Läsanvisningar

till

kapitel 7.1 – 7.4

7.1 Invarians av Laplaceekvationen

Om $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ett område, är bijektiv med holomorf invers så säger vi att f är **biholomorf**. Detta avsnitt handlar om att harmoniska funktioner är invarianta under biholomorfa avbildningar. Låt oss se varför: Låt φ vara harmonisk i Ω och betrakta $\widetilde{\Omega} = f^{-1}(\Omega)$ där $f \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ är bijektiv. Låt $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$. Vi påstår nu att $\widetilde{\varphi}$ är harmonisk på $\widetilde{\Omega}$. Vi har att

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f^{-1}}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{(f^{-1})}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\overline{(f^{1})}'$$

eftersom f^{-1} är holomorf. (Hur vet vi det?). Vidare har vi att

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial \overline{z}}\overline{(f^{1})}' + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{(f^{1})}'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\overline{\left(\frac{\partial (f^{-1})}{\partial \overline{z}}\right)} = 0$$

eftersom φ är harmonisk och (f^{-1}) är holomorf. Alltså är $\Delta \widetilde{\varphi} = 0$.

I övrigt så läs detta avsnitt kursivt.

7.2 Geometriska betraktelser

Läs detta avsnitt försiktigt. Här introduceras så kallade konforma avbildningarm, dvs avbildningar som bevarar vinklar mellan två kurvor i en speciell punkt. Detta betyder att om γ_1 och γ_2 möts i en punkt z, så är vinkeln mellan dessa lika med vinkeln mellan $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ i punkten $f(z)$. Koncentrera er inte på bevis i detta avsnitt, utan ideér. Avslutningsvis så bör man känna till, utan bevis, följande sats:

Sats 7.1. *Om Ω och $\widetilde{\Omega}$ är enkelt sammanhängande områden som inte är lika med $\mathbb{C}$, så finns en biholomorf avbildning $f\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$.*

Kom ihåg att detta bara är en existenssats, så vi vet inte hur denna avbildning ser ut!

7.3 Möbiusavbildningar (7.3-7.4)

Vi tar nu hand om både avsnitt 7.3 och 7.4 som avslutar kursen. Vi ska börja med att gå igenom några typer av avbildningar.

- Translation: Detta är en funktion $f(z) = z+c$, $c \in \mathbb{C}$. En translation flyttar ett objekt c ”steg”.
- Rotation: Funktionen $f(z) = e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, roterar ett objekt med θ radianer moturs.
- Skalning: $f(z) = \rho z$, $\rho \in \mathbb{R}, \rho \geq 0$, ör en skalningsfunktion, så den förminskar eller förstorar objekt. Speciellt har vi att om $w = f(z)$, för w_1, w_2 i w-planet

  $$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)| = |\rho z_1 - \rho z_2| = \rho|z_1 - z_2|.$$

- Affina avbildningar: Detta är en avbildning på formen $f(z) = az + b$. Vi kan skriva f som en komposition

  $$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

  där f_1 är en rotation, f_2 en skalning, och f_3 en translation.
- Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$. Läs om detta i boken.

Dessa olika typer av avbildningar är viktiga för så kallade Möbiusavbildningar, så det är dags att definiera dessa:

Definition 7.2. *En Möbiusavbildning är en funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som definieras genom*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ med $ad - bc \neq 0$.

Anmärkning 1. Villkoret $ad - bc \neq 0$ betyder att determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ska vara nollskild. □

Observation 1.

- Om $c = 0$, då är $ad \neq 0$ och

  $$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

  är en affin avbildning.

- Om $c \neq 0$, då har $f(z)$ en pol i $z = -\frac{d}{c}$.
- Om $a \neq 0$, då har $f(z)$ ett nollställe i $z = -\frac{b}{a}$.

$\square$

Affina avbildningar kan vi betrakta som avbildningar $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ med $\infty \mapsto \infty$. Då blir dessa avbildningar bijektiva. Om vi betraktar inversionsavbildningen som en avbildning $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ med $0 \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto 0$ så blir även denna bijektiv. Vad händer då om vi betraktar Möbiusavbildningar som avbildningar på $\mathbb{C}_\infty$? Jo, de blir också bijektiva, och om $c \neq 0$ så $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto \frac{a}{c}$. Vidare så ges dess derivata av

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2}$$

och f:s invers av

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Observation 2. Notera att f^{-1} också är en Möbiusavbildning med $\infty \mapsto -\frac{d}{c}$ och $\frac{a}{c} \mapsto \infty$. $\square$

Vi har följande viktiga sats om Möbiusavbildningar:

Sats 7.3. *Låt f vara en Möbiusavbildning. Då gäller att*

1. *f kan uttryckas som en sammansättning av en ändlig följd av translationer, rotationer, skalningar och inversioner.*
2. *$f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ är bijektiva.*
3. *f avbildar mängden $\{\text{linjer}, \text{cirklar}\}$ på sig själv.*

Slutsats (3) i satsen ovan betyder speciellt att en linje kan avbildas på en cirkel och vice versa. För Möbiusavbildningar har vi en annan viktig sats, nämligen:

Sats 7.4. *(***Avbildningsprincipen**
Låt f vara en Möbiusavbildning och låt γ vara en enkel styckvis $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}_\infty$. Då är $\mathbb{C} \setminus \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ en disjunkt union av två områden. Vidare så är $\gamma^* := f(\gamma)$ en kurva i $\mathbb{C}_\infty$ och $\mathbb{C} \setminus \gamma^* = f(\Omega_1) \cup f(\Omega_2)$.

Anmärkning 2. Rita en bild av avbildningsprincipen. $\square$

Nu till några exempel.

Exempel 1. Betrakta $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Detta är en Möbiusavbildning eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Vi har att

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}.$$

Låt $f_1(z) = z - 1$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = 2z$ och $f_4(z) = z + 1$. Då är

$$f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z).$$

Låt oss kolla hur f avbildar $|z| = 1$. Först så translaterar f_1 cirkeln. Efter detta så blir cirkeln en linje via inversionen. Därefter så förlänger vi linjen med f_3 och slutligen så translaterar vi linjen igen. Alltså avbildar f cirkeln $|z| = 1$ på en linje. Efterso en linje bestäms av två punkter så tar vi två punkter på enhetscirkeln och avbildar dessa med f:

$$i \mapsto \frac{i+1}{i-1} = i$$

och

$$-1 \mapsto 0.$$

Den enda linjen som går genom 0 och i är $\text{Re}(z) = 0$. Så bilden av $|z| = 1$ under f är $\text{Re}(z) = 0$.

Låt oss kolla med avbildningsprincipen vart det inre av $|z| = 1$ och det yttre hamnar. Tag därför en punkt innanför, t.ex. $z = 0$. Denna avbildas av f till -1, så vi drar slutsatsen att allt innanför cirkeln avbildas till vänstra halvplanet ($\text{Re}(z) < 0$), och avbildar allt utanför cirkeln till högra halvplanet ($\text{Re}(z) > 0$). (Tag en annan punkt och testa!) $\square$

Exempel 2. Vi ska beskriva bilden av $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ under avbildningen $f(z) = \frac{z-i}{z}$. Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i \neq 0$$

så är f en Möbiusavbildning.

För att få koll på hur detta område avbildas med f ska vi använda oss av argumentprincipen. Problemet är att vi inte har några kurvor att avbilda. Därför kollar vi vad som händer med $\operatorname{Im} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = 1$.

Vi börjar med $\operatorname{Im} z = 0$. Eftersom f har en pol i $z = 0$ som ligger på $\operatorname{Im} z = 0$ så måste denna linje avbildas på en linje. En linje bestäms av två punkter på $\operatorname{Im} z = 0$, t.ex. $z = -1$ och $z = 1$. Dessa ger att

$$f(-1) = 1 + i$$

och

$$f(1) = 1 - i.$$

Vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z = 0$ på $\operatorname{Re} z = 1$. För att bestämma hur $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas, så tar vi en punkt med $\operatorname{Im} z > 0$ och använder avbildningsprincipen, Tag t.ex. $z = i$, då får vi att $f(i) = 0$, så vi fastställer att f avbildar $\operatorname{Im} z > 0$ på $\operatorname{Re} z < 1$. Låt oss nu kolla på hur f avbildar $\operatorname{Im} z = 1$. Funktionen f saknar pol på $\operatorname{Im} z = 1$, därför måste $\operatorname{Im} z$ avbildas på en cirkel. En cirkel bestäms av tre punkter. Vi har att

$$f(-1+i) = \frac{1}{2}(1+i) \ ,$$

$$f(i) = 0$$

och

$$f(1+i) = \frac{1}{2}(1-i)$$

där $-1+i, 0$ och $1+i$ ligger på $\operatorname{Im} z = 1$. Ur detta får man cirkelns ekvation, vi får räkna lite själva också, $|z - 1/2| = 1/2$. Men hur avbildas $\operatorname{Im} z < 1$. Tag en punkt med $\operatorname{Im} z < 1$, t.ex. $i/2$, så får vi att $f(i/2) = -1$, så z med $\operatorname{Im} z < 1$ avbildas utanför cirkeln $|z - 1/2| = 1/2$.

Alla uträkningar ovan ger att området A avbildas via f till

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1 \ , \ |z - 1/2| > 1/2\}.$$

Rita en bild över vad som händer! $\square$