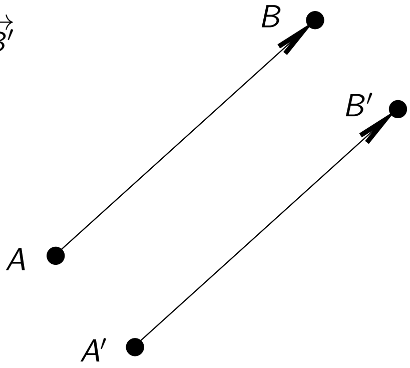
Vektorgeometri

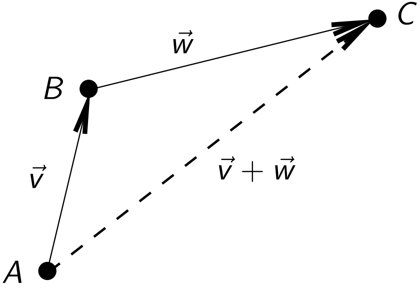
En vektor $\vec{v}$ kan representeras genom pilar från en fotpunkt A till en spets B.

Två pilar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ tilllhör samma vektor om de har samma riktning och samma längd.

Vi skriver $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$



Vektorsumma $\vec{v} + \vec{w}$:

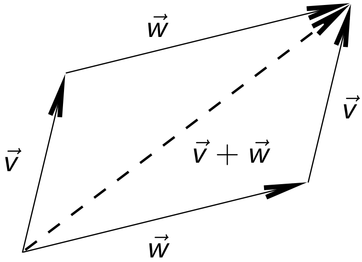


Representera $\vec{v}$, $\vec{w}$ genom pilar sådana att spetsen av pilen till $\vec{v}$ blir fotpunkten av pilen till $\vec{w}$.

Om A är fotpunkten av pilen till $\vec{v}$ och C spetsen av pilen till $\vec{w}$, sätt

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}.$$

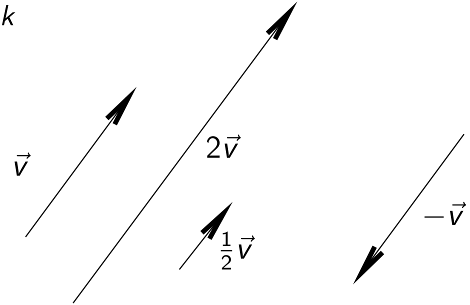
Observera att $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$:



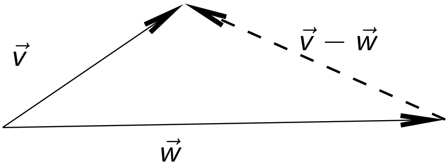
Produkt av en vektor $\vec{v}$ med en skalär $k \in \mathbb{R}$:

- $k \geq 0$: sträckning med k
- $k < 0$: sträckning med $-k$ och riktningsbyte

Vi skriver $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$



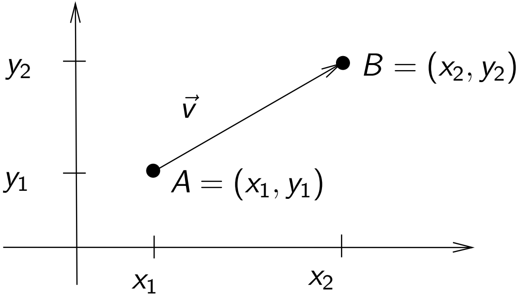
Differensen $\vec{v} - \vec{w}$ konstrueras alltså på följande sätt:



Vektorer i koordinater:

Antag att vi har valt ett rätvinkligt koordinatsystem. Låt $\overrightarrow{AB}$ representera $\vec{v}$ där $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Då tar vi som $\vec{v}$:s komponenter

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Anmärkning: Så vitt som möjligt skriver vi kolumnmatriser för vektorer och radmatriser för kolumner.

Vektorkalkyl:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \\
k\vec{v} &= k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Det tredimensionella fallet behandlas analogt!

Exempel 1 Bestäm fotpunkten A för pilen med spets i $B = (3, 0, -5)$ som representerar

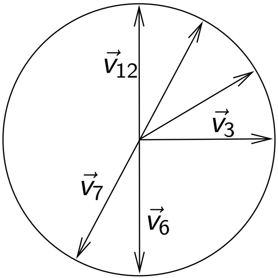
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning För $A = (x, y, z)$ gäller

$$\begin{pmatrix} 3 - x \\ 0 - y \\ -5 - z \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = (-1, 2, -4)$$

Exempel 2 Betrakta en klocka med pilar $\vec{v}_j$ ritade från centrumet till varje timme j.

Vad är $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_{11} + 2\vec{v}_{12}$?



Lösning

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_{11} + 2\vec{v}_{12} = \underbrace{\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_{11} + \vec{v}_{12}\right)} + \vec{v}_{12}$$

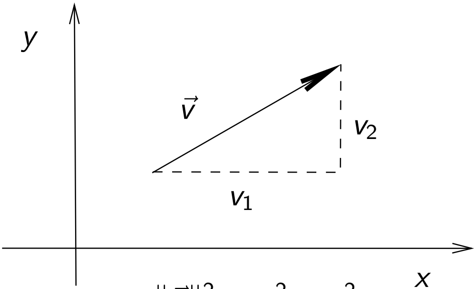
$$= \underbrace{\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_7\right)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left(\vec{v}_2 + \vec{v}_8\right)}_{=\vec{0}} + \ldots + \underbrace{\left(\vec{v}_6 + \vec{v}_{12}\right)}_{=\vec{0}}$$

$$= \vec{v}_{12}$$

Norm av vektorer

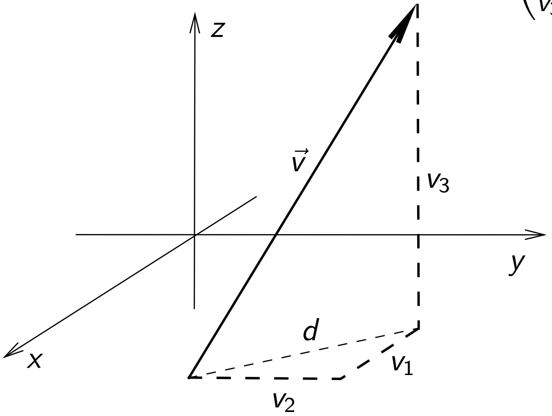
Längden av $\vec{v}$ kallas också för $\vec{v}$:s norm $\|\vec{v}\|$. Pytagoras lag ger

- i planet: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ där $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



$$\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

- i rymden: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ där $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$



$$\|\vec{v}\|^2 = v_3^2 + d^2 \text{ och } d^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Vektorer av längd 1 kallas för enhetsvektorer. Det gäller: $\|k\vec{v}\| = |k| \; \|\vec{v}\|$.

Exempel 3 Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna $\|\vec{v}\|$.

b) Bestäm enhetsvektorn $\vec{v}_0$ som har motsatta riktningen som $\vec{v}$.

Lösning

a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

b) $\vec{v}_0 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}$ har motsatta riktningen och

$$\|\vec{v}_0\| = \| - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}\| = | - \frac{1}{\sqrt{6}}| \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=\sqrt{6}} = 1.$$

Skalärprodukt

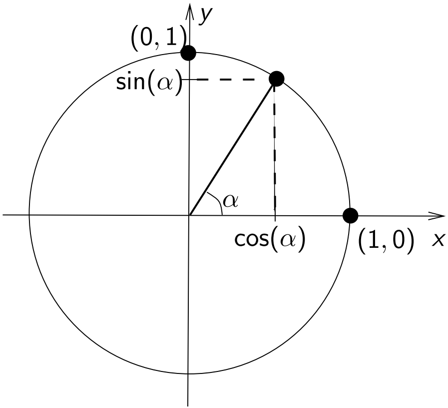
Skalärprodukten $\vec{u} \bullet \vec{v}$ av två vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ är definierad genom

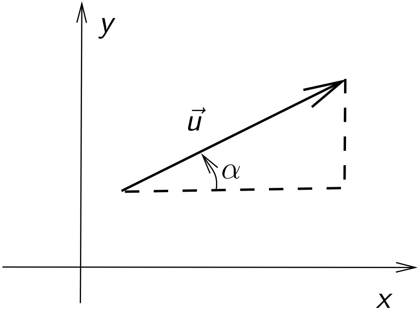
- i planet: $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ där $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
- i rymden: $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ där $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Vi ser: $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Samband med vinkler:

Geometrisk definition
av sinus och kosinus:



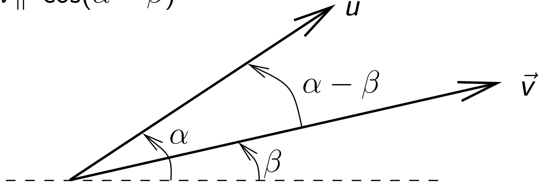


För en vektor $\vec{u}$ i planet som har vinkeln α tagen ifrån den positiva x-axeln gäller

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Låt $\vec{u} = \|\vec{u}\| \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \|\vec{v}\| \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$.
Då gäller

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \Big(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \Big) \\ &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$



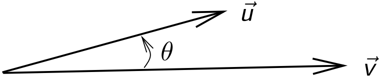
Resultat: $\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \; \cos(\theta)}$

där $\theta \in [0, \pi]$ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

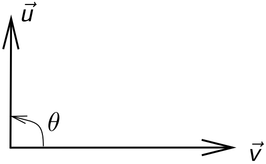
Anmärkning: Eftersom $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ spelar det ingen rol om vi mäter vinkeln från $\vec{u}$ till $\vec{v}$ eller tvärtom.

Sambandet gäller också för vektorer i rymden!

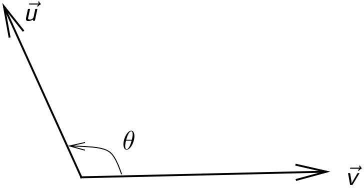
$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \implies \vec{u} \bullet \vec{v} > 0$$



$$\theta = \frac{\pi}{2} \implies \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$



$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \implies \vec{u} \bullet \vec{v} < 0$$



Vektorer med $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ är ortogonala. Vi skriver också $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exempel 3 (forts) Bestäm vinkeln θ mellan $\vec{v}$ och $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Exempel 4 Hitta alla enhetsvektorer som är ortogonala mot $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Varje vektor som är ortogonal mot $\vec{u}$ är en multipel av $\vec{v}$. Eftersom $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ är alla enhetsvektorer som är ortogonala mot $\vec{u}$ vektorerna

$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{v}.$$

Vektorprodukt i rymden

Vektorerna $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

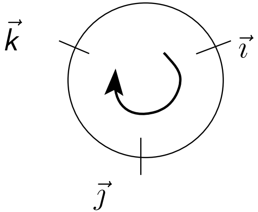
kallas för standardenhetsvektorer.

Varje vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ skrivs på ett unikt sätt som

$$\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}.$$

Vi definiera vektorprodukten genom $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned}
\vec{\imath} \times \vec{\jmath} &= \vec{k}, & \vec{\jmath} \times \vec{\imath} &= -\vec{k}, \\
\vec{\jmath} \times \vec{k} &= \vec{\imath}, & \vec{k} \times \vec{\jmath} &= -\vec{\imath}, \\
\vec{k} \times \vec{\imath} &= \vec{\jmath}, & \vec{\imath} \times \vec{k} &= -\vec{\jmath},
\end{aligned}$$



och utvidgar den genom den distributiva lagen

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}) \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{\imath} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{\jmath} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k} \\
&= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Minnesregel: Man får rätt formel genom att utveckla

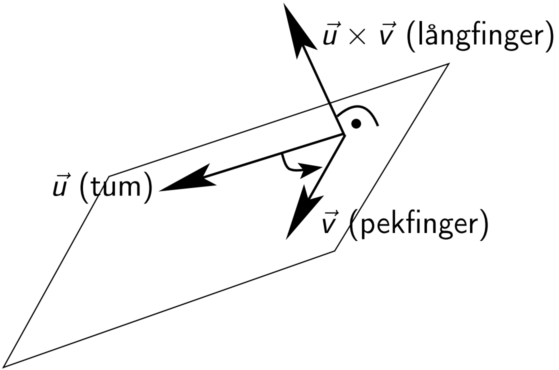
$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \vec{\imath} \\ u_2 & v_2 & \vec{\jmath} \\ u_3 & v_3 & \vec{k} \end{pmatrix}$$

längs sista kolumnen.

Viktiga egenskaper:

(1) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ och $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

(2) Riktningen av $\vec{u} \times \vec{v}$ ges genom tre fingerregeln



(3) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| =$ arean av det parallellogram som späns av $\vec{u}$ och $\vec{v}$

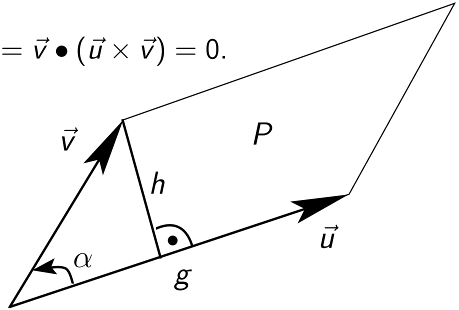
Bevis:

(1) Man kollar lätt $\quad \vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$

(3) $\quad \mathrm{area}(P) = gh$

där $g = \|\vec{u}\|$,

$h = \|\vec{v}\| |\sin(\alpha)|$.



$$\Longrightarrow \Big(\mathrm{area}(P)\Big)^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\big(\sin(\alpha)\big)^2$$
$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\big(1 - \cos^2(\alpha)\big)$$
$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \big(\vec{u} \bullet \vec{v}\big)^2 \overset{(\star)}{=} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$$

Identiteten $(\star)$ kallas för Lagrangeidentitet. Man kan kolla den direkt. $\square$

Följd:

(1) Om $\vec{u}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ är parallella (d.v.s. att de är skalära multipler av varandra) då är $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

(2) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

(3) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ eftersom $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{u}$ har samma längd och motsatta riktningen

Anmärkning: I allmänheten är $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Exempel: $(\underbrace{\vec{\imath} \times \vec{\jmath}}_{=\vec{k}}) \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \neq \vec{0} = \vec{\imath} \times (\underbrace{\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}}_{=\vec{0}})$

Vidare räknelagar för vektorprodukten hittas i Anton/Rorres, Theorem 3.5.1 och 3.5.2.

Exempel 5 Bestäm arean till triangeln T med hörn i $P_1 = (2,2,0)$, $P_2 = (-1,0,2)$, $P_3 = (0,4,3)$.

Lösning

$$\begin{aligned} \text{area}(T) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{array}{l} \text{arean av parallellogrammet} \\ \qquad\qquad \text{som spänns av } \overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \|. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-2 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \quad \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \text{area}(T) = \frac{15}{2}$$

Exempel 6 Hitta en vektor som är ortogonla mot båda $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösning Enligt Exempel 5 är $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Alltså är t.ex. $-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en sådan vektor.

Geometrisk tolkning av determinanter av 2×2- och 3×3-matriser:

Sats:

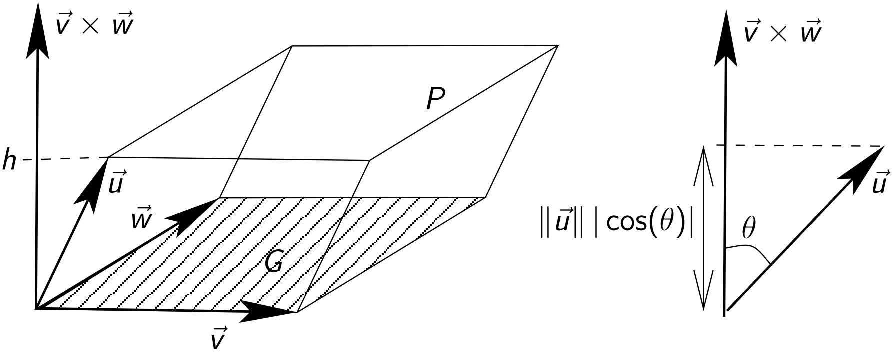
(1) För vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ i planet gäller

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \text{area av det parallellogram som späns av } \vec{u},\ \vec{v}$$

(2) För vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ i rymden gäller

$$|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \text{volymen av den parallellepiped som späns av } \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$$

Bevis: Först visar vi $\mathrm{vol}(P) = |\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})|$.



$$\mathrm{vol}(P) = Gh \text{ där } G = \|\vec{v} \times \vec{w}\|, \; h = \frac{|\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$$

(2) Identiteten $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ kan visas genom direkt räkning

(1) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, använd **(2)**

$\square$

Anmärkning: $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ kallas för trippelprodukten.

Exempel 7 Låt $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm

a) arean av det parallellogram som spänns av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i planet

b) arean av det parallellogram som spänns av $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ i rymden

c) volymen av det parallellepiped som spänns av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ i rymden

Lösning

a) $$\text{arean} = \left|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 5$$

b) $$\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 \\ (-4) \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{arean} = \|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\| = \sqrt{20^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{413}$$

c) $$\text{volymen} = \left|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right| = 49$$

Linjer i planet

Två viktiga sätt att beskriva en linje i planet är genom

(1) en ekvation

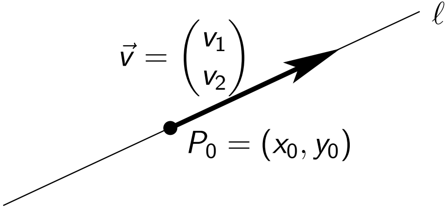
$$\text{(E)} \qquad ax + by + c = 0$$

där åtminstone ett av talen a, b är $\neq 0$,

(2) en punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ **och en riktning** $\vec{v} \neq \vec{0}$. Det leder till parameterframställningen

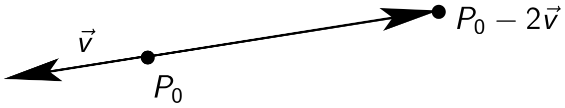
$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

med $t \in \mathbb{R}$.



Anmärkning: (P) betyder att en punkt $P = (x, y)$ ligger på linjen om det finns ett tal t_0 sådant att $P = P_0 + t_0\vec{v}$. Observera att vi här tolkar

$$\text{punkt} + \text{vektor} = \text{punkt}.$$



Man brukar dock använda vektornotation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ som är ortogonal mot linjen ℓ kallas för normalvektor till ℓ.

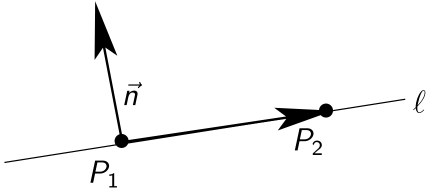
Sats: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ är en normalvektor till linjen

$$\ell : ax + by + c = 0.$$

Bevis: Låt $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \ell$, d.v.s.

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Eftersom $\overrightarrow{P_1P_2}$ visar längs ℓ räcker det att visa $\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) \\ &= \underbrace{(ax_2 + by_2)}_{=-c} - \underbrace{(ax_1 + by_1)}_{=-c} = 0 \qquad \square \end{aligned}$$

Exempel 8 Bestäm en ekvation för den linjen som har parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning Vi löser ut t ur ekvationen till den första koordinaten och sätter in den i ekvationen till den andra koordinaten.

$$y = 2 + \left(\frac{x-8}{-3}\right)4 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x + 3y - 38 = 0$$

Exempel 9 Bestäm en parameterframställning för linjen

$$3x + y - 2 = 0$$

Lösning Vi sätter t.ex. $x = t$ vilket ger $y = -3t + 2$. En parameterframställning är alltså

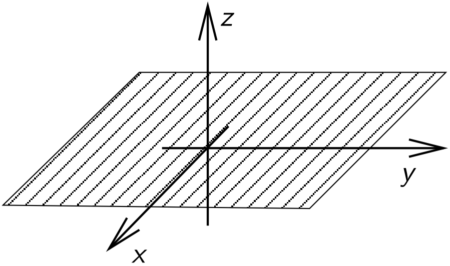
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

Linjer i rymden

I rymden kan vi inte längre beskriva en linje genom en enda ekvation.

Exempel: $z = 0$ ger xy-planet.



Däremot kan vi fortfarande använda parameterframställningen.

Exempel 10 Bestäm en parameterframställning för linjen genom punkterna $P_1 = (0, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 3)$.

Lösning $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor till linjen. Alltså är en parameterframställning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

Plan i rymden

Ett plan i rymden kan bl.a. beskrivas genom

(1) en ekvation

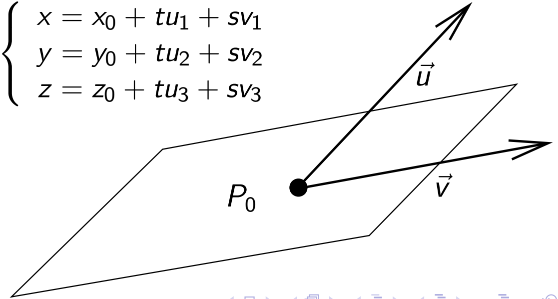
$$\text{(E)} \qquad ax + by + cz + d = 0$$

där åtminstone ett av talen a, b, c är $\neq 0$,

(2) en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och två icke-parallella riktningar $\vec{u}$, $\vec{v}$. Vi får parameterframställningen

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

med $s, t \in \mathbb{R}$.



En vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ som är ortogonal mot ett plan π kallas för normalvektor till π.

Sats: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ är en normalvektor till planet

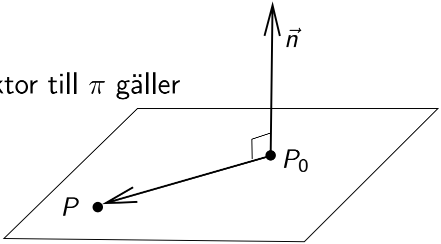
$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Två plan är parallella om deras normalvektorer är parallella. De är ortogonala om normalvektorerna är ortogonala.

Sats Låt $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vara en normalvektor till ett plan π och $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Då är planet given genom ekvationen

$$ax + by + cz = d$$

där $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.



Bevis: Eftersom $\vec{n}$ är en normalvektor till π gäller

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + x(z - z_0) \end{aligned}$$

för alla $P = (x, y, z) \in \pi$

$$\Longrightarrow \quad ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{=:d}$$

Exempel 11 Bestäm en ekvation för planet som innehåller punkterna $P_1 = (1,2,3)$, $P_2 = (1,1,1)$, $P_3 = (2,-1,0)$.

Lösning Vektorn

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_2} \\
&= \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

är ortogonal mot $\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{P_3P_2}$, alltså mot planet. En ekvation för planet är given genom

$$3 \cdot x + 2 \cdot y + (-1) \cdot z + d = 0$$

där d fås genom att sätta in t.ex. P_1:

$$-d = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 4$$

Detta ger som resultat

$$3x + 2y - z = 4$$

Exempel 12 Bestäm skärningen mellan

$$\begin{aligned}\pi_1: &\quad 3x + 2y - 4z - 6 = 0\\ \pi_2: &\quad x - 3y - 2z - 4 = 0\end{aligned}$$

Lösning Planen har normalvektorer $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$,
vilka inte är parallella. Planen är därför inte heller parallella, vilket innebär att de skär varandra i en linje.

För att bestämma skärningslinjen använder vi Gausselimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{addera (-3) rad 1} \\ \text{till rad 2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{11} \text{ rad 2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x &= \frac{16}{11}t + \frac{26}{11} \\ y &= -\frac{2}{11}t - \frac{6}{11} \\ z &= t \end{cases}$$

eller

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{16}{11} \\ -\frac{2}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

Exempel 13 Givna planet $\pi: \; x - 2y + 3z = 0$ och punkten $P_0 = (1, 1, 1)$.

a) Bestäm den linje genom P_0 som är vinkelrät mot π.

b) Bestäm den punkt där linjen skär planet.

Lösning

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot π.

Alltså är en parameterframställning av linjen

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 - 2t \\ z & = & 1 + 3t \end{array}$$

där $t \in \mathbb{R}$.

b) Vi sätter parameterframställningen av linjen in i planets ekvation:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+t) - 2(1-2t) + 3(1+3t) \\ &= 2 + 14t \qquad\qquad \Longrightarrow t = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Det ger skärningspunkten

$$P = \left(1 - \tfrac{1}{7}, 1 - 2(-\tfrac{1}{7}), 1 + 3(-\tfrac{1}{7})\right) = (\tfrac{6}{7}, \tfrac{9}{7}, \tfrac{4}{7})$$

Exempel 14 Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har parameterframställningar

$$\ell_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \ell_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Undersök om linjerna skär varandra.

Lösning Linjerna skär varandra omm det finns reella tal t_1, t_2 sådana att

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2t_1 & = & -2 \\ t_2 & = & -2 \\ t_1 - 3t_2 & = & 5 \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem i t_1, t_2 har den unika lösningen $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Alltså skär linjerna varandra i en punkt. Denna skärningspunkten är

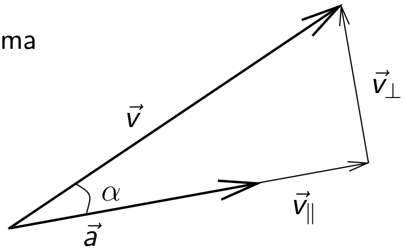
$$P = \Big(3 + (-1) \cdot 2, -1 + (-1) \cdot 0, 2 + (-1) \cdot 1\Big) = (1, -1, 1)$$

Ortogonala projektion och avståndsberäkningar

Låt $\vec{a} \neq \vec{0}$ vara given.
Vi vill skriva en vektor $\vec{v}$ som en summa

$$\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp}$$

där $\vec{v}_{\|}$ är parallell med $\vec{a}$ och $\vec{v}_{\perp}$ är ortogonal mot $\vec{a}$. Vi ser



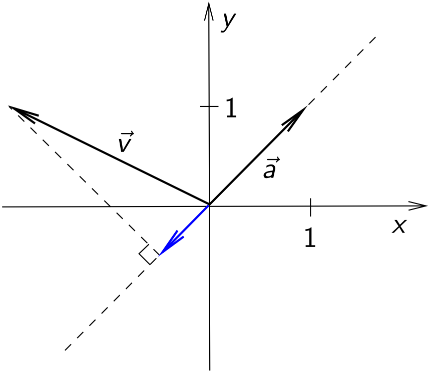
$$\begin{aligned} \vec{v}_{\|} &= \left(\|\vec{v}\| \cos(\alpha)\right) \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \\ &=: \boxed{\mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{v},} \end{aligned}$$

den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{a}$.

Observera: $$\|\mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{v}\| = \frac{|\vec{v} \bullet \vec{a}|}{\|\vec{a}\|}$$

Exempel 15 Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{v} = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2}\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{a}$



Avståndsformler:

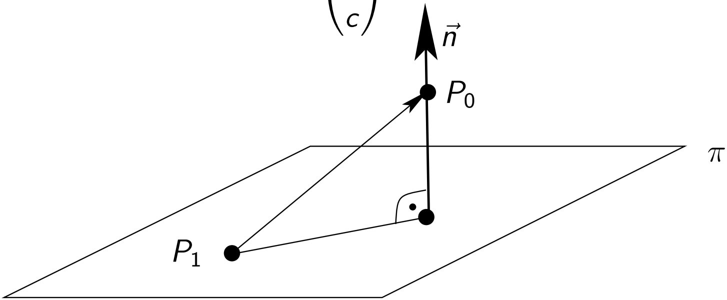
(1) Avståndet mellan punkten $P_0 = (x_0, y_0)$ och linjen $\ell : ax + by + c = 0$ är

$$\text{dist} = \frac{|\ ax_0 + by_0 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2) Avståndet mellan punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och planet $\pi : ax + by + cz + d = 0$ är

$$\text{dist} = \frac{|\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bevis: Kom ihåg att $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ är en normalvektor till π.



Vi tar en godtycklig punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$. Då gäller

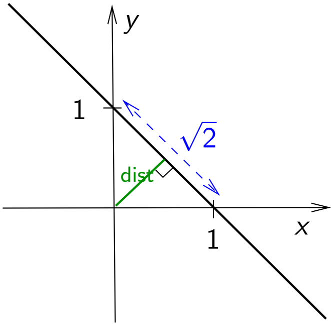
$$
\begin{aligned}
\text{dist} \quad &= \quad \|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_0}\| \; = \; \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_1 P_0}|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \quad \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\overset{P_1 \in \pi}{=} \quad \frac{|\; ax_0 + by_0 + cz_0 + d \;|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Exempel 16 Bestäm avståndet mellan linjen $\ell : \; x + y - 1 = 0$ och origo.

Lösning

$$\text{dist} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$



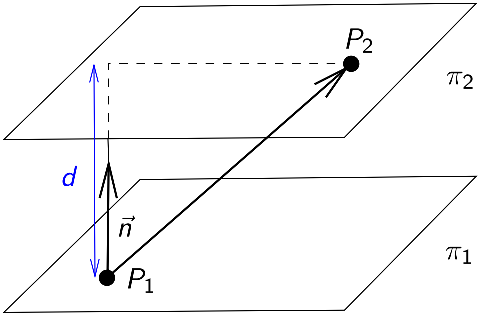
Exempel 17 Bestäm avståndet mellan planen

$$\pi_1: \; x + 3y - 2z = 1, \quad \pi_2: \; 2x + 6y - 4z = 8.$$

Lösning Observera att planen är parallella.

Tag $P_1 = (1, 0, 0) \in \pi_1$,
$P_2 = (4, 0, 0) \in \pi_2$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot planen.



$$\text{dist} = \|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_1P_2}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$