Underrum

Definition: En icke-tom delmängd $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ om följande egenskaper gäller:

(1) Om $\vec{u} \in W$ och $\vec{v} \in W$, så $\vec{u} + \vec{v} \in W$,

(2) Om $\vec{u} \in W$ och $k \in \mathbb{R}$, så $k\vec{u} \in W$.

Anmärkning: Varje underrum W till $\mathbb{R}^n$ innehåller $\vec{0}$

Bevis: $W \neq \emptyset \implies \exists \vec{w} \in W \implies \vec{0} = 0 \cdot \vec{w} \in W$.

Exempel 1 Avgör om följande mängder är underrum till $\mathbb{R}^2$.

a) $S_1 = \{\vec{0}\}$

Svar: Ja! (1) $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, (2) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

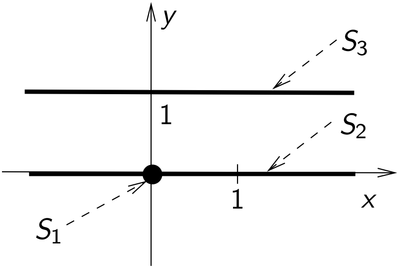
Svar: Ja!

(1) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2$,

(2) $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ 0 \end{pmatrix} \in S_2$

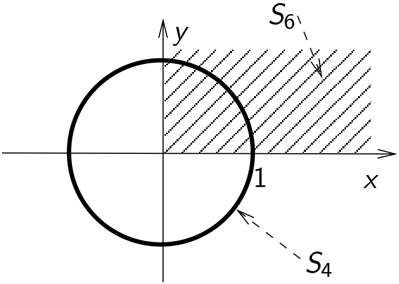
c) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

Svar: Nej! ty $\vec{0} \notin S_3$



d) $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}$

Svar: Nej! ty $\vec{0} \notin S_4$



e) $S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

Svar: Nej!

$$\text{ty } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_5 \text{ men } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S_5$$

f) $S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

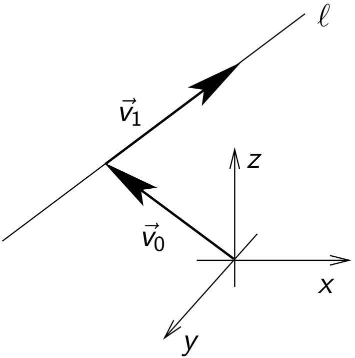
Svar: Nej!

$$\text{ty } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_6 \text{ men } (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin S_6$$

En linje i $\mathbb{R}^n$ är en mängd av vektorerna

$$\ell : \vec{v}_0 + t\vec{v}_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

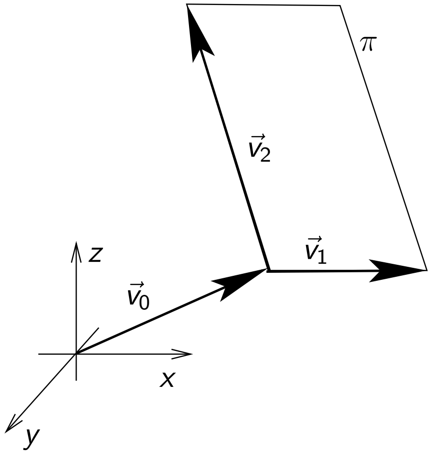
där $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$ är givna vektorer med $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.



Ett plan i $\mathbb{R}^n$ är en mängd av vektorerna

$$\pi : \vec{v}_0 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

där $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ är givna vektorer och $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ej parallella.



Sats:

(1) Varje linje genom origo är ett underrum till $\mathbb{R}^n$

(2) Varje plan genom origo är ett underrum till $\mathbb{R}^n$

Bevis (1): En sådan linje skrivs

$$\ell : \vec{0} + t\vec{v}_1 = t\vec{v}_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- $\ell \neq \emptyset$.
- $\vec{u}, \vec{v} \in \ell$

  $\Longrightarrow$ det finns tal t_1, t_2 sådana att $\vec{u} = t_1\vec{v}_1$, $\vec{v} = t_2\vec{v}_1$

  $\Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(t_1 + t_2)}_{\in\mathbb{R}}\vec{v}_1 \in \ell.$
- $\vec{u} \in \ell$

  $\Longrightarrow$ det finns ett tal t_0 sådant att $\vec{u} = t_0\vec{v}_1$,

  $\Longrightarrow k\vec{u} = \underbrace{(kt_0)}_{\in\mathbb{R}}\vec{v}_1 \in \ell.$ $\square$

underrum till $\mathbb{R}^2$	underrum till $\mathbb{R}^3$
$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$
linjer genom origo	linjer genom origo
	plan genom origo
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$

Senare ska vi se att det finns inga andra underrum till $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Exempel 2 Låt

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y = x + z \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y = x \cdot z \right\}$$

Är S_1, S_2 underrum till $\mathbb{R}^3$ eller inte? Ge ett argument.

Lösning

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Det visar att S_1 är ett plan genom origo. Alltså är S_1 ett underrum.

S_2 är inte ett underrum ty

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_2 \text{ men } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S_2$$

Exemple 3 (forts. av Exempel 3 i Kapitel 5) Egenrummen V_1, V_2 är underrum till $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$ är en linje genom origo,

$$V_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$ är ett plan genom origo.

Sats: Låt A vara en $n \times n$-matris och λ ett egenvärde till A. Då är V_λ ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

Bevis:

- $V_\lambda \neq \emptyset$ ty $\vec{0} \in V_\lambda$.
- Låt $\vec{u}$, $\vec{v} \in V_\lambda$

  $\Longrightarrow A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} \overset{\vec{u},\vec{v}\in V_\lambda}{=} \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$

  $\Longrightarrow \vec{u}+\vec{v} \in V_\lambda$.
- Låt $\vec{u} \in V_\lambda$, $k \in \mathbb{R}$.

  $\Longrightarrow A(k\vec{u}) = k(A\vec{u}) \overset{\vec{u}\in V_\lambda}{=} k(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u})$

  $\Longrightarrow k\vec{u} \in V_\lambda$. $\square$

Sats: Lösningsmängden av ett linjärt ekvationssystem är ett underrum om och endast om systemet är homogent.

Linjära kombinationer

Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$.

En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sägs vara en linjär kombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ om man kan uttrycka den som

$$\vec{v} = k_1 \vec{v}_1 + \ldots + k_r \vec{v}_r$$

med lämpliga tal $k_1, \ldots, k_r$.

Exempel 4 Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Är $\vec{v}$ en linjärkombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$? Hur är det med $\vec{w}$?

Lösning $\vec{v}$ är en linjärkombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ om vi kan hitta tal k_1, k_2 sådana att

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 + 6k_2 & = & 9 \\ 2k_1 + 4k_2 & = & 2 \\ -k_1 + 2k_2 & = & 7 \end{array} \right.$$

Gausseliminationen ger $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. Alltså är $\vec{v}$ en linjärkombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, nämligen

$$\vec{v} = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Om vi genomför samma argument för $\vec{w}$ erhåller vi ett linjärt ekvationssystem vilket saknar lösningar. Alltså är $\vec{w}$ *inte* en linjärkombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$.

Mängden av alla linjärkombinationer av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ kallas för det linjära höljet av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ och betecknas med

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r).$$

Exempel 5

a) Låt $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$$\operatorname{span}(\vec{v}) = \{k\vec{v} | k \in \mathbb{R}\},$$

linjen genom origo parallell med $\vec{v}$.

b) Låt $\vec{v}$, $\vec{w}$ vara icke-parallella.

$$\operatorname{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{k\vec{v} + \ell\vec{w} | k, \ell \in \mathbb{R}\},$$

planet genom origo med riktningsvektorer $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Egenskaper:

(1) $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ är ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

(2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in \text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$.

(3) Det finns inget mindre underrum till $\mathbb{R}^n$ som innehåller $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$,

Exempel 6 $\text{span}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \text{span}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = xy$-planet i $\mathbb{R}^3$.
Observera att detta exempel visar att

Anmärkning:

(1) Olika vektorer kan ha samma linjära höljet.

(2) n vektorer spänner inte alltid hela $\mathbb{R}^n$.

Linjärt oberoende

Observera att

$$0 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{v}_r = \vec{0},$$

d.v.s. att $\vec{0}$ alltid kan skrivas som linjärkombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$. Denna linjärkombinationen kallas för trivial.

Vi säger att $\vec{0}$ är en icke-trivial linjärkombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ om det finns $k_1, \ldots, k_r$, som inte alla är $= 0$, sådana att

$$\vec{0} = k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_r\vec{v}_r.$$

Exempel 7

a) $\vec{0}$ är en icke-trivial linjärkombination av $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, exempelvis gäller $\vec{0} = 1 \cdot \vec{\imath} + (-1) \cdot \vec{\jmath} + (-1) \cdot (\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

b) $\vec{0}$ är *inte* en icke-trivial linjärkombination av $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ eftersom

$$\vec{0} = k\vec{\imath} + \ell\vec{\jmath} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \ell \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad k = \ell = 0$$

Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ sägs vara linjärt oberoende om $\vec{0}$ bara kan skrivas som den triviala linjärkombinationen av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ sägs vara linjärt beroende om $\vec{0}$ är en icke-trivial linjärkombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

Exempel 7 (forts.)

a) $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ är *inte* linjärt oberoende

b) $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ är linjärt oberoende

Exempel 8 Givna $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Är $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linjärt oberoende?

Lösning Vi är intresserade av lösningarna till $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ eller

$$(\star)\begin{cases} k_1 + k_3 & = & 0 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 & = & 0 \\ 3k_1 + 3k_3 & = & 0 \\ 4k_1 - k_2 + 3k_3 & = & 0 \end{cases}$$

Gausselimination ger $k_1 = -t$, $k_2 = -t$, $k_3 = t$ med $t \in \mathbb{R}$. Systemet $(\star)$ har alltså oändligt många lösningar som innebär att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ inte är linjärt oberoende.

Anmärkning: Frågan om r vektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende kan översättas till frågan hur många lösningar det motsvarande linjära ekvationssystem

$$k_1\vec{v}_1 + \ldots k_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

i variablerna $k_1, \ldots, k_r$ har. Detta är ett system med r obekanta och n ekvationer.

Eftersom systemet är homogent får vi två alternativ:

(1) Om systemet har oändligt många lösningar är vektorerna linjärt beroende.

(2) Om systemet har en unik lösning är vektorerna linjärt oberoende.

I fallet $r = n$ gäller:

$$\textbf{(1)} \iff \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) = 0,$$
$$\textbf{(2)} \iff \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) \neq 0$$

Exempel 9 För vilka värden på a är

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ a \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ a \end{pmatrix}$$

linjärt beroende?

Lösning

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right) &= \det \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & a \end{pmatrix} \\ &= a^3 - \frac{3}{4}a - \frac{1}{4} \\ &= (a + \frac{1}{2})^2(a-1), \end{aligned}$$

och vektorerna är linjärt beroende för $a = -\frac{1}{2}$, $a = 1$.

Om vi i $\mathbb{R}^n$ betraktar fler än n vektorer, så får vi ett homogent system med fler obekanta än ekvationer! Ett sådant system har alltid oändligt många lösningar. Alltså gäller:

Sats: I $\mathbb{R}^n$ är fler än n vektorer linjärt beroende.

Sats: Om nollvektorn är bland vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ $(r \geq 1)$ är de linjärt beroende.

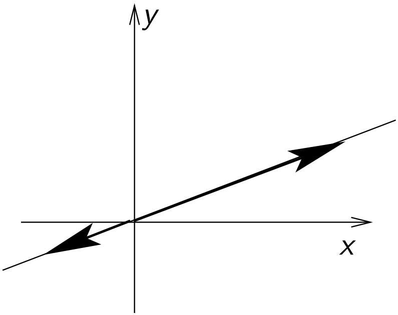
Bevis: Antag $\vec{v}_1 = \vec{0}$. Då gäller

$$\vec{0} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{v}_r \qquad \square$$

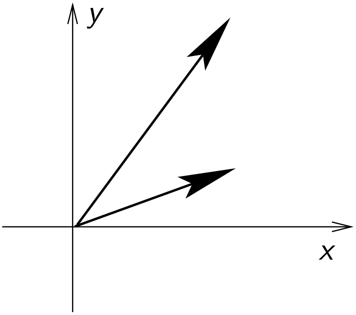
Geometrisk interpretation:

<u>i $\mathbb{R}^2$:</u> $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ beroende

$$\iff \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 \text{ parallella}$$
$$\iff \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$



linjärt beroende



linjärt oberoende

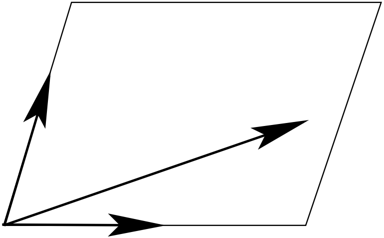
Anmärkning: tre vektorer $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ i $\mathbb{R}^2$ är alltid linjärt beroende.

i $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ beroende

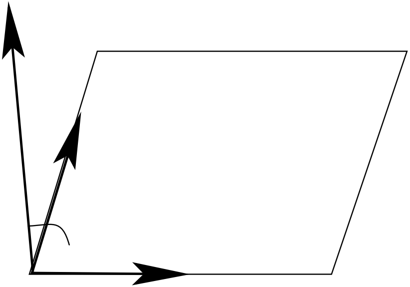
$$\iff \vec{v}_1, \ \vec{v}_2 \text{ parallella}$$
$$\iff \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$$

i $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ beroende

$$\iff \vec{v}_1, \ \vec{v}_2, \ \vec{v}_3 \text{ ligger i samma plan}$$
$$\iff \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$$



linjärt beroende



linjärt oberoende

Observera: Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ är linjärt beroende så innebär det att en av vektorerna kan uttryckas som en linjär kombination av dem andra.

Sats: Om $\vec{v}$ kan uttryckas som linjär kombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ så gäller

$$\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}) = \text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r).$$

Sats: Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \vec{v}_r$ är linjärt oberoende så är $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}$ linjärt oberoende.

Observera att omvändningen inte gäller: T. ex. är $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ linjärt oberoende men $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ är det inte.

Kontraposition: Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}, \vec{v}_r$ är linjärt beroende så är $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r+1}$ linjärt beroende. Observera att ovanstående exemplet igen visar att omvändningen inte gäller.

Baser och dimension

Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ sägs vara en bas för V om

(1) $\mathrm{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) = V$,

(2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ är linjärt oberoende.

Anmärkning: (1) betyder att man kan uttrycka varje vektor $\vec{v}$ som en linjär kombination av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$. **(2)** betyder att man kan göra det bara på ett enda sätt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_r\vec{v}_r \\
&= h_1\vec{v}_1 + \ldots + h_r\vec{v}_r \\
\Longrightarrow \quad & (k_1 - h_1)\vec{v}_1 + \ldots + (k_r - h_r)\vec{v}_r = \vec{0} \\
\overset{\substack{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_r \\ \text{linjärt oberoende}}}{\Longrightarrow} \quad & (k_1 - h_1) = \ldots = (k_r - h_r) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & k_1 = h_1, \ldots k_r = h_r
\end{aligned}
$$

Sats: För ett givet underrum finns det alltid en bas. Alla baser har samma antal element.

Exempel 11

a) Standardenhetsvektorerna $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

b) Basen för $\{\vec{0}\}$ består av inga element, d.v.s. den tomma mängden $\emptyset$ utgör en bas för $\{\vec{0}\}$.

c) Linjen $\{t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, där $\vec{v} \neq \vec{0}$, har $\vec{v}$ som bas.

d) Planet $\{t\vec{v} + s\vec{w} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$, där $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ är icke-parallella, har $\vec{v}, \vec{w}$ som bas.

Definition: För ett givet underrum V är dimensionen av V definierad som antal vektorer av en godtycklig bas.

Vi skriver: $\dim V$.

Exempel 11 (forts.)

a) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

c) En linje har dimension 1.

d) Ett plan har dimension 2.

Exempel 12 För $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ gäller $\dim V = 2$.

Exempel 13 Hitta en bas till planet $\pi : 2x - y + 3z = 0$.

Lösning Eftersom

$$2x - y + 3z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$$

är varje vektor i planet på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_2}$$

d.v.s. att planet spänns av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. Vidare är $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ linjärt oberoende, ty icke-parallella. Alltså utgör $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ en bas för π.

Sats Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ med $\dim V = d$. Då utgör d linjärt oberoende vektorer i V alltid en bas för V.

Exempel 14 Utgör $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas för $\mathbb{R}^2$?

Lösning Enligt satsen behöver vi bara visa att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ är linjärt oberoende. Det är fallet eftersom de är icke-parallella.

Hur hittar man en bas för $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$?

- Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ är linjärt oberoende utgör de en bas för $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$.
- Om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ inte är linjärt oberoende kan en av vektorerna skrivas som en linjär kombination av dem andra. Denna vektor kan kastas ut ur listan av vektorerna utan att förändra det linjära höljet.

  Börja om proceduren med den förkortade listan och repetera den tills de resterande vektorerna är linjärt oberoende.

Tvärtom kan en lista $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ av linjärt oberoende vektorer i ett underrum V utvidgas till en bas för V

- Om $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) = V$ är $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ en bas för V.
- Annars adderar man en vektor $\vec{v} \in V \setminus \text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ till listan.

  Börja om proceduren med den förlängrade listan och repetera den tills vektorerna spänner V.

Exempel 15 Bestäm en bas för span$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösning Eftersom $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$ är $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ inte linjärt oberoende.

För att skriva en av vektorerna som en linjär kombination av dem andra etraktar vi det (homogena) linjära ekvationssystemet
$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ eller

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 - k_3 = 0 \\ 6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 0 \\ 4k_1 - k_2 + 5k_3 = 0 \end{cases}$$

som har den allmänna lösningen $k_1 = -t$, $k_2 = t$, $k_3 = t$, d.v.s.

$$-t\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 = \vec{0}$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. I synnerhet kan $\vec{v}_3$ skrivas som en linjär kombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ och vi får

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Eftersom $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ inte är parallella är dem linjärt oberoende och utgör därmed en bas för span$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Exempel 16 Samma uppgift med $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Lösning Observera att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ fortfarande är linjärt beroende.

I det här fallet har det linjära ekvationssystemet $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ den allmänna lösningen $k_1 = 2t$, $k_2 = t$, $k_3 = 0$, alltså

$$2t\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$$

för alla $t \in \mathbb{R}$.

I det här fallet kan $\vec{v}_3$ inte skrivas som en linjär kombination av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. I stället ser vi att $\vec{v}_2$ är en multipel av $\vec{v}_1$.

Samma argument som i Exempel 15 ger att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ utgör en bas för $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Sats: Låt V, W vara underrum till $\mathbb{R}^n$. Det gäller

a) $V \subseteq W \quad \Longrightarrow \quad \dim V \leq \dim W$.

b) $V \underset{\neq}{\subsetneq} W \quad \Longrightarrow \quad \dim V < \dim W$.

Bevisidén är att utvidga basen för V till en bas för W!

Sats: Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ med $\dim V = d$ och $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d \in V$. Då är följande påståenden ekvivalenta:

a) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d$ är linjärt oberoende,

b) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d$ utgör en bas för V,

c) $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d) = V$,

Bevis: a)$\Longrightarrow$b): Betrakta $W = \text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_d) \subseteq V$. Eftersom vektorerna är linjärt oberoende är $\dim W = d = \dim V$ och satsen ovan ger $W = V$. b)$\Longrightarrow$c): Klart. c)$\Longrightarrow$a): Eftersom $\dim V = d$ kan vi inte kasta ut en av vektorerna.

Exemple 3 (forts.)

$$\dim V_1 = 1, \quad \text{bas: } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim V_2 = 2, \quad \text{bas: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observera att vi kan utvidga basen för V_2 till en bas för $\mathbb{R}^3$ egnom att lägga till basvektorn för V_1.

Det kan dock hända att egenrummen till en $n \times n$-matris A inte innehåller tillräckligt många egenvektorer för att få fram en bas till hela $\mathbb{R}^n$. Till exempel har

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bara egenvärdet $\lambda = 2$ med $V_2 = \text{span}(\vec{\imath})$.

Sats Låt A vara en $n \times n$-matris med n *olika* egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) $V_{\lambda_j} = \text{span}\{\vec{v}_j\}$ där $\vec{v}_j$ är en egenvektor till λ_j
(Egenrummen är alltså endimensionella).

b) $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ utgör en bas till $\mathbb{R}^n$.

Sats Om A är en *symmetrisk* $n \times n$-matris kan man alltid hitta en bas till $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer till A sådan att basvektorerna är ortogonala mot varandra.

Till slut bevisar vi påståendet om samtliga underrum til $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$. T.ex. i $\mathbb{R}^3$:

Om $W \supsetneq \{\vec{0}\}$ så existerar $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \in W$.

$\implies W$ innehåller linjen $\ell : t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

Om $W \supsetneq \ell$ så existerar $\vec{w} \in W \backslash \ell$.

$\implies W$ innehåller planet π som späns av $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Om $W \supsetneq \pi$ så existerar $\vec{u} \in W \backslash \pi$.

$$\implies \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

$$\implies \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ linjärt oberoende}$$

$$\implies \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ bas till } \mathbb{R}^3 \qquad \square$$