vidare så är termen $\frac{1}{z+3}$ holomorf på $|z| < 3$. Vi har att

$$\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}.$$

Även här har vi använt oss av en geometrisk serie. De båda fallen ovan ger nu att

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z + 3} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j+1}} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^j}{3^{j+1}}$$

som är Laurentseriutvecklingen av f i området A . □

5.6 Nollställen och singulariteter

Nollställen antar jag att ni har lite koll på. En viktig observation, som är en följd i boken, är att en holomorf funktion har isolerade nollställen. Singulariteter är, precis som vi har nämnt förut, punkter där en funktion inte är definierad. Man kan däremot ha olika typer av singulariteter, och man använder sig av Laurentseriutvecklingar av holomorfa funktioner för att klassificera de olika typerna av singulariteter. Mer precist har vi:

Definition 5.3. Låt $U \subset \mathbb{C}$ vara öppen och antag att $\overline{B(z_0, r)} \subset U$, $r > 0$. Om $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ så säger vi att f har en **isolerad singularitet** i z_0 .

Eftersom $f \in \mathcal{O}(B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ så har f följande Laurentseriutveckling

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

åtminstone på $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Vi ska använda oss av koefficienterna c_j till denna Laurentseriutveckling för att klassificera de olika singulariteterna.

1. Om $c_j = 0$ för alla $j < 0$ så säger vi att f har en **hävbar singularitet** i z_0 .
2. Om det finns ett $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, så att $c_k \neq 0$ och $c_j = 0$ för alla $j < -k$, så säger vi att f har en **pol** i z_0 av ordning k .
3. Om $c_j \neq 0$ för oändligt många *negativa* j , då säger vi att f har en **väsentlig singularitet** i z_0 .

Anmärkning 3. Koefficienten c_{-1} kallas för f :s **residue** i punkten z_0 . Detta kommer bli mer klart i kapitel 6. \square

Låt oss gå igenom dessa olika typer av singulariteter.

- Antag att f har en hävbar singularitet i z_0 . Detta är faktiskt ingen singularitet, utan man häver verkligen den. Då är Laurentserieutvecklingen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ inget annat än Taylorutvecklingen för f som är holomorf i $B(z_0, r)$ förutsatt vi definierar $f(z_0) = c_0$. Vidare så har vi att f är begränsad i någon omgivning $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. En annan viktig egenskap hos hävbara singulariteter är att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

existerar och är ändlig. Vidare så är

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Vi sammanfattar att z_0 är en hävbar singularitet för f omm $|f|$ är begränsad nära z_0 omm $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar och är ändlig omm vi kan omdefiniera f så att f blir holomorf i z_0 .

- Antag nu att f har en pol av ordning k . Då har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Vidare så kan vi skriva f som

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

där g är en holomorf funktion med $g(z_0) \neq 0$. Detta betyder speciellt att $1/f$ kommer ha ett nollställe i z_0 av ordning k . Vidare så har vi att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$$

och att

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

existerar och är ändlig.

- Låt oss slutligen diskutera väsentliga singulariteter. Dessa punkter är konstiga punkter, och gränsvärdet $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existerar inte, vare sig det blir ändligt eller oändligt. Vidare så har vi Picards sats som säger att $f(z)$ antar alla komplexa tal i en omgivning till z_0 med ett möjligt undantag. Detta betyder, med topologiska termer, att värdemängden för f är tät i \mathbb{C} .

Exempel 4. Betrakta funktionen

$$f(z) = \begin{cases} \cos z & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases} .$$

Då är $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Laurentseriutvecklingen av f kring z_0 är

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j}}{(2j)!} z^{2j}$$

på mängden $0 < |z|$. Per definition så har f en hävbar singularitet i $z_0 = 0$. \square

Exempel 5. Funktionen $f(z) = e^{-1/z}$ har en väsentlig singularitet i $z_0 = 0$. I varje omgivning $B(0, r) \setminus \{0\}$ så antar denna funktion alla komplexa värden utom 0. \square

Exempel 6. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$. Vi ser att f har en isolerad singularitet i $z = 0$. Vidare har vi att

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = 0.$$

Eftersom $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$ existerar inte så har f en pol av ordning 2. \square

5.7 Punkten i oändligheten

I detta avsnitt så går boken igenom Riemannsfären igen. Den här gången så kollar vi på singulariteter för funktioner i ∞ , och det man gör är helt enkelt att man kollar på $f\left(\frac{1}{w}\right)$ och avgör vilken typ av singularitet den har då.

5.8 Analytisk fortsättning

Tänk om vi har en funktion f som är holomorf på ett område Ω . Om vi då kan hitta en holomorf funktion F på Ω' , där $\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$ så att $F|_{\Omega} = f$, så säger vi att F är en **analytisk fortsättning** av f . Vi har följande viktiga sats om analytiska fortsättningar.

Sats 5.4. Om $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ ett område, har en analytisk fortsättning till ett område Ω_2 , då finns det en entydig $F \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ så att $F|_{\Omega_1} = f$.

Läs detta avsnitt lite kursivt, men försök att rita bilder över de olika resultaten.