

Läsanvisningar

till

kapitel 6.1 – 6.7

6.1 Residuesatsen

Hela kapitel 6 handlar om att beräkna olika typer av integraler på så gott som samma vis. Om ni kommer ihåg från förra avsnittet om Laurentseriutvecklingar, så kallas koefficienten c_{-1} i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för **residuen** i z_0 . Eftersom koefficienten i en Laurentseriutveckling definieras genom en integral så kan vi använda residuer till att beräkna integraler. Men varför just koefficienten c_{-1} ? Låt oss motivera detta intresse av residuer.

Låt γ vara en enkel, sluten, positivt orienterad styckvis \mathcal{C}^1 -kurva kring origo. Då är

$$\int_{\gamma} z^n = \begin{cases} 0 & , n \neq -1 \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases} .$$

Antag nu att f är en holomorf funktion med en singularitet i origo. Då har f en Laurentseriutveckling i någon annulus A kring 0; $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$. Denna konvergerar likformigt på γ , förutsatt γ ligger helt i A och innehåller origo. Då är

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \int_{\gamma} z^j dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Alltså är koefficienten c_{-1} viktig, och det leder till följande definition. (Denna definition har ni sett förut, i alla fall mer eller mindre, men jag tänkte vara mera precis här).

Definition 6.1. Låt f vara en funktion med en isolerad singularitet i punkten z_0 . Då kallas koefficienten c_{-1} i f 's Laurentseriutveckling $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ för f 's **residue** i punkten z_0 . Detta skriver vi som

$$\text{Res}(f, z_0) \text{ eller } \text{Res}(z_0).$$

Observation 1. Enligt definition så har vi att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

då $r > 0$ är tillräckligt litet. □

Vi kan även göra några fler fundamentala observationer:

1. Om f har en hävbar singularitet i z_0 så är $\text{Res}(f, z_0) = 0$ enligt Cauchys integralsats.
2. Om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j.$$

Detta ger att

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)f_1(z)$$

där $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$. Derivera nu $(k - 1)$ gånger, då får vi

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)f_1(z).$$

Låt nu $z \rightarrow z_0$. Då blir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z) = (k - 1)!c_{-1} + 0.$$

Alltså om f har en pol av ordning k i z_0 så gäller att

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^k f(z).$$

Exempel 1. Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2}$ har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Detta ger att

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} 1 = 0.$$

□

Exempel 2. Betrakta funktionen $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)^3}$ som har en pol av ordning 2 i $z = 0$. Då är

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^3}{(e^z - 1)^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^3 = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^2 \frac{d}{dz} \frac{z}{e^z - 1} = 3 \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^2 \cdot \frac{(e^z - 1) - ze^z}{(e^z - 1)^2} = \cdots = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

För att inse detta, kolla på Taylorutvecklingen av e^z . □

Om vi har flera singulariteter som ligger innanför en kurva, kan vi då använda oss av residuer för att beräkna en integral? Svaret är ja, och besvaras av Cauchys residuesats.

Sats 6.2. (Cauchys residuesats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ förutom i de isolerade singulariteterna z_1, \dots, z_n . Antag att γ är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis \mathcal{C}^1 -kurva i Ω och att z_1, \dots, z_n ligger inuti γ . Då gäller

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

Bevis. Vi ska använda induktion över antalet singulariteter.

Om $n = 0$:

Då är f holomorf i ett enkelt sammanhängande område som innehåller γ . Då ger Cauchys integralsats att

$$VL = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Vidare så har vi att $HL = 0$ så det stämmer i fallet $n = 0$, dvs inga singulariteter.

Antag nu att satsen är sann för $(n - 1)$ stycken singulariteter. Låt $\varepsilon > 0$ vara så litet så att $|z - z_n| \leq \varepsilon$ ej innehåller någon av z_1, \dots, z_{n-1} . Tag därför två punkter p_1 och p_2 på $|z - z_n| = \varepsilon$. Förbind p_1 och p_2 med kurvan γ i punkterna q_1 respektive q_2 . Kalla dessa γ_1 respektive γ_2 . Låt C_1 vara övre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$ från p_1 till p_2 , och låt C_2 vara undre delen av cirkeln $|z - z_n| = \varepsilon$. Vidare låt γ_3 vara den del av γ som går från q_1 till q_2 och låt γ_4 vara den del av γ som förbinder q_2 med q_1 , så $\gamma = \gamma_3 + \gamma_4$. (Rita en bild över detta!) Bilda nu

$$\tilde{\gamma} = \gamma_3 - \gamma_2 - C_2 - \gamma_1 + \gamma_1 - C_1 + \gamma_2 + \gamma_4$$

som är en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis \mathcal{C}^1 -kurva. Då har vi att

$$\int_{\gamma} f - \int_{|z-z_n|} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_j).$$

Alltså är

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

så satsen är sann för n stycken singulariteter. □

Exempel 3. Vi ska beräkna $I = \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2(z-1)} dz$ där γ är en "snäll" kurva som innehåller 0 och 1. Cauchys residuesats ger att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(0) + \text{Res}(1)).$$

Vi har att $z = 1$ är en enkel pol, ty $\cos \pi \neq 0$, så

$$\operatorname{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2} = -1.$$

Vidare så är $z = 0$ en pol av ordning 2, ty $\cos 0 \neq 0$, så

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\pi \sin(\pi z)(z-1) - \cos(\pi z)}{(z-1)^2} = \frac{0-1}{(-1)^2} = -1.$$

Detta ger att

$$I = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i.$$

□

6.2 Trigonometriska integraler över $[0, 2\pi]$

Vi ska i detta avsnitt beräkna integraler på formen $\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ med hjälp av Cauchys residuesats. Antag att funktionen U ovan är en rationell funktion i $\cos \theta, \sin \theta$ med reella koefficienter som är ändlig på $[0, 2\pi]$. Låt $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kurva som ges av $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Observera att $e^{-i\theta} = \frac{1}{\gamma(\theta)}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$. Kom nu ihåg Eulers formler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Då gäller att

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

där $z \in \gamma([0, 2\pi])$. Gör nu substitutionen $d\theta = \frac{dz}{iz}$ så får vi

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\gamma} U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz}.$$

Och nu är vi i ett läge där vi kan använda Cauchys residuesats. Låt oss kolla på ett exempel.

Exempel 4. Låt $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, och betrakta

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta}.$$

Vi ska beräkna I . Låt $z = e^{i\theta}$ för $\theta \in [0, 2\pi]$ och låt γ vara enhetscirkeln kring origo. Då är

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Gör nu variabelsubstitution i I . Då får vi, om vi använder $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{1 + a^2 - \frac{2a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} \frac{idz}{(z-a)(az-1)}.$$

Vi ser nu att integranden har enkla poler i $z = a$ och $z = \frac{1}{a}$. Residuen i dessa punkter är

$$\text{Res}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{i}{a \left(z - \frac{1}{a} \right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

och

$$\text{Res}\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{i}{a(z-a)} = \frac{i}{1-a^2}.$$

Vi måste nu kolla på olika fall för a :

Om $0 < a < 1$, då ligger a innanför γ och $1/a$ utanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Om $a > 1$, då ligger a utanför γ och $1/a$ innanför. Detta ger att

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{1 - a^2} \right) = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

□

6.3 Obestämda integraler av speciella funktioner över $]-\infty, \infty[$

Vi ska försöka beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ genom att använda komplex analys. Detta gör vi genom att helt enkelt låta $f(z)$ vara den reella funktionen $f(x)$ fast i den komplexa variabeln z , så t.ex. om $f(x) = x^2 + 1$ så är $f(z) = z^2 + 1$. Låt $I_R = [-R, R]$ och låt $C_R = Re^{i\theta}$, för $0 \leq \theta \leq \pi$. Sätt $\gamma_R = C_R + I_R$. Låt nu $R > 0$ vara tillräckigt stort så att $f(z)$:s isolerade singulariteter med $\text{Im}(z) > 0$ ligger innanför γ_R . Då vet vi att

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz$$

och enligt Cauchys residuesats så har vi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

där z_1, \dots, z_n är f :s isolerade singulariteter så att $\text{Im}(z_j) > 0$. Vi får då att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{I_R} f(z) dz.$$

Låt nu $R \rightarrow \infty$, så vi betraktar

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(z) dz.$$

Eftersom vi befinner oss på realaxeln i integralen över I_R så kan vi gå tillbaka till den reella funktionen, dvs

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(x) dx.$$

Om nu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existerar och är ändlig, så brukar vi kalla detta för principvärdet och skriver

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Observation 2. Exemplet i boken om att p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$ är viktigt, eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ inte existerar. \square

Så om $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existerar och är ändlig så får vi att

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz + \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Alltså om vi kan visa att $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ så skulle vi ha beräknat p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Lyckligtvis så finns det ett lemma som hjälper till här:

Lemma 6.3. Om $f(z) = P(z)/Q(z)$, där P och Q är polynom så att

$$\text{grad}(Q) \geq 2 + \text{grad}(P)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Exempel 5. Låt oss beräkna integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Ni får själva kolla att I är konvergent, så

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Låt oss nu gå över till den komplexa funktionen $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$. Observera att $\text{grad}(Q) \geq 2 + \text{grad}(P)$ så lemmat ovan ger att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

där C_R är halvcirkeln $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Eftersom ekvationen $z^4 + 1 = 0$ har lösningarna $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$ och $z_4 = e^{7\pi i/4}$, så z_1 och z_2 ligger innanför $\gamma_R = C_R + I_R$. Detta betyder att

$$I = 2\pi i (\text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2)).$$

Vi har att

$$\text{Res}(z_k) = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

för $k = 1, 2, 3, 4$. Detta betyder att

$$I = \frac{2\pi i}{4} (e^{-\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Denna metod blir ofta lättare än den gamla metoden med integralkalkylens huvudsats.

Anmärkning 1. Metoden som har beskrivits i detta avsnitt fungerar inte om singulariteterna ligger på $\text{Im}(z) = 0$, utan detta ska vi få lära oss i senare avsnitt.

□

6.4 Obestämda integraler av trigonometriska funktioner

Vi ska fortsätta med att beräkna principalvärdet för integraler på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx,$$

där P och Q är polynom. För att beräkna dessa integraler så använder vi samma metod som i föregående avsnitt. Det man observerar är att

$$\text{Re}(e^{it}) = \cos t \quad , \quad \text{Im}(e^{it}) = \sin t,$$

så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(mx) dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right)$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(mx) dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx \right).$$

Konstruktionen med kurvan $\gamma = C_R + I_R$ kan man använda även här, och Jordans lemma hjälper en på traven:

Lemma 6.4. (Jordans lemma)

Om $m > 0$ och P och Q är polynom så att

$$\operatorname{grad}(Q) \geq 1 + \operatorname{grad}(P)$$

då är

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz = 0,$$

där C_R är en halvcirkel med radie R .

Exempel 6. Vi ska beräkna p. v. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$. Sätt

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2},$$

så har f poler i $\pm i$. Eftersom

$$\operatorname{grad}((z^2+1)^2) \geq 1 + \operatorname{grad}(z^3)$$

så kan vi använda oss av Jordans lemma, så

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0,$$

där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet. Eftersom i är den enda polen i övre halvplanet, så ger Cauchys residuesats att

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \operatorname{Im}(2\pi i \operatorname{Res}(i)).$$

Om man beräknar residuen så får man $\operatorname{Res}(i) = \frac{1}{4e}$, vilket betyder att

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{1}{4e} \right) = \frac{\pi}{2e}.$$

□

6.5 Speciella konturer

Detta avsnitt handlar om hur man beräknar integraler med singulariteter på den reella axeln. Det man gör är att man lägger en halvcirkel med godtyckligt liten radie runt singulariteten och därefter så använder man Cauchys residuesats. För att beräkna integralen längs denna halvcirkel, eller någon cirkelbåge, kring en singularitet använder man följande lemma:

Lemma 6.5. Om f har en enkel pol i $z = c$ och T_r är en cirkelbåge kring c definierad genom $c + re^{i\theta}$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, då gäller att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{T_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, c).$$

Dessa metoder lär man sig lättast om man räknar lite. Därför ger jag ett exempel.

Exempel 7. Låt oss beräkna $I = \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x+1} dx$. Vi har att Jordans lemma ger oss

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = 0.$$

Vidare så ger lemmat från detta avsnitt att

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{S_r} \frac{e^{2iz}}{z+1} dz = -\pi i \operatorname{Res}(-1),$$

där S_r är en halvcirkel kring singulariteten $z = -1$. Eftersom

$$\operatorname{Res}(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{e^{2iz}}{z+1} = e^{-2i}$$

så får vi att

$$I = \pi i e^{-2i}.$$

□

6.6 Integraler av flervärda funktioner

Även i detta avsnitt så beräknar vi integraler, fast nu är integranden en flervärd funktion. Jag tycker att ni ska gå igenom detta avsnitt och räkna några uppgifter. Jag kommer här bara gå igenom ett exempel så jag hoppas det är tillräckligt.

Exempel 8. Vi ska beräkna $\int_0^{\infty} \frac{\ln(px)}{q^2+x^2} dx$ för $p, q > 0$. Sätt $g(z) = \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2+z^2}$. Då gäller att $\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z)) = \ln|z|$. Då är $\operatorname{Log}(z)$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Observera att g har en enkel pol i iq . Då är

$$\operatorname{Res}(g, iq) = \frac{\ln(pq)}{2qi} + \frac{\pi}{4q}.$$

Observera att vi inte behöver något belopp på pq då vi tar den naturliga logaritmen, eftersom både p och q är icke-negativa. Låt $0 < r < q < R$ och låt S_r vara en halvcirkel kring origo med godtyckligt liten radie r i övre halvplanet, och låt C_R vara en halvcirkel kring origo med stor radie R . Låt $\gamma = C_R + [-R, r] + S_r + [r, R]$. Då ger Cauchys residuesats att

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, iq) = \frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q}.$$

Vi har att

$$\int_r^R g = \int_r^R \frac{\log(pz)}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz$ då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Vidare har vi att

$$\int_{-R}^{-r} g = \int_{-R}^{-r} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz = \int_R^r \frac{\operatorname{Log}(-pz)}{q^2 + (-z)^2} (-dz) = \int_r^R \frac{\operatorname{Log}(pz) + \pi i}{q^2 + z^2} dz$$

som går mot

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$.

Vi gör nu ett variabelbyte, som ger att

$$\left| \int_{C_R} g \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Log}(Re^{i\theta})}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\ln|R| + i\theta}{q^2 + R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - q^2} \pi R \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$. Jag lämnar åt er att visa att $\left| \int_{S_r} g \right| \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0^+$. Detta ger att

$$\int_{\gamma} g \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{q^2 + z^2} dz$$

då $R \rightarrow \infty$ och $r \rightarrow 0^+$. Så vi får att

$$\frac{\pi \ln(pq)}{q} + \frac{\pi^2 i}{2q} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(pz)}{q^2 + z^2} dz + \pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{q^2 + z^2} dz.$$

Om vi jämför real och imaginärdel så får vi att

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(px)}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi \ln(pq)}{2q}$$

och

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2q}.$$

□

6.7 Argumentprincipen och Rouches sats

Meromorfa funktioner är holomorfa funktioner med poler. Med dessa så kan vi med hjälp av nollställena och poler beräkna en viss typ av integraler. Mer precist har vi:

Sats 6.6. (Argumentprincipen)

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en meromorf funktion, där Ω är ett enkelt sammanhängande område i \mathbb{C} . Låt γ vara en sluten, enkel, positivt orienterad styckvis \mathcal{C}^1 -kurva. Antag att f saknar poler och nollställena på γ . Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f),$$

där $N_p(f)$ är summan av ordningen av poler innanför γ och $N_0(f)$ är summan av ordningen av nollställena innanför γ .

Denna sats ska vi använda till att visa Rouches sats som uttalar sig om nollställena för funktioner.

Sats 6.7. (Rouches sats)

Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område och låt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Antag att

$$|f(z)| < |g(z)|$$

på en enkel, sluten styckvis \mathcal{C}^1 -kurva γ i Ω . Då måste f och g ha samma antal nollställena innanför γ (räknat med multiplicitet).

Bevis. Säg att $g = f + h$, där $|h| < |f|$ på γ . Detta ger att $f \neq 0$ på γ . Betrakta homotopin $F_t(z) = F(t, z) = f(z) + th(z)$, $0 \leq t \leq 1$, som överför f till g . På γ har vi att

$$|F_t| \geq |f| - t|h| \geq |f| - |h| > 0.$$

Låt $N(t)$ vara antalet nollställena till F_t i det inre av γ . Då ger argumentprincipen att

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_t'(z)}{F_t(z)} dz.$$

Eftersom N är definierad av en integral av en kontinuerlig funktion, så måste N vara kontinuerlig. Vidare så antar N bara heltalsvärden (den räknar ju antal!). Därför måste $N(0) = N(1)$ vilket betyder att antalet nollställena hos $F_0 = f$ är samma som antalet nollställena hos $F_1 = g$. \square

Rouches sats säger att vi kan göra ”små” holomorfa störningar och även ha lika många nollställena.

Exempel 9. Vi ska undersöka hur många nollställen $f(z) = z^3 + 2 + e^{-z}$ har i det högra halvplanet. Låt $g(z) = z^3 + 2$ och $h(z) = e^{-z}$. Då är $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Låt γ vara den slutna kurva som går i en halvcirkel C_R från iR till $-iR$ och därefter linjen l_R från iR till $-iR$. Då gäller att

$$|g(z)| = |z^3 + 2| \geq |z|^3 - 2 = R^3 - 2$$

då $R^3 > 2$ på C_R , och

$$|h(z)| = |e^{-z}| = \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z}} \leq 1$$

på C_R . På linjen l_R så gäller att

$$|g(iy)| = |(iy)^3 + 2| = \sqrt{y^6 + 4} \geq 2$$

och

$$|h(iy)| = |e^{-iy}| = 1.$$

Alltså är $|g(z)| > |h(z)|$ på γ .

Vi kollar nu på hur många nollställen g har innanför γ . Löser vi $g(z) = 0$ så ser vi att den har 2 stycken nollställen innanför γ om $R > 2^{1/3}$. Då ger Rouches sats att g och f har samma antal nollställen innanför γ . Eftersom $R > 2^{1/3}$ är godtycklig så följer det att f har två nollställen i högra halvplanet. \square

Exempel 10. Betrakta $p(z) = z^3 + 3z - 1$. Vi påstår att p har alla sina nollställen i $B(0, 2)$. Vi ser att p har exakt tre nollställen enligt algebrans fundamentalsats. Låt $r(z) = z^3$ som har alla sina nollställen i origo, så speciellt i $B(0, 2)$. På $\partial B(0, 2)$ så är $|r(z)| = 8$. Vidare så är $q(z) = 3z - 1$ en liten störning av $r(z)$. På $\partial B(0, 2)$ så är

$$|q(z)| = |3z - 1| \leq 3 \cdot 2 + 1 < |r(z)|.$$

Rouches sats ger att r och p har lika många nollställen i $B(0, 2)$. \square

Exempel 11. Låt $f \in \mathcal{O}(B(0, 1 + \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Antag att $f(0) = 3$ och att $|f(z)| > 7$ då $|z| = 1$. Vi påstår att f har ett nollställe i $B(0, 1)$. Låt $h(z) = -3$. Vi har att $|f(z)| > |h(z)|$ på $\partial B(0, 1)$ så har f och $g = f + h$ lika många nollställen i $B(0, 1)$. Men $g(0) = f(0) + h(0) = 0$ så f måste ha ett nollställe i $B(0, 1)$. \square

Rouches sats ger i sin tur följande sats

Sats 6.8. (Öppna avbildningsatsen)

En holomorf, icke-konstant funktion är öppen, dvs bilden av öppna mängder är öppna.

Bevis. Antag att $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, där Ω är ett område i \mathbb{C} . Tag $V \subset \Omega$ öppen. Vi ska visa att $f(V)$ är öppen. Eftersom V är öppen så finns det en boll $\overline{B(a, r)} \subset V$ där $a \in V$. Enligt identitetssatsen så finns det ett r så att $B(a, r)$ är en sådan boll, och så att om vi definierar

$$m = \inf\{|f(z) - f(a)| : z \in \partial B(a, r)\}$$

så är $m > 0$. Detta är inget annat än avståndet från $f(a)$ till $f(\partial B(a, r))$. Tag en $w \in B(f(a), m)$ och sätt $g(z) = f(z) - w$. Vi ska nu använda Rouches sats:

Sätt $g_0(z) = f(z) - f(a)$. Denna har minst ett nollställe i $B(a, r)$. Sätt $g_1(z) = f(a) - w$ som då är konstant. För $z \in \partial B(a, r)$ är nu

$$|g_0(z)| = |f(z) - f(a)| \geq m > |f(a) - w| = |g_1(z)|$$

och därför har $g_0 + g_1 = g$ samma antal nollställen i $B(a, r)$ som g_0 , dvs minst 1. Vad betyder nu detta? Jo, för vårt godtyckliga val av $w \in B(f(a), m)$ så finns ett $z_0 \in B(a, r)$ så att $0 = g(z_0) = f(z_0) - w$, så $f(z_0) = w$. Därför är $B(f(a), m) \subset f(B(a, r)) \subset f(V)$, så $f(V)$ innehåller en boll, så $f(V)$ är öppen. \square