

## F4: Quine-McCluskeysmetod

- Innehåll:
  - Minimering av ett logisktuttryck
  - Hantering *avdon't care* i QMs metod
  - Minimering av multipla uttryck

1 (18)

## Motivation

- Minimering av logiska uttryck
  - Booleskalgebra
    - Symboliskmetod
    - Komplex att hantera (många teorem)
  - Karnaughdiagram
    - Begränsad till max 6 insignaler
    - Grafiskmetod som är svår att automatisera
  - Quine-McCluskeysmetod
    - N-insignaler
    - Symatisk algoritm => Lätt att automatisera

2 (18)

## Begrepp

- Definitioner
  - Hammingvikt (antal ettor)

$$hammingvikt = \sum_{i=0}^{N-1} b_i$$

- Reduktion av primimplikatorer

$$x \cdot p + x' \cdot p = p(x + x') = p \cdot 1 = p$$

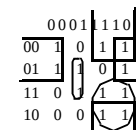
- Metod
  - Algoritmen består av två moment
    - Generering av primimplikatorer
    - Urval av primimplikatorer

3 (18)

## Generering av Primimplikatorer

- Bestäm alla mintermer för funktionen

$$F = \sum_{v, x, y, z} (0, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 13, 14, 15)$$



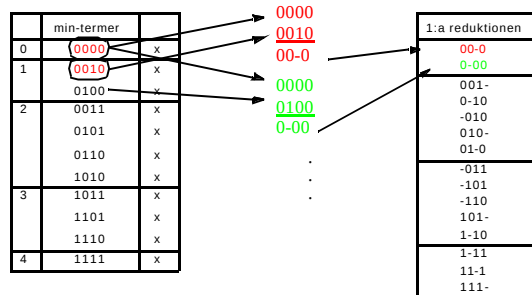
- Skapa en tabell med alla mintermer sorterade efter Hammingvikt

| Hammingvikt | minterm |      |
|-------------|---------|------|
| 0           | 0       | 0000 |
| 1           | 2       | 0010 |
|             | 4       | 0100 |
| 2           | 3       | 0011 |
|             | 5       | 0101 |
|             | 6       | 0110 |
|             | 10      | 1010 |
| 3           | 11      | 1011 |
|             | 13      | 1101 |
|             | 14      | 1110 |
| 4           | 15      | 1111 |

4 (18)

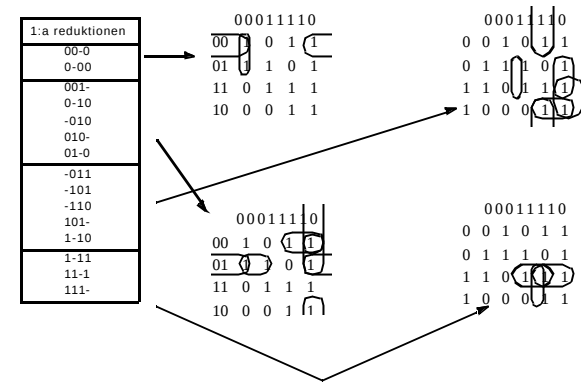
## 1:a reduktionen

- Reduktion av genom att utnyttja att:  $xp+x'p = p(x+x') = p$ 
  - Termerna i varje grupp jämförs med termerna i gruppen med närmast högre Hammingvikt.
  - Varje term som använts i en reduktion markeras



5 (18)

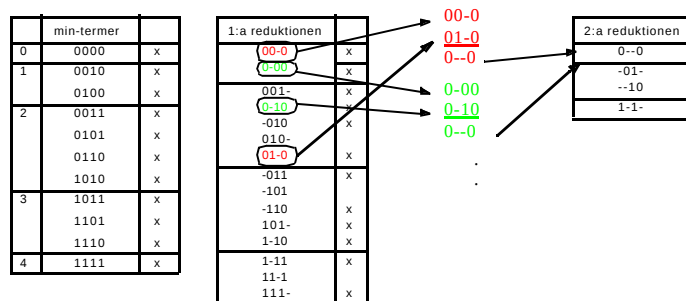
## Karnaughequivivalent



6 (18)

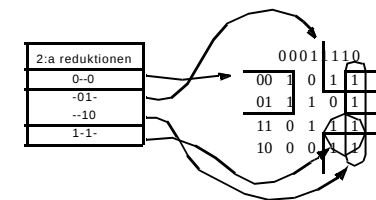
## 2:a reduktionen

- Kombinera ihop termerna från 1:a reduktionen
  - Termer som kan kombineras har '-' på samma position
  - Markera alla termer som har använts för att kombinera ihop nya termer



7 (18)

## Karnaughequivivalent



8 (18)

## Samla ihop primplikatorerna

- Alla termer som inte är markerade är primimplikatorer

|   | min-termer |   |
|---|------------|---|
| 0 | 0000       | x |
| 1 | 0010       | x |
|   | 0100       | x |
| 2 | 0011       | x |
|   | 0101       | x |
|   | 0110       | x |
|   | 1010       | x |
| 3 | 1011       | x |
|   | 1101       | x |
|   | 1110       | x |
| 4 | 1111       | x |

| 1:a reduktionen |   |  |
|-----------------|---|--|
| 00-0            | x |  |
| 0-00            | x |  |
| 001-            | x |  |
| 0-10            | x |  |
| -010            | x |  |
| 010-            | x |  |
| 01-0            | x |  |
| -011            | x |  |
| -101            | x |  |
| -110            | x |  |
| 101-            | x |  |
| 1-10            | x |  |
| 1-11            | x |  |
| 11-1            | x |  |
| 111-            | x |  |

| 2:a reduktionen<br>vxyz |  |
|-------------------------|--|
| 0-0                     |  |
| -01-                    |  |
| --10                    |  |
| 1-1-                    |  |

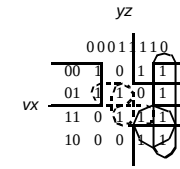
- $p_1 = v'xy'$   
 $p_2 = xy'z$   
 $p_3 = vxz$   
 $p_4 = v'z'$   
 $p_5 = x'y$   
 $p_6 = yz'$   
 $p_7 = vy$

9 (18)

## Primimplikatorerna i ett Karnaughdiagram

Primimplikator Mintermer

- $p_1 = v'xy'$  4,5  
 $p_2 = xy'z$  5,13  
 $p_3 = vxz$  13,15  
 $p_4 = v'z'$  0,2,4,6  
 $p_5 = x'y$  2,3,10,11  
 $p_6 = yz'$  2,6,10,14  
 $p_7 = vy$  10,11,14,15



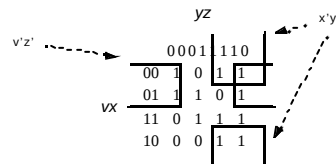
- Lista vilka mintermer som varje primimplikator täcker

10 (18)

## Urvalstabell

| No. var | PI | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 3       | 1  |   |   |   | x | x |   |    |    |    |    |    |
| 3       | 2  |   |   |   |   | x |   |    |    | x  |    |    |
| 3       | 3  |   |   |   |   |   |   |    |    | x  |    | x  |
| 2       | 4  | x | x |   | x |   | x |    |    |    |    |    |
| 2       | 5  |   | x | x |   |   |   | x  | x  |    |    |    |
| 2       | 6  |   | x |   |   |   | x | x  |    |    | x  |    |
| 2       | 7  |   |   |   |   |   | x | x  |    |    | x  | x  |

- Identifiera väsentliga primimplikatorer [ $p_4 (m_0)$  och  $p_5 (m_3)$  ]
- $F = v'z' + x'y + \dots$



11 (18)

## Reduktion av primimplikatortabell

| No. var | PI | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 3       | 1  |   |   |   | x | x |   |    |    |    |    |    |
| 3       | 2  |   |   |   |   | x |   |    |    | x  |    |    |
| 3       | 3  |   |   |   |   |   |   |    |    | x  |    | x  |
| 2       | 4  | x | x |   | x |   | x |    |    |    |    |    |
| 2       | 5  |   | x | x |   |   |   | x  | x  |    |    |    |
| 2       | 6  |   | x |   |   |   | x | x  |    |    | x  |    |
| 2       | 7  |   |   |   |   |   |   | x  | x  |    | x  | x  |

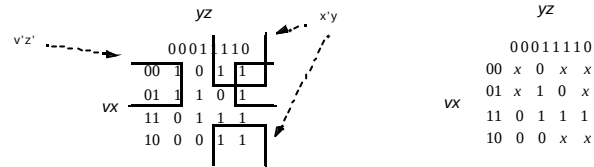
- Reducera bort väsentliga primimplikatorer från tabellen
- $p_4$  och  $p_5$ , samt kolumnerna som täcks av dessa kan också strykas ( $m_0, m_2, m_3, m_4, m_6, m_{10}, m_{11}$ )

| No. var | PI | 5 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|----|----|----|
| 3       | 1  | x |    |    |    |
| 3       | 2  | x | x  |    |    |
| 3       | 3  |   | x  |    | x  |
| 2       | 6  |   |    | x  |    |
| 2       | 7  |   |    | x  | x  |

12 (18)

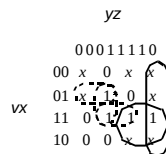
## Karnaughdiagram ekvivalent

Ta bort ettor som täcks av de väsentliga primimplikatorerna



### Kvarvarande primimplikatorer

| No. var | PI | 5 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|----|----|----|
| 3       | 1  | x |    |    |    |
| 3       | 2  | x | x  |    |    |
| 3       | 3  |   | x  |    | x  |
| 2       | 6  |   |    | x  |    |
| 2       | 7  |   |    | x  | x  |



13 (18)

## Kolumn- och raddominans

### Kolumndominans:

- Om  $k$  och  $l$  är två kolumner i en primimplikatortabell, och  $k = l$  eller  $k$  har kryss i alla rader som  $l$  har kryss, sägs  $k$  dominera  $l$ .
- $k$  är den dominerande
- $l$  är den dominerade Exempel:  $k_5$  dominerar  $k_4$  och  $k_6$

|   | PI | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|----|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1  |   |   |   | x | x |   |
| 3 | 2  |   |   |   | x | x |   |
| 3 | 3  | x |   |   |   |   |   |
| 2 | 4  |   | x | x | x | x | x |
| 2 | 5  |   | x | x |   |   |   |
| 2 | 6  |   | x |   |   | x | x |

### Raddominans:

- Om  $r$  och  $s$  är två rader i en primimplikatortabell och följande två villkor gäller så sägs  $r$  dominera  $s$ .
- 1.  $r$  och  $s$  är lika eller  $r$  har kryss i alla kolumner som  $s$  har kryss, och
- 2. kostnaden för  $r$  inte är högre än för  $s$ .
- Dominerade rader och dominerande kolumner kan strykas ur primimplikatortabellen

14 (18)

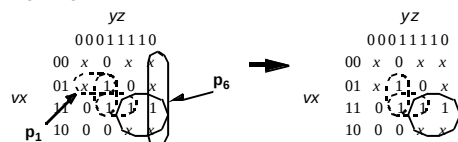
## Ta bort dominerade rader och dominerande kolumner

| No. var | PI | 5 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|----|----|----|
| 3       | 1  | x |    |    |    |
| 3       | 2  | x | x  |    |    |
| 3       | 3  |   | x  |    | x  |
| 2       | 6  |   |    | x  |    |
| 2       | 7  |   |    | x  | x  |

- Rad 7 dominerar rad 6 och rad 2 dominerar rad 1

| No. var | PI | 5 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|----|----|----|
| 3       | 2  | x | x  |    |    |
| 3       | 3  |   | x  |    | x  |
| 2       | 7  |   |    | x  | x  |

- Karnaughdiagram ekvivalens

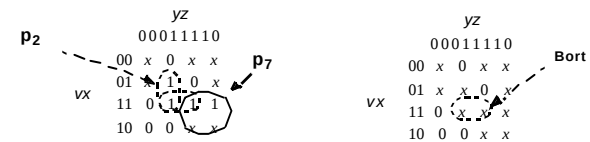


15 (18)

## Identifiering av sekundärt väsentliga primimplikatorer

| No. var | PI | 5 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|---|----|----|----|
| 3       | 2  | x | x  |    |    |
| 3       | 3  |   | x  |    | x  |
| 2       | 7  |   |    | x  | x  |

- $p_1$  och  $p_7$  är sekundärt väsentliga primimplikatorer
- $F = v'z' + x'y + vy + v'xy'$
- Karnaughdiagram ekvivalent:



16 (18)

## Hantering av *don't care*

- **Samtliga primimplikatorer identifieras**
  - under identifieringen betraktas *don't care* som ettor (mintermer)
- **Vid val av primimplikatorer, matchas primimplikatorerna bara mot mintermerna, *don't care* alternativen ignoreras.**

## Sammanfattning

1. Generera samtliga primimplikatorer
2. Skapa urvalstabellen
3. Finns det några kolumner, som innehåller endast ett kryss vardera? De primimplikatorer, som täcker kolumner med endast ett kryss, är väsentliga och skall därför ingå i respektive funktion. De ges i fortsättningen kostnad noll. Är tabellen tom är vi klara.
4. Eliminera dominerade rader. Om sådana saknas, gå till steg 6.
5. Finns det inte någon kolumn med endast ett kryss, gå till steg 6. De primimplikatorer som täcker kolumner med endast ett kryss skall ingå i respektive funktion och ges i fortsättningen kostnaden noll. Är tabellen tom, är vi klara, annars fortsätter vi med steg 4.
6. Eliminera dominerande kolumner. Om sådana saknas, fortsätt med steg 8.
7. Eliminera dominerade rader. Om någon rad elimineras, gå till steg 5.
8. Tabellen är cyklisk. Välj den kolumn som har så få kryss som möjligt. Välj därefter en av de primimplikatorer som täcker denna kolumn. Detta kan vara det optimala valet, men för att finna den minimala lösningen måste du prova samtliga val i denna kolumn. Fortsätt med steg 4.