Föreläsning 1

Låt oss börja med att kolla på lite mängdlära. Om A är en mängd och x är ett element i A så skriver vi $x \in A$ (läses: "x tillhör A"). Däremot om x *inte* är ett element i A så skriver vi

$$x \notin A.$$

Ex:

Låt $A = \{1, 3,$ ☼, ✡, saga$\}$ vara en mängd. Då är ☼ $\in A$, medan "bil" $\notin A$.

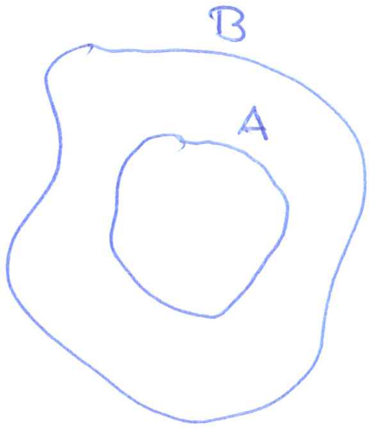
Säg nu att vi har två mängder, A och B. Vi säger att $A \subseteq B$, A är en *delmängd* till B om

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

dvs om alla element i A även finns i B. Vi skriver även $B \supseteq A$.

Ibland så pratar man om äkta delmängder, skrivet $A \subset B$ eller $B \supset A$, om det finns minst ett element i B som inte finns i A.

Bild.



Definition:

Två mängder A och B sägs vara lika, skrivet $A = B$, om de innehåller samma element.

Sats:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ och } B \subseteq A.$$

Denna sats är väldigt användbar då man ska visa att två mängder är lika.

Ibland så listar man elementen i mängden, och ibland så säger man att elementen i mängden ska uppfylla någon egenskap P:

$$\{x \in S : P(x)\}$$

(De element x i S som uppfyller egenskap P).

Ex:

Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. och låt

$$B = \{x \in A : x \text{ är delbar med } 2\}.$$

Eftersom de element i A som är delbar med 2 är 2 och 4 så är

$$B = \{2, 4\}.$$

Några mängder som vi kommer använda mycket, och därför fått speciella symboler, är följande:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ De naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ Heltalen.
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}$ och $n \neq 0 \}$ De rationella talen
- $\mathbb{R}$ De reella talen
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ De irrationella talen, dvs de reella tal som <u>inte</u> kan skrivas som en kvot av två heltal.

<u>Ex:</u>

$\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal

<u>Bevis:</u>

Antag att $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal, så $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ där $\mathrm{sgd}(m,n) = 1$. Kvadrera nu detta uttryck:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \iff 2n^2 = m^2$$

Detta ger att 2 delar m^2, så 2 delar även m. Alltså $m = 2r$ för något $r \in \mathbb{Z}$, så

$$2n^2 = (2r)^2 = 4r^2$$
$$\iff$$
$$n^2 = 2r^2$$

Med samma argument som ovan får vi att 2 delar n, så $n = 2s$ för något $s \in \mathbb{Z}$:

Detta ger att både 2 delar m och n, så $sgd(m,n) \neq 1$. Detta är en motsägelse, så $\sqrt{2}$ kan inte skrivas som ett bråk.

□.

I beviset ovan använde vi något som kallas för ett motsägelsebevis. Kolla mer i extramaterialet om olika bevismetoder.

Ex:

Betrakta följande mängd:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0 \}.$$

Eftersom $x=1$ och $x=2$ löser ekvationen $x^2-3x+2=0$ så är $A = \{1, 2\}$.

Ex:

Låt $A = \{ 2n : n \in \mathbb{N} \} = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$.

Alltså är A alla jämna naturliga tal.

Definition:

Låt A och B vara mängder. Då är

1) unionen av A och B mängden

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ eller } x \in B \}.$$

2) snittet av A och B mängden

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ och } x \in B \}.$$

3) A minus B mängden

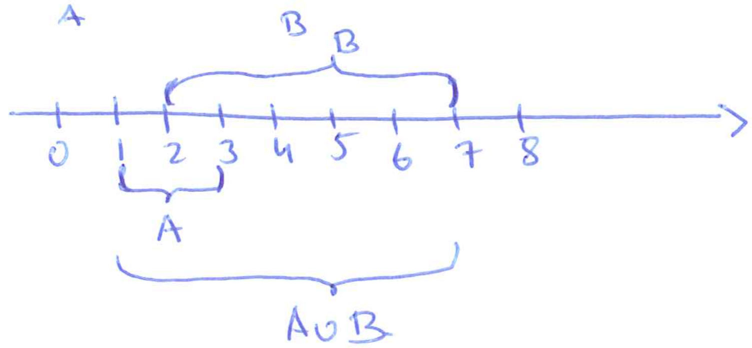
$$A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ och } x \notin B \}.$$

4) Om $A \subseteq B$ så definierar vi A:s komplement genom

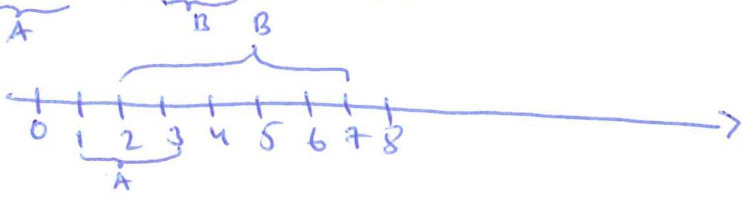
$$A^c = \{ x : x \in B \text{ och } x \notin A \}.$$

Ex:

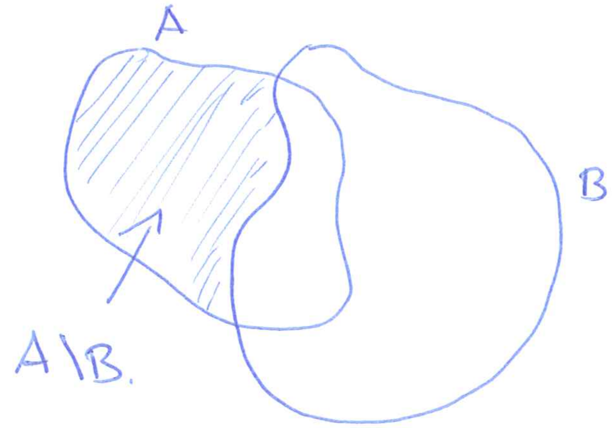
1) $$\underbrace{(1,3)}_{A} \cup \underbrace{(2,7)}_{B} = (1,7)$$



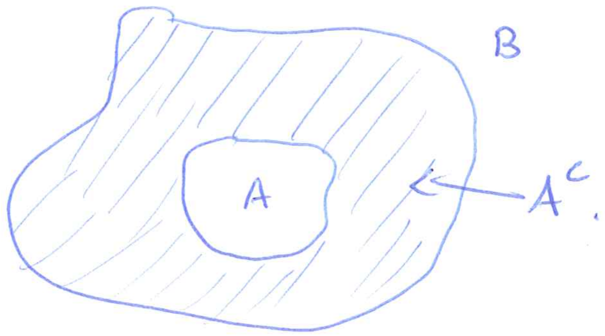
2) $$\underbrace{(1,3)}_{A} \cap \underbrace{(2,7)}_{B} = (2,3)$$



Ex:



Ex:



Innan vi fortsätter med mer mängdlära så ska vi diskutera lite logik.

Låt P vara en utsaga, dvs ett påstående eller en egenskap. Då kan vi skriva följande:

- $\exists x : P(x)$ (Det finns (existerar) ett x så att egenskapen P(x) gäller)
- $\forall x : P(x)$ (För alla x gäller egenskapen P(x))
- $\exists! x : P(x)$ (Det finns <u>exakt ett</u> x så att P(x) gäller).

Dess kvantorer ($\forall$, $\exists$, $\exists!$) gör så att man kan skriva matematisk skrift kompakt.

Ex:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : n > x.$$

Här står det att för alla reella tal x, finns det ett heltal n som är större än x.

Låt oss gå tillbaka till mängdlära igen.

Definition:

Låt B_α vara en samling av mängder, där α löper över en indexmängd A. Vi definierar unionen av B_α:orna genom

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \{ x : \exists \alpha \in A : x \in B_\alpha \}$$

och snittet av B_α:orna genom

$$\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha = \{ x : \forall \alpha \in A : x \in B_\alpha \}.$$

Ex:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{i}, i\right] = (0, \infty)$$

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{i}, i\right] = \{1\}.$$

Definition:

Antag att A och B är icke-tomma mängder. Vi definierar den kartesiska produkten $A \times B$ genom

$$A\times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Så $A\times B$ innehåller ordnade par från A och B.

Ex:

Låt $A = \{1,3,5\}$ och $B = \{1,2\}$. Då är

$$A\times B = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (5,1), (5,2)\}.$$

Ex:

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Definition: (Relation)

En relation R från en mängd A till en mängd B är en delmängd till $A \times B$.

Ex:

Låt T vara relationen "tycker om". Låt Olle vara O, Stina vara S och Kalle vara K. Vidare låt hamburgare vara H, pizza vara P och lingonsylt vara L.

Olle tycker om hamburgare (OTH, (O,H))
Stina tycker om hamburgare (STH, (S,H))
Olle tycker om lingonsylt (OTL, (O,L))
Kalle tycker om pizza (KTP, (K,P))

Alltså är

$$T = \{(O,H), (S,H), (O,L), (K,P)\}$$

Anledningen att vi prater om relationer är att funktioner är även en relation, och funktioner är något som är viktigt i denna kurs.

Definition: (funktion)

En funktion från en mängd A till en mängd B är en relation från A till B som uppfyller att

$$\forall a \in A \; \exists! \, b \in B : a f b,$$

dvs att $(a,b) \in f$. Detta skriver vi som $f(a) = b$.

Anmärkning:

Vanligtvis så har vi sett en definition av en funktion på följande vis:

> En funktion från en mängd A till en mängd B är en regel där man till varje element x i A tilldelar ett unikt element $f(x)$ i B.

Ex:

Låt $A = \{1,2,3\}$ och $B = \{4,5,6\}$. Betrakta följande delmängder av $A \times B$:

$f = \{ (1,6), (3,4), (1,4), (2,5) \}$

$g = \{ (1,6), (3,4), (2,5) \}$

Är f och g funktioner?

f är inte en funktion, ty $f(1)=6$ och $f(1)=4$, och detta kan inte hända för en funktion.

g är en funktion, eftersom till varje element i A finns ett unikt element i B som ges av relationen g.

Funktionen ni har tittat på tidigare har säkert varit funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eller delmängder av $\mathbb{R}$, och då har ni säkert ritat funktionens graf. Vi ska nu definiera grafen för en funktion:

Definition: (Grafen för f)

Låt $f: A \to B$ vara en funktion från A till B. Vi definierar grafen för f genom

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\} =$$
$$= \{(a,b) \in A \times B : a \in A \text{ och } a f b\} =$$
$$= \{(a,b) \in A \times B : a \in A \text{ och } (a,b) \in f\} =$$
$$= \{(a,b) \in f : a \in A\} = f$$

Alltså grafen för f och relationen f är samma sak!

Definition: (Definitionsmängd, värdemängd)
Om $f: A \to B$ är en funktion, så är f:s definitionsmängd, skrivet $D(f)$, lika med A. Vidare så definierar vi f:s värdemängd som

$$Im(f) = \{ f(a) : a \in A \}. = f(A)$$

Här står Im för image, dvs bilden av f.

Definition: (Inversa bild)
Låt $f: A \to B$ och låt $C \subseteq B$. Vi definierar inversa bilden av C genom

$$f^{-1}(C) = \{ a \in A : f(a) \in C \}$$

Anmärkning:

Beteckningen f^{-1} i definitionen ovan har inget att göra med f:s invers!

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara given av $f(x) = x^2$. Då är

- $f([1,2]) = \{ x^2 : x \in [1,2] \} = [1,4]$
- $f([-3,1]) = [0,9]$
- $f^{-1}([1,4]) = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in [1,4] \} = [1,2] \cup [-2,-1]$
- $f^{-1}([-7,1]) = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-7,1] \} = [-1,1]$
- $f^{-1}([-14,-3]) = \emptyset$
- $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$

Definition: (Injektiv, surjektiv, bijektiv)

Funktionen $f: A \to B$ sägs vara

1) injektiv om $\forall a, \alpha \in A : a \neq \alpha \Rightarrow f(a) \neq f(\alpha)$.

2) surjektiv om $\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b$.

3) bijektiv om den är både injektiv och surjektiv.

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ och $h: [0,\infty) \to [0,\infty)$ vara definierad genom

$$f(x) = g(x) = h(x) = x^2.$$

15

Är f, g och h injektiv/surjektiv eller bijektiv?

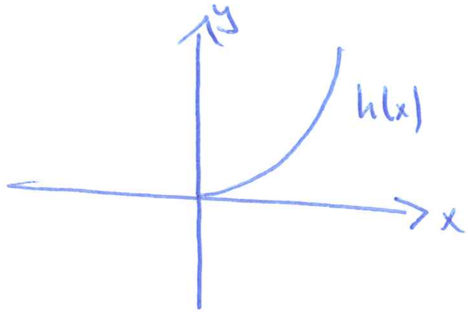
Om vi börjar med f, så är den varken injektiv eller surjektiv. Den är inte injektiv, ty

$$f(1) = f(-1) = 1$$

och den är inte surjektiv eftersom -1 träffas aldrig, dvs det finns inget $x \in \mathbb{R}$ så att $f(x) = x^2 = -1$.

Om man kollar på g så är den inte heller injektiv, ty $f(1) = f(-1) = 1$ men den är surjektiv eftersom vi har tagit bort de negativa talen, och $x^2 = a$, $a \geq 0$ har alltid en lösning.

Om vi slutligen kollar på h, så är denna både injektiv och surjektiv, dvs bijektiv.



Anmärkning:

För att kolla om en funktion $f: A \to B$ är surjektiv så måste man lösa ekvationen $f(x) = b$ för alla $b \in B$, dvs $\mathrm{Im}(f) = f(A) = B$.

Anmärkning:

Det är noga med från och till vilka mängder en funktion är definierad.

Ex:

Låt $A=\{1,2\}$ och $B=\{a,b,c\}$. Vi ställer oss följande frågor:

1) Vilka injektiva funktioner kan vi skapa från A till B?
2) Vilka surjektiva funktioner kan vi skapa från A till B?
3) Kan vi skapa en bijektiv funktion från A till B?

1: $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=a \\ f(2)=b \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=a \\ f(2)=c \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=b \\ f(2)=c \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} f(1)=b \\ f(2)=a \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=c \\ f(2)=a \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} f(1)=c \\ f(2)=b \end{array}}$

Alla dessa funktioner är injektiva. Vi har 6 stycken injektiva funktioner $A \to B$.

2: Vi kan inte ha någon surjektiv funktion $f: A \to B$ ty $\mathrm{Im}(f) \neq B$ för alla val av funktioner $f: A \to B$.

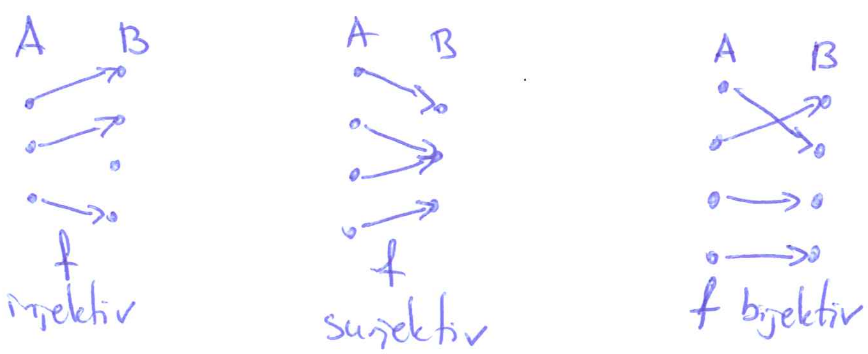
3: Eftersom vi inte kan ha någon surjektiv funktion så kan vi inte heller ha någon bijektiv funktion.

Anm:

Låt A och B vara mängder. Beteckna med $|A|$ antalet element i A och $|B|$ som antalet element i B.

- Om $|A| \leq |B| \Rightarrow$ vi kan hitta en injektiv funktion $f: A \to B$.
- Om $|A| \geq |B| \Rightarrow$ vi kan hitta en surjektiv funktion $f: A \to B$.
- Om $|A| = |B| \Rightarrow$ vi kan hitta en bijektiv funktion $f: A \to B$.

Bild:



Kardinalitet

Vi vill jämföra storleken av mängder.
Vi vill använda oss av idéerna som finns i anmärkningen på sidan 17.

<u>Definition:</u> (Ekvivalensrelation)
Låt R vara en relation från X till X, dvs $R \subseteq X \times X$. Vi säger att R är en <u>ekvivalensrelation</u> om

1) $xRx \ \forall x \in X$ $((x,x) \in R)$ Reflexiv

2) $xRy \Rightarrow yRx \ \forall x,y \in X$ $((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$ Symmetrisk.

3) xRy och $yRz \Rightarrow xRz \ \forall x,y,z \in X$ Transitiv.
$((x,y) \in R$ och $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$

<u>Ex:</u>
Det lättaste exemplet på en ekvivalensrelation är "lika med". Om X är mängden som "lika med" är definierad på så är x relaterad till y om $x=y$. Den korresponderande delmängden av $X \times X$ är då <u>diagonalen</u>

$$\Delta(X) = \{(x,x) : x \in X\}.$$

Anm:

Man brukar beteckna en ekvivalensrelation R med $\sim$, så xRy skriver vi som $x \sim y$.

Definition: (Ekvivalensklasser)

Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på X. För varje $x \in X$, låt

$$[x] := \{ y \in X : x \sim y \}.$$

vara <u>ekvivalensklassen</u> för x. Vidare om $[x]$ är en ekvivalensklass så säger vi att x är en <u>representant</u> för klassen $[x]$.

Ex:

Låt $a \sim_3 b$ vara en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$ given av

$$a \sim_3 b \iff a - b = 3k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}.$$

Alltså: a och b är ekvivalenta om dess differens är delbar med 3. Vi ska kolla på olika ekvivalensklasser.

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, \ldots ; -3, -6, -9, \ldots\}$$

$$[1] = \{1, 4, 7, \ldots, -2, -5, -8, \ldots\}$$

$[2] = \{2, 5, 8, 11, \ldots, -1, -4, -7, \ldots\}$

Observera att $[0]=[3]=[6]=\ldots$

$[1]=[4]=[7]=\ldots$

$[2]=[5]=[8]=\ldots$

Så en representant x för $[0]$ kan vara $0, 3, 6$, eller valfritt element i $[0]$.

<u>Definition</u>: (Partition)

Låt A vara en mängd. En <u>partition</u> av A är en uppsättning $P = \{P_\alpha : \alpha \in B\}$ av delmängder till A så att

1) $\bigcup_{\alpha \in B} P_\alpha = A$

2) $\forall \alpha, \beta \in B : \alpha \neq \beta \Rightarrow P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$ (Disjunkta mängder).

<u>Obs</u>:

En partition av en mängd A är alltså en uppdelning av A i disjunkta mängder.

<u>Ex</u>:

Låt $A = (1,3)$. Då är $P_1 = (1, \frac{3}{2}]$, $P_2 = [\frac{3}{2}, 2]$ och $P_3 = (2,3)$ en partition av A.

Som vi såg i exemplet på sidan 19-20 så partitionerar ekvivalensklasserna mängden som ekvivalensrelationen är definierad på. Detta gäller även generellt, och faktiskt även dess omvändning:

Sats:

Låt X vara en icke-tom mängd och låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på X. Då bildar ekvivalensklasserna en partition av X. Omvänt, om $\{P_\alpha : \alpha \in A\}$ är en partition av X, då är relationen

$$\{(x,y) \in X \times X : x, y \in P_\alpha \text{ för något } \alpha \in A\}$$

en ekvivalensrelation på X vars ekvivalensklasser är precis mängderna P_α.

Definition: (Ekvivalenta mängder)

Två mängder S och T sägs vara ekvivalenta om det finns en bijektiv funktion $f: S \to T$. Vi skriver att $S \sim T$.

Man kan visa att $\sim$ från definitionen ovan är en ekvivalensrelation. Vi ska nu använda denna ekvivalensrelation för att definiera kardinaliteten för en mängd:

Definition: (Kardinalitet)

Till varje mängd X, så associerar vi $|X|$, som kallas X:s kardinalitet, så att $|X| = |Y|$ om och endast om $X \sim Y$.

För att visa att $|X| = |Y|$ så skulle man kunna visa att $|X| \leq |Y|$ och $|X| \geq |Y|$, men då måste man veta vad detta betyder; och här kommer idéerna från sidan 17 in:

Definition:

Låt X och Y vara icke-tomma mängder.
Då definierar vi:

- $|X| \leq |Y|$ om $\exists f: X \to Y$ injektiv
- $|X| \geq |Y|$ om $\exists f: X \to Y$ surjektiv
- $|X| < |Y|$ om $|X| \leq |Y|$ och $|X| \neq |Y|$
- $|X| > |Y|$ om $|X| \geq |Y|$ och $|X| \neq |Y|$.

Trots denna definition är det svårt att visa att

$$|X| \leq |Y| \text{ och } |X| \geq |Y|$$
$$\Longrightarrow$$
$$|X| = |Y|.$$

Vi ska komma tillbaka till detta.

Definition:

Vi definierar att $|\emptyset| = 0$.

Definition: (Ändlig)

Vi definierar att $|\{1, \ldots, n\}| = n$, för varje $n \in \mathbb{N}$.
Vi säger att en mängd $X \neq \emptyset$ är <u>ändlig</u> om det finns ett $n \in \mathbb{N}$ så att $X \sim \{1, \ldots, n\}$, dvs om $|X| = n$.

Definition: (Oändlig)

Låt $X \neq \emptyset$. Vi säger att X är <u>oändlig</u> om X <u>inte</u> är ändlig.

Definition: (Uppräknelig)

Vi definierar att $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (aleph noll).

Vi säger att en mängd $X \neq 0$ är <u>uppräknelig</u> om X är ändlig eller om $X \sim \mathbb{N}$, dvs X är uppräknelig om $|X| = n$ för något $n \in \mathbb{N}$ eller om $|X| = \aleph_0$.

Definition: (Överuppräknelig)

Vi säger att en mängd $X \neq 0$ är <u>överuppräknelig</u> om X <u>inte</u> är uppräknelig.

Vi ska nu kolla på några exempel och satser som använder denna terminologi.

Ex:

Vi ska visa att $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, dvs att $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Vi ska definiera en bijektiv funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämn} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Låt oss se om denna funktion är injektiv:

Vi ska se att om $n \neq m$ så är $f(n) \neq f(m)$.

Vi får fyra fall:

1) n jämn, m jämn

2) n jämn, m udda

3) n udda, m jämn

4) n udda, m ~~jämn~~ udda

Vi visar (1), då de andra fallen är liknande.

Eftersom $n \neq m$ så finns det heltal $r, s > 0$ så att $r \neq s$ och $n = 2r$ och $m = 2s$. Då gäller att

$$f(n) = f(m) \iff \frac{2r}{2} = \frac{2s}{2} \iff r = s$$

Detta motsäger att $r \neq s$ och att $n \neq m$.

De övriga fallen (2)–(4) visas med liknande metoder, så f är injektiv.

Låt oss nu visa surjektivitet. Tag $n \in \mathbb{Z}$ godtyckligt. Vi ska hitta $m \in \mathbb{N}$ så att $f(m) = n$. Vi ska kolla på några olika fall:

1) $n = 0$

2) n är positiv, dvs $n = 1, 2, 3, \ldots$

3) n är negativ, dvs $n = -1, -2, -3, \ldots$

1). För $m = 1$ så har vi att $f(1) = -\frac{1-1}{2} = 0$.

2) Om $m = 2r$ för $r \geq 1$ så får vi att

$$f(m) = f(2r) = \frac{2r}{2} = r$$

där $r = 1, 2, 3, \ldots$. Alltså träffas alla positiva heltal.

3) Om $m = 2r+1$ för $r \geq 1$ så får vi att

$$f(m) = f(2r+1) = -\frac{2r+1-1}{2} = -r$$

där $r \geq 1, 2, 3 \ldots$. Alltså träffas alla negativa heltal.

Vi drar slutsatsen att f är surjektiv, så f är bijektiv. Alltså $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, så på något sätt så kan vi säga att $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ har lika många element.

Vi börjar med att formulera en sats:

Sats:

Låt X och Y vara mängder. Då gäller att

$$|X| \leq |Y| \iff |Y| \geqslant |X|$$

Om man pratar om tal så är satsen ovan självklar, men då man pratar om kardinalitet så pratar man underförstått om injektiva och surjektiva funktionen och då blir inte allt lika självklart.

Bevisidé:

$\Rightarrow$: Antag att $f: X \to Y$ är injektiv. Vi ska skapa en surjektiv funktion $g: Y \to X$. Definiera

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{om } y \in f(X) \\ \text{valfritt element ur } X & \text{annars.} \end{cases}$$

Då är g surjektiv

$\Leftarrow$: Antag att $g: Y \to X$ är surjektiv. Vi ska skapa en injektiv funktion $f: X \to Y$. Definiera

$$f(x) = \text{välj } \underline{\text{ett}} \text{ element ur } g^{-1}(x).$$

Då blir f injektiv.

Nästa sats ser också självklar ut:

Sats:

Antag att X och Y är icke-tomma mängder.
Då gäller att

$$|X| \leq |Y| \quad \text{eller} \quad |X| \geq |Y|.$$

Obs:

Vi kan alltså alltid skapa en injektiv eller surjektiv funktion $f: X \to Y$.

Beviset hoppar vi över och även beviset av nästa viktiga sats är för svårt denna gång:

Sats: (Schröder–Bernsteins sats)

Antag att X och Y är icke-tomma mängder.
Då gäller att

$$|X| \leq |Y| \text{ och } |Y| \leq |X|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|X| = |Y|$$

Den del av beviset som är svårt är implikationen $\Rightarrow$, medan implikationen $\Leftarrow$ är trivial:

Om $f: X \to Y$ är bijektiv så är även $f: X \to Y$ injektiv och vi kan definiera en surjektiv funktion $g: Y \to X$ genom

$$g(y) = f^{-1}(y).$$

som är väldefinierad eftersom f är bijektiv.

Q: Hur förhåller sig kardinaliteten för delmängder? Svaret ges av följande sats:

Sats:

Om $A \subset B$ så är $|A| \leq |B|$.

Bevis:

Eftersom inklusionen är injektiv så är vi klara, dvs avbildningen $f: A \to B$ som ges av

$$f(a) = a$$

Denna sats har en enkel följd:

Följd:

- Om B är ändlig och $A \subseteq B$, så är A ändlig
- Om B är uppräknelig och $A \subseteq B$, så är A uppräknelig.

Givet en mängd så finns det alltid en mängd av större kardinalitet. För att formulera detta behöver vi en definition:

Definition: (Potensmängd)

Låt A vara en mängd. Dess potensmängd $\mathcal{P}(A)$ är mängden av alla delmängder till A, så $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.

Ex:

Låt $A = \{1,2,3\}$. Då är

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}.$$

Så $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3 = 2^{|A|}$.

Sats: (Cantors sats)

Låt X vara en mängd. Då är

$$|X| < |P(X)|$$

Bevis:

Definiera $f: X \to P(x)$ genom

$$f(x) = \{x\} \quad \forall x \in X.$$

Då är f injektiv, så $|X| \leq |P(X)|$. För att få strikt olikhet så måste vi visa att det <u>inte</u> finns någon surjektiv funktion $g: X \to P(X)$. Antag, för en motsägelse att det finns en surjektiv funktion $g: X \to P(X)$. Låt

$$S = \{x \in X : x \notin g(x)\} \subset X.$$

Eftersom g är surjektiv så finns ett $y \in X$ så att $g(y) = S$. Om $y \in g(y)$, så implicerar definitionen av S att $y \notin g(y)$, vilket ger en motsägelse. Om $y \notin g(y) = S$ så ger definitionen av S att $y \in g(y) = S$, vilket också är en motsägelse. Alltså kan inte g vara surjektiv, så $|X| < |P(X)|$.

$\square$

Sats:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ är uppräknelig.

Vi ska presentera två bevis. Först ett direkt bevis med relativt lätt bijektiv avbildning. Det andra beviset är ett så kallat diagonal-argument.

Bevis 1:

Det vi måste visa är att $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, så vi ska hitta en bijektiv avbildning. Definiera $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genom

$$f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

Då är f bijektiv, men detta lämnar vi som övning.

Bevis 2:

Vi gör en uppräkning av $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i matrisform:

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4)
\end{array}$$

Första diagonalen adderar till 2: $(1,1) \Rightarrow 1+1=2$

Andra diagonalen: $(2,1)$, $(1,2) \Rightarrow 2+1=3$.

Tredje diagonalen: $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3) \Rightarrow 3+1=4$, $2+2=4$.

$\vdots$

n:te ~~diagonalen~~ diagonalen adderar till $n+1$.

Man kan se detta på ett annat sätt:

Det finns ett element som adderas till 2,

Det finns två element som adderas till 3.

$\vdots$

Det finns n element som adderas till $n+1$.

Vi kan nu skapa en explicit ~~...~~ bijektiv avbildning.

Låt $a_1 = 0$ och för $n = 2, 3, 4, \ldots$ låt

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Avbildningen $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definierad genom

$$f(m,n) = a_{m+n-1} + n$$

är bijektiv.

$\square$

Sats:

Antag att A_m är uppräknelig för varje $m \in \mathbb{N}$.

Då är

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

också uppräknelig.

Bevis:

För varje $m \in \mathbb{N}$ så finns en bijektiv funktion $\varphi_m : \mathbb{N} \to A_m$, eftersom A_m är uppräknelig.

Definiera $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ genom

$$\varphi(m,n) = \varphi_m(n)$$

Då är φ bijektiv. Låt oss börja visa injektivitet.

Injektiv: Antag att $(m,n) = (m',n')$. Då gäller att

$$\varphi(m,n) = \varphi_m(n) = \varphi_{m'}(n') = \varphi(m',n').$$

Så φ är injektiv.

Surjektiv: Tag $a \in A$. Då ligger a i A_m för något m. Detta betyder att det finns ett $n \in \mathbb{N}$ så att $\varphi_m(n) = a$, eftersom φ_m är bijektiv. Detta ger att $\varphi(m,n) = \varphi_m(n) = a$. Så φ är surjektiv.

Detta ger att $A \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, så A uppräknelig $\square$

Sats:

$\mathbb{Q}$ är uppräknelig.

Bevis:

Definiera $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ genom

$$f(m,n) = \frac{m}{n}$$

där $\mathbb{Q}_+ := \left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Då är f helt klart bijektiv. Vidare låt

$$g: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}_-$$

vara definierad genom

$$g(m,n) = -\frac{m}{n}.$$

där $\mathbb{Q}_- = \left\{-\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Då är g bijektiv. Då är $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ där $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$ och $\{0\}$ är uppräkneliga ty f är bijektiv, g är bijektiv och $\{0\}$ är ändlig. Använd nu satsen på sidan 34 så ser vi att $\mathbb{Q}$ är uppräknelig. $\square$

Följd:

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

Lemma:

Låt $A \neq \emptyset$. Då gäller att

$$A \text{ är oändlig}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{|\{1, \dots, m\}|}_{= m} < |A|$$

Bevis:

$\Rightarrow$: Om A är oändlig så är A <u>inte</u> ändlig, så $|A| \neq m$, dvs $|\{1, \dots, m\}| < |A|$.

$\Leftarrow$: Antag att $|\{1, \dots, m\}| < |A|$ $\forall m \in \mathbb{N}$, dvs $|\{1, \dots, m\}| \leq |A|$ och $\underbrace{\underbrace{|\{1, \dots, m\}|}_{= m} \neq |A|. \ \forall m}_{\text{Här står det att } A \text{ är oändlig.}}$

D.

Lemma:

$\mathbb{N}$ är oändlig.

Bevis:

Antag att $\mathbb{N}$ är ändlig, så det finns en bijektiv funktion $f: \mathbb{N} \to \{1, \dots, m\}$. Men $m+1 \notin \{1, \dots, m\}$ och $m+1 \in \mathbb{N}$, så f kan inte vara surjektiv (dvs inte bijektiv). Detta gäller för varje val av m, så $\mathbb{N}$ är oändlig $\square$

Sats:

A är oändlig $\iff$ $|A| \geq |\mathbb{N}|$.

Följd:

Om A är oändlig så är B oändlig för varje $B \supset A$.

Bevis:

Vi har att

$$|B| \geq |A| \geq |\mathbb{N}|$$

så enligt satsen ovan gäller att B är oändlig.

D

Lemma:

Om $|A| = |\mathbb{N}|$ så finns en delmängd $B \subset A$ så att $|B| = |A|$.

Bevis:

Antag att $f: \mathbb{N} \to A$ är bijektiv. Definiera $B = A \setminus \{f(1)\}$, och $g: \mathbb{N} \to B$ genom

$$g(n) = f(n+1).$$

Då är g bijektiv, dvs $|B| = |\mathbb{N}| = |A|$.

D.

Sats:

A är oändlig $\iff \exists\, B \subset A : |B| = |A|$.

Bevis:

$\Leftarrow$: Antag att $B \subset A$ med $|B|=|A|$ och att A är ändlig. Då gäller att $|B| < |A|$, vilket motsäger att $|B| = |A|$. Alltså är A oändlig.

$\Rightarrow$: Antag att A är oändlig, vilket betyder enligt satsen på sidan 37 att $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Detta betyder att det finns en injektiv funktion $g : \mathbb{N} \to A$. Låt $C = \mathrm{Im}(g) = g(\mathbb{N})$. Definiera $f : \mathbb{N} \to C$ genom

$$f(n) := g(n)$$

varvid f blir bijektiv. (ty g är injektiv, och varje funktion är surjektiv på dess bild). Enligt lemmat på sidan 37 så finns en mängd $D \subset C$ så att $|D| = |C|$, dvs att det finns en bijektiv funktion $h : C \to D$. Låt $E := C \setminus D$, varvid $E \neq \emptyset$ så är $B := A \setminus E \subset A$. Definiera $k : A \to B$ genom

$$k(a) = \begin{cases} a & \text{om } a \in A \setminus C \\ h(a) & \text{om } a \in C. \end{cases}$$

Då är k bijektiv, så $|A| = |B|$ och $B \subset A$. $\square$

Sats:

Antag att A är uppräknelig och att $B \subset A$ är oändlig. Då är B uppräknelig.

Detta ger att uppräkneliga mängder är de minsta av oändliga mängder. En oändlig mängd som vi inte har pratat om ännu är $\mathbb{R}$, de reella talen.

Sats:

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, dvs $\mathbb{R}$ är överuppräknelig.

Bevis:

Vi ska visa att $|[0,1]| \not\leq |\mathbb{N}|$.

Antag för en motsägelse att $|[0,1]| \leq |\mathbb{N}|$, dvs att det finns en uppräkning av elementen i $[0,1]$, säg att $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ är elementen i $[0,1]$.

Dessa tal har en decimalutveckling:

$$x_j := 0, x_j^1 x_j^2 x_j^3 x_j^4 \ldots$$

Definiera nu ett tal $c = 0,c^1c^2c^3c^4\ldots$ i $[0,1]$ genom

$$c^j = \begin{cases} 4 & \text{om } x_j^j = 6 \\ 6 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då finns c inte med i uppräkningen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, ty c skiljer sig från x_j i den j:te decimalen. Därför var inte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en uppräkning av $[0,1)$, så vi har fått en motsägelse.

D.

Definition (Kontinuum)

Vi definierar $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (ett kantigt c). "Talet" $\mathfrak{c}$ kallas för kontinuum.