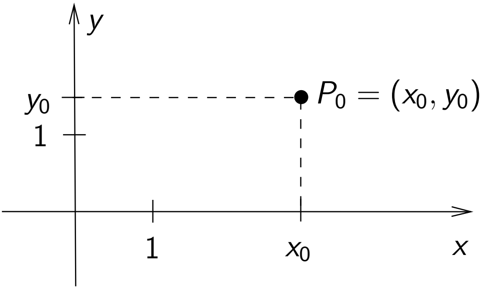
Inledning

Vi beskriver punkter i planet m.a.p. ett koordinatsystem med vinkelräta axler.



En linjär ekvation i de två variablerna x och y är en ekvation av formen

$$a_1 x + a_2 y = b$$

med reella tal a_1, a_2 och b.

Antag att åtminstone ett av talen a_1, a_2 är $\neq 0$.

Då är mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller $a_1x + a_2y = b$ en linje i planet.

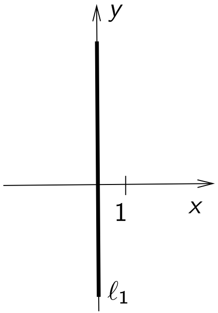
Vi säger att $a_1x + a_2y = b$ ger linjen ℓ och skriver

$$\ell : \quad a_1x + a_2y = b.$$

Exempel 1

a) $a_1 = 1$, $a_2 = b = 0$.

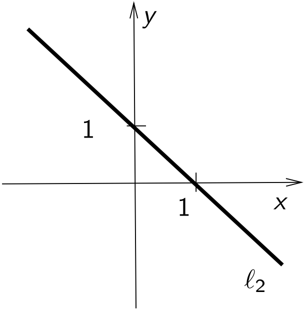
$\ell_1 : x = 1{\cdot}x{+}0{\cdot}y = 0$ ger y-axeln (alla punkter på formen $(0, y)$ där $y \in \mathbb{R}$



b) $a_1 = a_2 = b = 1.$

$\ell_2 : x + y = 1.$

Observera $x + y = 1 \iff y = -x + 1$. Alltså är ℓ_2 grafen till den linjära funktionen $f(x) = -x + 1$.



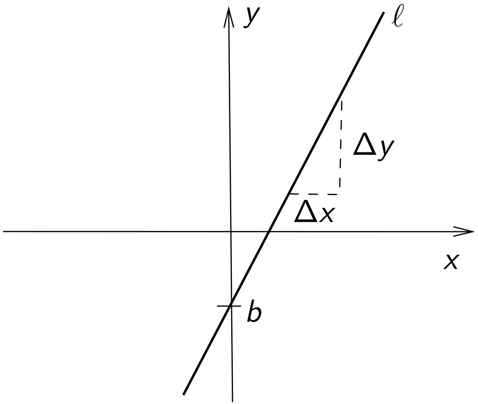
$(2, -1)$ ligger på ℓ_2 eftersom $2 + (-1) = 1$.

$(2, 0)$ ligger inte på ℓ_2 eftersom $2 + 0 \neq 1$

Anmärkning: $\ell : y = ax + b$.

$a = \Delta y / \Delta x$
linjens lutning

linjen skär y-axeln
i $(0, b)$



Exempel 2 Fallet $a_1 = a_2 = 0$. Lösningsmängden till $0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y = b$ är

- $\mathbb{R}^2$ (d.v.s. hela planet) om $b = 0$
- tom om $b \neq 0$

Skärningen $\ell_1 \cap \ell_2$ mellan två linjer ℓ_1, ℓ_2 i planet givna genom $\ell_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1$, $\ell_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2$ är mängden av alla punkter (x, y) som uppfyller systemet

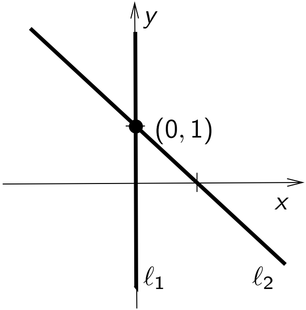
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Exempel 3

a) $$\begin{aligned} \ell_1 :\ & x & = \ & 0 \\ \ell_2 :\ & x + y & = \ & 1 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \{(0, 1)\}$

unik lösning

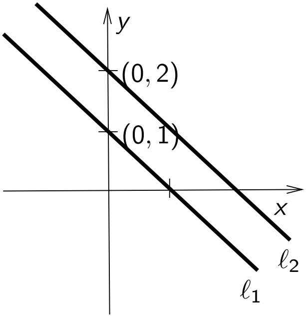


b) $\ell_1 : \; x + y = 1$

$\ell_2 : \; x + y = 2$

$\Longrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

ingen lösning

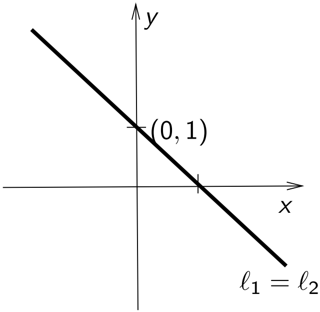


c) $\ell_1 : \; x + y = 1$

$\ell_2 : \; 2x + 2y = 2$

$\Longrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1 = \ell_2$

oändligt många lösningar



Två linjer ℓ_1, ℓ_2 i planet sägs vara parallella om $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ eller $\ell_1 = \ell_2$.

OBS: Våra definitioner av linjer och parallellitet måste modifieras i rummet!

Exempel 4 $\quad \ell_1 : \; x + y = 1, \quad \ell_2 : \; 2x - 3y = 0.$

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x + \;\; y & = & 1 & (1) \\ 2x - 3y & = & 0 & (2) \end{array} \right. \overset{\substack{(1^{ny})=(1) \\ (2^{ny})=(2)-2\cdot(1)}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrl} x + y & = & 1 & (1^{ny}) \\ -5y & = & -2 & (2^{ny}) \end{array} \right.$$

Observera att de två systemen faktiskt är ekvivalenta: Vi kan gå tillbaka genom $(1) = (1^{ny})$, $(2) = (2^{ny}) + 2 \cdot (1^{ny})$. Alltså har de samma lösningsmängd!

$\Longrightarrow y = \frac{2}{5}, x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\Longrightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \{(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})\}$

Linjära ekvationssystem

En linjär ekvation med n variabler $x_1, \ldots, x_n$ har formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

med givna reella tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ och b.

Exempel 5

$$\begin{gathered} 2x = \sqrt{3} \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = 0 \\ x_1 - \cos(2)x_2 - x_3 = -1 \end{gathered}$$

är linjära ekvationer. Däremot är följande inte linjära:

$$\begin{gathered} xy + y = 2 \\ x + \cos(y) = 1 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots + \frac{n}{x_n} = 0 \end{gathered}$$

Ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n variabler $x_1, \ldots, x_n$ är ett system

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (\star)$$

där $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ och $b_1, \ldots, b_m$ är givna reella tal.

En n-tuppel $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ kallas för lösning om alla ekvationer i systemet är uppfyllda för

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad \ldots \quad x_n = s_n.$$

Ett system kallas för konsistent om det finns åtminstone en lösning och inkonsistent annars.

Problem: Bestäm lösningsmängden till linjära ekvationssystem!

Strategie: Förenkla systemet m.h.a. operationer som inte förändrar lösningsmängden.

Elementära radoperationer

Följande operationer påverkar inte lösningarna till ett linjärt ekvationssystem:

(1) Multiplikation av en ekvation med ett tal $c \neq 0$.

(2) Byte av två ekvationer.

(3) Addition av en ekvation multiplicerad med ett tal c till en annan ekvation.

Exempel 6 Följande system har samma lösningsmängd:

$$(1)\left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ x&=0\end{aligned}\right. ,\qquad (2)\left\{\begin{aligned} 2x+2y&=2\\ x&=0\end{aligned}\right. ,$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} x&=0\\ x+y&=1\end{aligned}\right. ,\qquad (4)\left\{\begin{aligned} y&=1\\ x&=0\end{aligned}\right. .$$

Första ekvationen av (2) är första ekvationen av (1) multiplicerad med 2.

I systemen (1) och (3) har bara ekvationerna bytt plats.

Första ekvationen av (4) erhålls genom att addera andra ekvationen av (1) multiplicerad med -1 till första ekvationen av (1).

Två linjära ekvationssystem som kan transformeras i varandra genom elementära radoperationer kallas för ekvivalenta.

Exempel 6 (forts.) $(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4)$

Ekvivalenta system har samma lösningsmängd!

Matrisnotation: Istället för systemet $(\star)$ skriver vi också

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

eller

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Denna kallas den utökade matrisen till systemet $(\star)$.

Exempel 7

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 0 \\ -x + z &= 3 \\ y + 2z &= 1 \end{cases} \qquad \text{blir} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Elementära radoperationer översättes till matrisnotationen på följande sätt:

(1) Multiplikation av en <u>rad</u> med ett tal $c \neq 0$.

(2) Byte av två <u>rader</u>.

(3) Addition av en <u>rad</u> multiplicerad med ett tal c till en annan <u>rad</u>.

Gausselimination

En etta kallas för ledande etta om alla element som kommer tidigare i raden är nollor.

Exempel 7 (forts) Två ledande ettor!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right)$$

En utökad matris är på trappstegsform (TSF) om

(1) Varje rad innehåller en ledande etta eller är nollraden.

(2) En ledande etta står alltid längre åt höger än alla ledande ettor ovanför.

(3) Nollraderna kommer längst ner i matrisen.

En utökad matris är på reducerad trappstegsform (RTSF) om den är på TSF och

(4) En kolumn med en ledande etta innehåller annars bara nollor.

Exempel 8

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{TSF, RTSF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{ej TSF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ej TSF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{TSF, ej RTSF}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{TSF, RTSF}$$

Lösningsmängden är lätt att bestämma för ett system på TSF.

Exempel 9

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right)$$

översätts till $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x_3 &= -1, \\ x_2 &= 3 - x_3 = 4, \\ x_1 &= 1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 8 - 1 = -8, \qquad \textit{unik lösning} \end{aligned}$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

översätts till $$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & = & -3 \\ x_2 & = & 4 \\ 0 \cdot x_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ lösningsmängden är *tom*

Sats 1: Ledande ettor i sista kolumnen ger tom lösningsmängd.

Exempel 9 (forts)

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right)$

översätts till $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ x_3 & = & 3 \end{cases}$

$\Longrightarrow x_3 = 3,$

$x_1 = -1 - 2x_2 - x_3 = -2x_2 - 4,$ *oändligt många lösningar*

Lösningsmngden är alla (x_1, x_2, x_3) på formen $(-2t - 4, t, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Sats 2: Varje kolumn utan ledande etta ger en fri parameter i lösningsmängden.

Gausselimination: För en godtycklig utökad matris använder vi följande algoritm.

(1) Ta den första kolumn från vänster som inte bara innehåller nollor.

(2) Flytt en rad som har ett element $\neq 0$ i denna kolumn till första raden.

(3) Förvandla detta element till en ledande etta genom att multiplicera första raden med ett lämpligt tal.

(4) Producera nollor under den ledande ettan genom att addera lämpliga multipler av första raden till raderna nedanför.

Nu är första raden klar. Vi döljar den och tillämpar (1) - (4) till restmatrisen. Vi upprepar receptet tills hela matrisen är på TSF.

Gauss-Jordan elimination: För att hitta RTSF avslutar vi Gausseliminationen med följande steg.

(5) Vi börjar med den sista rad som innehåller en ledande etta och producerar nollor ovanför denna genom att addera lämpliga multipler av raden till raderna ovanför.

Detsamma gör vi för den direkt föregående raden o.s.v.

Systemet $(\star)$ kallas för homogent om

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0,$$

d.v.s. om sista kolumnen innehåller bara nollor. Observera att denna kolumn inte påverkas av Gausseliminationen.

I detta fall är systemet allltid konsistent eftersom det har lösningen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Exempel 10 Lös systemet

$$\begin{aligned} -2x_3 + 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

med Gausselimination.

Lösning Den utökade matrisen till systemet är

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{rad1 \leftrightarrow rad2} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{2} \cdot rad1} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{c} (-2) \cdot rad1 \\ adderad\ till\ \ rad3 \end{array}} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-\frac{1}{2})\cdot rad2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{(-5)\cdot rad2 \\ adderad\ \ till\ \ rad3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\cdot rad3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

är på TSF. Observera att x_2, x_4 är fria variabler.

Matrisen motsvarar systemet

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 & = & 14 \\ x_3 \qquad\quad - \frac{7}{2}x_5 & = & -6 \\ x_5 & = & 2 \end{array}$$

vilket har följande lösningar (på parameterform):

$$\Big(7 - 2s - 3t, s, 1, t, 2\Big)$$

där s, t är reella tal.

Exemple 10 (forts) Sista steget i Gauss-Jordan- eliminationen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\frac{7}{2}\cdot rad3 \\ adderad\ \ till\ \ rad2, \\ (-6)\cdot rad3 \\ adderad\ \ till\ \ rad1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{5\cdot rad3 \\ adderad\ \ till\ \ rad1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

är på RTSF.

Det motsvarande systemet är

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 & = & 7 \\ x_3 & = & 1 \\ x_5 & = & 2 \end{array}$$

och vi erhåller samma lösningsmängd som förut:

$$\left\{ \left(7 - 2s - 3t, s, 1, t, 2\right) \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exempel 11 För vilka värden på a har följande system

a) inga lösningar

b) en unik lösning

c) oändligt många lösningar?

Bestäm den allmänna lösningen i det fall att det finns oändligt många lösningar.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

Lösning Vi använder Gausselimination men lämnar ut steg 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(-3)\cdot rad1 \\ adderad\ till\ rad2, \\ (-4)\cdot rad1 \\ adderad\ till\ rad3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(-1)\cdot rad2 \\ adderad\ till\ rad3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

För att kunna producera ett ledande etta i varje kolumn (uttan den sista kolumnen) behöver vi

$$a^2 - 16 \neq 0$$

Fall 1: $a \neq \pm 4$. Enligt argumentet ovan får vi en unik lösning.

Fall 2: $a = -4$. I det fallet har systemet inga lösningar eftersom vi får ett ledande etta i sista kolumnen.

Fall 3: $a = 4$. Här får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-\frac{1}{7})\cdot rad2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I det fallet har systemet oändligt många lösningar (z är en fri variabel).

Sätt $z = t$.

$\Longrightarrow y = \frac{10}{7} + 2z = \frac{10}{7} + 2t$

$\Longrightarrow x = 4 - 2y + 3z = 4 - 2(\frac{10}{7} + 2t) + 3t = \frac{8}{7} - t$

Den allmänna lösningen är alltså

$$\left(\frac{8}{7} - t, \frac{10}{7} + 2t, t\right)$$

där $t \in \mathbb{R}$.