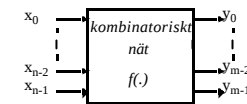


F2: Boolesk algebra och logiska grindar

- **Innehåll:**
 - Axiom i boolesk algebra
 - En-variabel teorem
 - Två- och tre-variabel teorem
 - n-variabel teorem
 - Dualitet
 - Representation av logiska funktioner

1 (1 4)

Kombinatorisk logik



Utgångarna $y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_0$ är endast en funktion av ingångarna $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_0$.

$$Y = (y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_0); \quad X = (x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_0)$$

$$Y = f(X)$$

2 (1 4)

Konventioner i boolesk algebra

Symboliska värden används för att representera det logiska tillståndet för en logisk signal.

En logisk signal kan anta ett av två möjliga tillstånd.

Möjliga tillstånd är *låg* eller *hög* och motsvarande logiska värde kan vara 0 för ett av dessa tillstånd och 1 för det andra.

Exempel: $X = 0$.

I *positiv logik* motsvarar en låg spänningsnivå en logisk nolla (0) och hög spänningsnivå en logisk etta (1).

I *negativ logik* motsvarar en hög spänningsnivå en logisk nolla (0) och låg spänningsnivå en logisk etta (1).

(Algebran kan utvecklas oberoende av hur kretslogiken arbetar om man bara arbetar med de logiska symbolerna 0 och 1)

3 (1 4)

Axiom (A1, A2)

• A1: Digital abstraktion

Variabeln X kan endast anta ett av två tillstånd

$$(A1) \quad X = 0 \quad \text{if } X \neq 1$$

$$(A1') \quad X = 1 \quad \text{if } X \neq 0$$

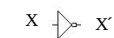
• A2: Komplement

$$(A2) \quad \text{if } X = 0, \text{ then } X' = 1$$

$$(A2') \quad \text{if } X = 1, \text{ then } X' = 0$$

' är en algebraisk operator och uttalas "icke". X' uttalas "icke X ".

Konventioner: Komplementet för en signal X kan skrivas på följande sätt $X', \overline{X}, \sim X, \neg X$



4 (1 4)

Axiom (A3-A5)

• A3-A5: OCH-operatoren (AND) / ELLER-operatoren (OR)

$$(A3) \ 0 \cdot 0 = 0 \quad (A3') \ 1 + 1 = 1$$

$$(A4) \ 1 \cdot 1 = 1 \quad (A4') \ 0 + 0 = 0$$

$$(A5) \ 0 \cdot 1 = 0 \quad (A5') \ 1 + 0 = 1$$

OCH-operator / logisk multiplikation

Symbol	Logisk grind	Logiskt uttryck
.		$Z = X \cdot Y$ *)

*) alternativa skrivsätt:

$$Z = XY$$

$$Z = X \wedge Y$$

ELLER-operator / logisk addition

Symbol	Logisk grind	Logiskt uttryck
+		$Z = X + Y$

**) alternativt skrivsätt

$$Z = X \vee Y$$

En-variabel teorem

Räknelagar som gör det möjligt att förenkla logiska uttryck

(T1)	$X + 0 = X$	(T1')	$X \cdot 1 = 1$
(T2)	$X + 1 = 1$	(T2')	$X \cdot 0 = 0$
(T3)	$X + X = X$	(T3')	$X \cdot X = X$
(T4)	$(X')' = X$	(T4')	
(T5)	$X + X' = 1$	(T5')	$X \cdot X' = 0$

Genom perfekt induktion kan T1-T5 enkelt bevisas.

Exempel: Visa T5!

$$X = 0 \text{ i T5 ger } 0 + 0' = 0 + 1 \text{ enligt (A2)}$$

$$= 1 \text{ enligt (A5')}$$

$$X = 1 \text{ i T5 ger } 1 + 1' = 1 + 0 \text{ enligt (A2')}$$

$$= 1 \text{ enligt (A5')}$$

och därmed är T5 bevisat!

Två- och tre-variabel teorem

(T6)	$X + Y = Y + X$	(T6')	$X \cdot Y = Y \cdot X$	Kommutativitet
(T7)	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	(T7')	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$	Associativitet
(T8)	$X \cdot Y + X \cdot Z = X \cdot (Y + Z)$	(T8')	$(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$	Distributivitet
(T9)	$X + X \cdot Y = X$	(T9')	$X \cdot (X + Y) = X$	Absorption
(T10)	$X \cdot Y + X \cdot Y' = X$	(T10')	$(X + Y) \cdot (X + Y') = X$	Kombination
(T11)	$X \cdot Y + X' \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + X' \cdot Z$	(T11')	$(X + Y) \cdot (X' + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (X' + Z)$	Consensus

Teorem T6 - T8 är identiska med de teorem som finns för heltal och flyttal.
(T8') visar upp en unik egenskap som switching algebra har. Bevis:

$$(X + Y)(X + Z) = (X + Y) \cdot X + (X + Y) \cdot Z \quad \text{enligt (T8)}$$

$$= X \cdot (X + Y) + Z \cdot (X + Y) \quad \text{enligt (T6)}$$

$$= X \cdot X + X \cdot Y + Z \cdot X + Z \cdot Y \quad \text{enligt (T8)}$$

$$= X + Z \cdot X + Z \cdot Y \quad \text{enligt (T9)}$$

$$= X + Y \cdot Z \quad \text{enligt (T9)}$$

n-variabel teorem

(T12)	$X + X + \dots + X = X$	(T12')	$X \cdot X \cdot \dots \cdot X = X$	
(T13)	$(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \dots + X_n'$	(T13')	$(X_1 + X_2 + \dots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \dots \cdot X_n'$	DeMorgan's teorem
(T14)	$[F(X_1, X_2, \dots, X_n, +, \cdot)]' = F(X_1', X_2', \dots, X_n', \cdot, +)$			Generaliserad DeMorgan
(T15)	$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 \cdot F(1, X_2, \dots, X_n) + X_1' \cdot F(0, X_2, \dots, X_n)$	(T15')	$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = [X_1 + F(0, X_2, \dots, X_n)] \cdot [X_1' + F(1, X_2, \dots, X_n)]$	Shannons expansions-teorem

Exempel på tillämpning av DeMorgans teorem:

$$Z = (X \cdot Y)' = X' + Y' \quad (1) \quad Z = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y} \quad (1)$$

$$Z = (X + Y)' = X' \cdot Y' \quad Z = \overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Exempel på olika logiska grindar som motsvarar ekvation (1) ovan.



Dualitetsprincipen

Dualitetsprincipen: teorem och likheter i switching algebra förblir sanna om genomgående 0 och 1 byts ut mot varandra och operatorena $\cdot$ och $+$ byts ut mot varandra.

Generaliserade DeMorgans teorem visar dualitetsprincipen

$$[F(X_1, X_2, \dots, X_n, +, \cdot)]' = F(X_1', X_2', \dots, X_n', \cdot, +)$$

Om man definierar F^D som den duala funktionen av F så blir den:

$$F^D(X_1, X_2, \dots, X_n, +, \cdot) = F(X_1, X_2, \dots, X_n, \cdot, +)$$

Omformulering av DeMorgans Teorem blir då:

$$[F(X_1, X_2, \dots, X_n)]' = F^D(X_1', X_2', \dots, X_n')$$

Positiv logik och negativ logik:

elektrisk funktion			logisk funktion, positiv logik			logisk funktion, negativ logik		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
LOW	LOW	LOW	0	0	0	1	1	1
LOW	HIGH	HIGH	0	1	1	1	0	0
HIGH	LOW	HIGH	1	0	1	0	1	0
HIGH	HIGH	HIGH	1	1	1	0	0	0

9 (14)

Representation av logiska funktioner

• Sanningstabell:

Komplett beskrivning av en logisk funktion i tabellform:

Rad	X	Y	Z	F
0	0	0	0	$F(0,0,0)$
1	0	0	1	$F(0,0,1)$
2	0	1	0	$F(0,1,0)$
3	0	1	1	$F(0,1,1)$
4	1	0	0	$F(1,0,0)$
5	1	0	1	$F(1,0,1)$
6	1	1	0	$F(1,1,0)$
7	1	1	1	$F(1,1,1)$

Antal in-variabler: n

Antal rader = antal kombinationer insignalerna kan anta = 2^n

bitmönstret i utgångskolumnen (F) ger en logisk funktion.

Informationen i en sanningstabell kan överföras till algebraisk form.

10 (14)

• Definitioner

En *produktterm* är en variabel eller en logisk produkt av två eller flera variabler.

Exempel: $W \cdot X' \cdot Y$

En *summa-av-produkter* (SP) är en logisk summa av produkttermer.

Exempel: $Z' + W \cdot X \cdot Y + X \cdot Y'$

En *summa-term* är en literal eller en logisk summa av två eller fler variabler

Exempel: $W + X + Y$

En *produkt-av-summor* (PS) är en logisk produkt av summa-termer.

Exempel: $(W + X + Y) \cdot (X + Y + Z) \cdot Z'$

En *normalterm* är en produkt- eller summaterm där ingen variabel förekommer mer än en gång.

Exempel: $W \cdot X \cdot Y$, $W + X + Y$

En *minterm* är en produkt av samtliga variabler in till funktionen.

Exempel: $W \cdot X' \cdot Y' \cdot Z$ i en 4-variabel funktion.

En *maxterm* är en normal summa-term av samtliga variabler in till funktionen.

Exempel: $W + X' + Y' + Z$

11 (14)

• Summa-av-mintermer

Med utgångspunkt från en sanningstabell skapas ett logiskt uttryck som består av en summa av alla mintermer som ger 1 på utgången.

Exempel:

i	X	Y	Z	F	minterm (m _i)
0	0	0	0	0	$X' \cdot Y' \cdot Z'$
1	0	0	1	1	$X' \cdot Y' \cdot Z$
2	0	1	0	1	$X' \cdot Y \cdot Z'$
3	0	1	1	0	$X' \cdot Y \cdot Z$
4	1	0	0	0	$X \cdot Y' \cdot Z'$
5	1	0	1	0	$X \cdot Y' \cdot Z$
6	1	1	0	1	$X \cdot Y \cdot Z'$
7	1	1	1	1	$X \cdot Y \cdot Z$

Summan av mintermer blir då: $F = X' \cdot Y' \cdot Z + X' \cdot Y \cdot Z' + X \cdot Y \cdot Z' + X \cdot Y \cdot Z$

Med ett komprimerat skrivsätt anger man endast vilka rader mintermerna finns.

$F = \sum_{X,Y,Z} (1, 2, 6, 7)$; Canonical sum

12 (14)

• Summa-av-maxtermer

Med utgångspunkt från en sanningstabell skapas ett logiskt uttryck som består av en summa av alla maxtermer som ger 0 på utgången.

Exempel:

i	X	Y	Z	F	maxterm (M)
0	0	0	0	0	$X + Y + Z$
1	0	0	1	1	$X + Y + Z'$
2	0	1	0	1	$X + Y' + Z$
3	0	1	1	0	$X + Y' + Z'$
4	1	0	0	0	$X' + Y + Z$
5	1	0	1	0	$X' + Y + Z'$
6	1	1	0	1	$X' + Y' + Z$
7	1	1	1	1	$X' + Y' + Z'$

Summan av mintermer blir då: $F = (X + Y + Z) \cdot (X + Y' + Z') \cdot (X' + Y + Z) \cdot (X' + Y' + Z)$

Med ett komprimerat skrivsätt anger man endast vilka rader maxtermerna finns.

$F = \Pi_{X,Y,Z} = (0, 3, 4, 5)$; Canonical product

OBSERVERA : $M_i = m_i'$

Summering

En logisk funktion kan representeras på olika sätt:

- Sanningstabell
- en algebraisk summa-av-mintermer
- en lista med min-termer med Σ -notation
- en algebraisk produkt-av-maxtermer
- en lista med max-termer med Π -notation