Föreläsning 2

Vi ska börja med att studera de reella talen $\mathbb{R}$. De flesta tar de reella talen för givet. Vanligtvis så definierar man $\mathbb{R}$ som en ordnad kropp (eng. ordered field), dvs uppfyller vissa axiom.

Axiom för addition:

A1: Om $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}$ (sluten under addition)

A2: $x+y = y+x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (kommutativ)

A3: $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associativ) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

A4: $0+x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (Existens av nolla)

A5: Om $x \in \mathbb{R}$ så finns ett element $-x \in \mathbb{R}$ så att $x+(-x)=0$ (Existens av additiv invers)

Axiom för multiplikation:

M1: Om $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$ (sluten under multiplikation)

M2: $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (kommutativ)

M3: $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (associativ)

M4: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ så att $1 \neq 0$ och $1x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (Existens av etta)

M5: Om $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, då finns ett element $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ så att

$$x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Distributiva lagen:

$$x(y+z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Alla dessa axiom är självklara för oss, och vi räknar med dem (nästan) dagligen utan att ens tänka på dem. Axiomen A1–A5, M1–M5 och den distributiva lagen är de axiom en kropp ska uppfylla. Utifrån dessa axiom kan man visa flera andra egenskaper för reella reella tal.

- $x+y = x+z \Rightarrow y=z$
- $x+y = x \Rightarrow y=0$
- $x+y=0 \Rightarrow x=-y$
- $-(-x) = x$
- $x \neq 0$ och $xy = xz \Rightarrow y=z$
- $x \neq 0$ och $xy = x \Rightarrow y=1$
- $x \neq 0$ och $xy=1 \Rightarrow y = 1/x$
- $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1/x} = x$
- $0 \cdot x = 0$
- $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$
- $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
- $(-x)(-y) = xy$

Dessa punkter gäller för alla $x, y, z \in \mathbb{R}$, men man måste använda axiomen för att visa dem.

Men de reella talen ska även vara ordnade:

- Om $x, y \in \mathbb{R}$ så gäller precis ett av följande

$$x<y \quad , \quad x=y \quad , \quad y<x$$

- $x<y$ och $y<z \Rightarrow x<z$.
- $y<z \Rightarrow x+y<x+z \quad \forall$ [illegible] $z \in \mathbb{R}$.
- $x>0, y>0 \Rightarrow xy>0$.

Men hur visste man att det fanns en mängd $\mathbb{R}$ som uppfyller alla dessa axiom samt vara ordnade som ovan. Först och främst har de rationella talen $\mathbb{Q}$ "luckor", t.ex $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, så det visar sig att $\mathbb{R}$ är mer fullständigt än $\mathbb{Q}$, och detta kommer vi komma tillbaka mer senare. Problemet var att konstruera de reella tal som vi nu använder. Detta gjordes av två personer oberoende av varandra 1872:

- Dedekind använde sig av så kallade snitt (eng. cuts) och nu för tiden kallas de för Dedekind-snitt.

Definition:

Ett Dedekind-snitt i $\mathbb{Q}$ är ett par av delmängder (A,B) så att $A, B \subset \mathbb{Q}$ och så att

1) A och B bildar en partition av $\mathbb{Q}$, dvs
$A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ och $A \cap B = \emptyset$.

2) Om $a \in A$ och $b \in B \Rightarrow a < b$.

3) A innehåller inget största element.

Definition:

Ett reellt tal x är ett Dedekind-snitt i $\mathbb{Q}$, så $x = (A,B)$, där A och B är som i definitionen ovan.

Ex:

$$(A,B) = (\{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}, \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 1\})$$

är ett exempel på ett Dedekind-snitt i $\mathbb{Q}$.

Nu lämnar vi Dedekind-snitten. Nästa konstruktion var av Cantor:

- Cantor använde sig av så kallade Cauchy-följder, som vi kommer att studera längre fram i kursen, för att definiera reella tal. Utan att berätta exakt vad han gjorde, så gick konstruktionen ut på att definiera reella tal som en viss typ av ekvivalensklass av Cauchy-följder av rationella tal.

Obs:

Både metoden av Cantor och Dedekind gick ut på att utgå från $\mathbb{Q}$ och "fylla igen luckorna" i $\mathbb{Q}$ för att få ett talsystem som var mer fullständigt.

Vi ska nu gå över till mer egenskaper för reella tal. och kopplingar till rationella tal.

Låt oss börja att repetera absolutbelopp.

<u>Definition:</u> (Absolutbelopp)

<u>Absolutbeloppet</u> för ett reellt tal x, skrivet $|x|$, definieras genom

$$|x| := \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Absolutbeloppet uppfyller följande egenskaper:

<u>Sats:</u>

a) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x| = 0 \iff x = 0$

c) $|-x| = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

e) $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f) Låt $y \geq 0$, då gäller att $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

g) $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

h) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Triangelolikheten)

i) $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

j) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Låt oss visa några av dessa egenskaper.

Bevis:

f) $\Rightarrow$: Om $|x| \leq y$ så gäller att $x \leq y$ och $-x \leq y$ enligt definitionen av [illegible] absolutbelopp. Men $-x \leq y \Leftrightarrow x \geq -y$. Så vi får att

$$-y \leq x \leq y$$

$\Leftarrow$: Om $-y \leq x \leq y$ så är $\underset{\substack{\Updownarrow \\ y \geq -x}}{-y \leq x}$ och $x \leq y$, dvs $|x| \leq y$.

g) Låt $y = |x|$ i (f), så får vi resultatet.

h) Enligt (g) så har vi att

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Addera dessa olikheter:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Enligt (f) så får vi att

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

i) Använd triangelolikheten i (h) och induktion. Basfallet är klart, så antag att $|x_1 + \ldots + x_{n-1}| \leq |x_1| + \ldots + |x_{n-1}|$.
Vi ska visa att

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Vi har att

$$|(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n| \leq |x_1 + \dots + x_{n-1}| + |x_n|$$

enligt triangelolikheten i (4). Använder vi induktionsantagandet så får vi

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1 + \dots + x_{n-1}| + |x_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{antagandet}}}{\leq} |x_1| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n|.$$

$\square$.

Nu ska vi gå in på varför $\mathbb{R}$ har fullständighets-egenskapen (eller den så kallade supremumegenskapen) medan $\mathbb{Q}$ inte har denna egenskap. Vi börjar med en definition:

<u>Definition:</u> (Olika begränsningar för mängder).

Låt $S \subset \mathbb{R}$ vara icketom

a) Vi säger att S är <u>uppåt begränsad</u> om det finns ett tal $u \in \mathbb{R}$ så att $s \leq u \ \forall s \in S$. Varje sådant tal u kallas för en <u>övre gräns</u> för S

b) Vi säger att S är <u>nedåt begränsad</u> om det finns ett tal $u \in \mathbb{R}$ så att $u \leq s \quad \forall s \in S$.

Varje sådant tal u kallas för en <u>undre gräns</u> för S.

c) En mängd sägs vara <u>begränsad</u> om den är både uppåt begränsad och nedåt begränsad. En mängd som <u>inte</u> är begränsad kallas för <u>obegränsad</u>.

<u>Ex:</u>

Låt $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$. Då är 2 en övre gräns, och varje tal större än 2 är också en övre gräns. Däremot så har S <u>ingen</u> undre gräns, så S är alltså <u>inte</u> begränsad.

<u>Observation:</u>

Om u är en övre gräns till en mängd S, då är även $u+1, u+2, u+3, \ldots$ övre gränser till S. Vi har alltså <u>oändligt</u> många övre gränser.
Samma sak gäller för undre gränser, så om en mängd har en undre gräns så har den oändligt många undre gränser.

<u>Definition:</u> (Supremum och infimum)

Låt $S \subset \mathbb{R}$ vara en icke-tom mängd.

a) Om S är uppåt begränsad, så säger vi att $u \in \mathbb{R}$ är ett <u>supremum</u> (eller <u>minsta övre begränsning</u>) för S om den uppfyller att

- u är en övre gräns till S
- Om v också är en övre gräns till S, då är $u \leq v$.

Vi skriver $u = \sup S$

b) Om S är nedåt begränsad, så säger vi att $u \in \mathbb{R}$ är ett <u>infimum</u> (eller <u>största undre begränsning</u>) för S om den uppfyller att

- u är en undre gräns för S
- Om v också är en undre gräns till S, då är $v \leq u$.

Vi skriver $u = \inf S$

<u>Sats:</u>

Om $u = \sup S$ och $v = \sup S$, då gäller att $u = s$. Alltså supremum är unika.

<u>Bevis:</u>

Om $u < v$, då kan <u>inte</u> v vara ett supremum enligt andra punkten i definitionen. På samma sätt så kan <u>inte</u> $v < u$, för då kan <u>inte</u> u vara ett supremum. Alltså är $u = v$.

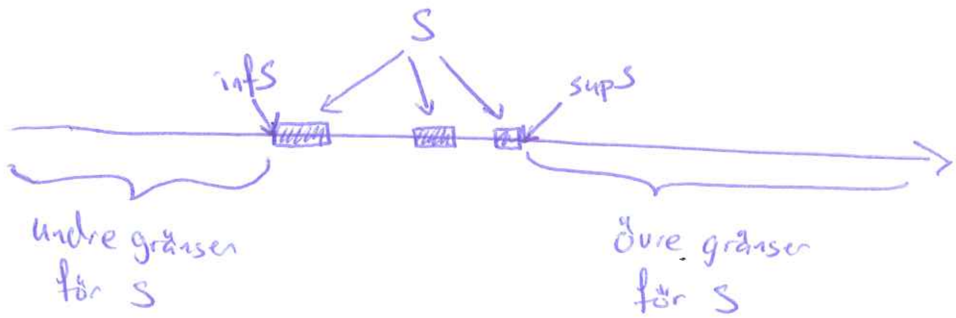
Anmärkning:

På samma sätt så är infimum unika. Detta gör beteckningen $\sup S$ och $\inf S$ väldefinierad.

Anmärkning:

Vi definierar $\sup S = \infty$ om S saknar övre gräns, men detta är inte nödvändigt, utan man kan även säga att $\sup S$ inte existerar. Man kan göra samma sak med inf, dvs att $\inf S = -\infty$ om S saknar undre gräns.

Bild för $\sup S$ och $\inf S$:



Observation:

Om S är en icke-tom delmängd till $\mathbb{R}$. Då har vi fyra möjligheter:

1) S har både ett supremum och ett infimum
2) S har ett supremum men $\inf S = -\infty$
3) S har ett infimum men $\sup S = \infty$
4) $\inf S = -\infty$ och $\sup S = \infty$

För att beräkna supremum och infimum för mängder är det bra att ha några resultat (satser) till hjälp.

Sats:

Antag att $S \subset \mathbb{R}$ är icke-tom. Då gäller att

$$u = \sup S$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \bullet \ s \leq u \quad \forall s \in S \\ \bullet \ \text{Om } v < u, \text{ då } \exists s' \in S \text{ så att } v < s'. \end{cases}$$

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att $u = \sup S$. Då är u en övre gräns till S, så $s \leq u \ \forall s \in S$. Låt $\varepsilon > 0$ vara sådan att

$$v + \varepsilon = u.$$

Låt $s' = v + \frac{\varepsilon}{2}$ varvid $v < s' < u$ och $s' \in S$.

$\Leftarrow$: Antag att $s \leq u \ \forall s \in S$, så u är en övre gräns för S. Vi måste se att detta u är supremum för S: Vi har ju även att om $v < u$, så finns det ett $s' \in S$ så att $v < s'$. Så om $u' < u$ skulle vara supremum för S så kan det inte finnas ett $s'' \in S$ så att $u' < s'' < u$. Alltså är $u = \sup S$.

$\square$

Sats:

Låt $S \subset \mathbb{R}$ vara en icke-tom mängd, och antag att u är en övre gräns för S. Då gäller att

$$u = \sup S$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_\varepsilon \in S \text{ så att } u - \varepsilon < s_\varepsilon.$$

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att $u = \sup S$ och låt $\varepsilon > 0$. Då gäller att $u - \varepsilon < u$, så $u - \varepsilon$ är inte en övre gräns för S. Därför måste det finnas ett $s_\varepsilon \in S$ så att $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

$\Leftarrow$: Antag att u är en övre gräns för S och antag att

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists s_\varepsilon \in S : u - \varepsilon < s_\varepsilon.$$

Om $v < u$, låt $\varepsilon := u - v > 0$. Därför finns det ett $s_\varepsilon \in S$ så att $\underbrace{v = u - \varepsilon}_{\Leftrightarrow \ \varepsilon = u - v} < s_\varepsilon$. Därför är v inte en övre gräns för S, så $u = \sup S$.

$\square$

Ex:

Antag att $S \subset \mathbb{R}$ är en ändlig mängd, säg att $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ där vi har ordnat mängden så att

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Då är $\inf S = a_1$ och $\sup S = a_n$.

I detta fall så är $\min S = \inf S$ och $\sup S = \max S$, och både infimum och supremum är element i S.

Ex:

Låt $S = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Då är 1 en övre gräns för S. Vi ska visa att $\sup S = 1$. Om $v < 1$ så finns ett $s' \in S$ så att $v < s'$.

Därför ger satsen på siden 12 att $\sup S = 1$.

På samma sätt så kan man visa att $\inf S = 0$. Detta ger att $\sup S \in S$ och $\inf S \in S$.

Däremot, om vi betraktar $S_1 = \{x : 0 < x < 1\}$, så är $\inf S_1 = 0$ och $\sup S_1 = 1$, men $\inf S_1 \notin S_1$ och $\sup S_1 \notin S_1$.

Men har varje uppåt begränsad mängd ett supremum?
Detta är innehållet i nästa sats:

Sats: (Supremumegenskapen för $\mathbb{R}$)
Varje icke-tom delmängd till $\mathbb{R}$ som har en övre gräns har också ett supremum i $\mathbb{R}$.
Alltså, om $S \subseteq \mathbb{R}$ är icke-tom och S har en övre gräns, då är $\sup S \in \mathbb{R}$.

Utifrån denna egenskap så kan man dra slutsatsen att $\mathbb{R}$ även har infimumegenskapen:

Om $S \subseteq \mathbb{R}$ är icketom och S har en undre gräns, då är

$$\inf S \in \mathbb{R}.$$

Vi ska nu visa en viktig, men kanske självklar egenskap. Nämligen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, men det är ganska klart att $\mathbb{N}$ inte har någon övre gräns.
Vi har ju att $\mathbb{N}$ är oändlig. Men hur visar man att $\mathbb{N}$ inte är begränsad i $\mathbb{R}$?

Satsen som detta visas kallas för

Arkimediska egenskapen:

Om $x \in \mathbb{R}$, då existerar det ett $n_x \in \mathbb{N}$ så att $x < n_x$.

Bevis:

Antag för en motsägelse att $n \leq x$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Detta betyder att x är en övre gräns för $\mathbb{N}$. Därför ger supremumegenskapen att $\sup \mathbb{N} = u \in \mathbb{R}$. Detta ger att $u - 1 < \sup \mathbb{N}$, så $u-1$ är inte en övre gräns för $\mathbb{N}$, så det finns ett $m \in \mathbb{N}$ så att $u - 1 < m. \Leftrightarrow u < m+1 \in \mathbb{N}$. Men eftersom u var en övre gräns för $\mathbb{N}$ så ger olikheten $u < m+1 \in \mathbb{N}$ en motsägelse. Därför är $\mathbb{N}$ inte begränsad i $\mathbb{R}$.

$\square$

Sats:

Låt $S = \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \}$. Då är $\inf S = 0$.

Bevis:

S är nedåt begränsad av 0 så S har ett infimum. Låt $v = \inf S$. Vi ska visa att $v = 0$. Det är klart att $v \geq 0$. Arkimediska egenskapen ger att för varje $\varepsilon > 0$ att det finns ett $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Detta ger att

$$0 \leq v \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ var godtycklig så får vi att $v = 0$.

$\square$

En annan konsekvens av att $\mathbb{R}$ har supremum-egenskapen är att man kan visa existensen av vissa reella tal. Vi har tidigare sett att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal, men nu ska vi visa att det finns ett positivt reellt tal x så att $x^2 = 2$. Detta visar att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Sats:

Det finns ett positivt reellt tal x så att $x^2=2$.

Bevis:

Låt $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\ x^2 < 2\}$. Det är klart att $S \neq \emptyset$ eftersom $1 \in S$. Det är även klart att S är uppåt begränsad av 2, så supremumegenskapen ger att $x := \sup S \in \mathbb{R}$ och att $x > 1$.

Vi ska visa att $x^2 = 2$ genom att visa att $x^2 \not< 2$ och $x^2 \not> 2$.

Antag att $x^2 < 2$, varvid vi ska se att detta motsäger att $x = \sup S$. Vi har att

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}}{\leq} x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{1}{n}(2x+1)$$

Vi ska hitta ett n så att

$$\frac{1}{n}(2x+1) < 2-x^2 \qquad (*).$$

Om $(*)$ gäller så får vi att

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x+1) < x^2+2-x^2 = 2$$

Eftersom $2-x^2>0$ enligt antagande så gäller att

$$\frac{2-x^2}{2x+1} > 0 \qquad (\text{kom ihåg att } x>1).$$

Nu ger Arkimediska egenskapen att det finns ett $n \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1} \iff \frac{1}{n}(2x+1) < 2-x^2$$

Alltså är $(*)$ uppfylld, så

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

Men detta betyder att $x+\frac{1}{n} \in S$, vilket motsäger att x är en övre gräns för S. Alltså är $x^2 \not< 2$.

Vi vill nu visa att $x^2 \not> 2$, så antag att $x^2>2$. Vi har att

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}$$

Om vi kan visa att

$$\frac{2x}{m} < x^2 - 2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{2x}{m} > 2 - x^2$$

för något $m \in \mathbb{N}$ så får vi att

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > x^2 - \frac{2x}{m} > x^2 + 2 - x^2 = 2$$

Eftersom $x^2 - 2 > 0$ och $x > 1$ så får vi att

$$\frac{x^2 - 2}{2x} > 0$$

Använder vi Arkimediska egenskapen så finns ett $m \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{1}{m} < \frac{x^2 - 2}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x}{m} < x^2 - 2$$

Alltså är $(*)$ uppfylld, så $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > 2$.
Om $s \in S$ så får vi att

$$s^2 < 2 < \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 \Rightarrow s < x - \frac{1}{m}$$

Detta ger att $x - \frac{1}{m}$ är en övre gräns för S, så detta motsäger att x är $\sup S$. Alltså är $x^2 \not> 2$.
Vi får att $x^2 = 2$.

$\square$

Nu vet vi att det finns åtminstone ett irrationellt tal, nämligen $\sqrt{2}$. Det gäller faktiskt att

$$|\{\text{irrationella tal}\}| > |\{\text{rationella tal}\}|,$$

dvs $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är överuppräknelig medan $\mathbb{Q}$ endast är uppräknelig. Trots att $\mathbb{Q}$ är "liten", så är $\mathbb{Q}$ tät i $\mathbb{R}$, dvs givet två reella tal så finns det ett rationellt tal som ligger mellan dessa reella tal. Det finns faktiskt oändligt många sådana rationella tal.

<u>Sats:</u> ($\mathbb{Q}$ är tät i $\mathbb{R}$).
Givet två reella tal x och y med $x<y$, då finns ett rationellt tal $r \in \mathbb{Q}$ så att

$$x < r < y.$$

<u>Bevis:</u>
Eftersom $x<y$ så är $y-x>0$. Nu ger Arkimediska egenskapen ett $n \in \mathbb{N}$ så att

$$\frac{1}{n} < y-x. \iff nx+1 < ny.$$

Arkimediska egenskapen ger nu ett $m \in \mathbb{N}$ så att

$$m-1 \leq n \cdot x < m.$$

Detta ger att

$$\left.\begin{array}{l} nx+1 < ny \\ m-1 \leq nx < m \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq nx+1 < ny.$$

$$\Rightarrow$$

$$nx < m < ny. \Leftrightarrow x < \frac{m}{n} < y.$$

Låt $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, varvid $x < r < y$.

$\square$

Vi har även ett liknande täthetsresultat för de irrationella talen:

<u>Sats:</u>

Om x och y är reella tal med $x<y$, då finns ett irrationellt tal z så att

$$x < z < y.$$

<u>Bevis:</u>

Antag att $x<y$. Dela med $\sqrt{2}$, varvid $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Använd nu att $\mathbb{Q}$ är tät i $\mathbb{R}$, dvs att det finns ett rationellt tal r så att

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicera med $\sqrt{2}$ varvid vi får att

$$x < \sqrt{2}\,r < y.$$

Låt nu $z = r\sqrt{2}$. Då är z irrationellt och uppfyller att

$$x < z < y.$$

D.

Metriska rum

Vi ska nu lämna de reella talen för ett tag och prata mer generella egenskaper för mängder med avståndsfunktioner. Vi börjar med en definition:

Definition: (Metriska rum)

Låt $M \neq \emptyset$ vara en icke-tom mängd. En metrik på M är en funktion $d : M \times M \to [0, \infty)$ som uppfyller

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (positivt definit)

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrisk)

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Triangelolikheten)

för alla $x, y, z \in M$. En mängd M med en metrik d kallas för ett metriskt rum. Vi skriver ibland (M,d).

Anmärkning:

Elementen i ett metriskt rum kallar vi för punkter.

Anmärkning:

En metrik är en avståndsfunktion. Därför kan man tolka de olika punkterna i termer av avstånd:

1/ $d(x,y)=0 \iff x=y$. Om man ska mäta avståndet från en punkt till sig själv så ska detta ha avstånd 0.

2/ $d(x,y)=d(y,x)$. Det ska inte vara någon skillnad om vi mäter avståndet från x till y eller från y till x.

3/. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$. Om vi ska mäta avståndet från x till y, så ska det vara längre avstånd om vi går via en annan punkt z.

4/ $d: M \times M \to [0,\infty)$. Avståndet ska alltid vara positivt.

Låt oss kolla på några exempel.

Ex:

$\mathbb{R}$ är ett metriskt rum med metriken $d(x,y) = |x-y|$.
Låt oss visa detta:

1) Eftersom $|\cdot|$ är positiv så är $d(x,y) \geq 0$.

2) Positivt definit: Antag att $d(x,y)=0$, dvs $|x-y|=0$
Men då är $x-y=0$ eller $-(x-y)=0$.
Dessa ekvationer är ekvivalenta med $x=y$.
Å andra sidan, om $x=y$ så är

$$d(x,y) = d(x,x) = |x-x| = 0.$$

3) Symmetrisk: $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |-1|\,|y-x| = |y-x| = d(y,x)$

4) Triangelolikheten:

$$d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \underset{\uparrow}{\leq} |x-z| + |z-y| =$$

Triangelolikheten för $|\cdot|$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

Alltså är d en metrik på $\mathbb{R}$.

Ex:

$\mathbb{R}^n$ blir ett metriskt rum med metriken

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$$

för $x=(x_1,\ldots,x_n)$ och $y=(y_1,\ldots,y_n)$

Ex:

$\mathbb{R}^n$ är ett metriskt rum med metriken

$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

Ex:

Låt $M \neq \emptyset$ vara en mängd. Den diskreta metriken på M definieras av

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x=y \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Låt oss se att detta är en metrik.
Först och främst är $d(x,y) \geq 0$.

- Positivt definit: Antag att $d(x,y)=0$, då är $x=y$ per definition av d.
  Om $x=y$, då är $d(x,y)=0$, också enligt definitionen av d.
- Symmetrisk: $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{om } x=y \\ 1 & \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{om } y=x \\ 1 & \text{annars} \end{cases} = d(y,x)$

Triangelolikheten: Om $d(x,y) = 1$ så är $d(x,z) = \begin{cases} 0 & \text{om } x=z \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$

Om $x = z$ så är $d(x,z)=0$, men då är $d(z,y) = 1$, ty $y \neq z$, för annars är

$$x = z = y$$

som motsäger att $d(x,y)=1$. Detta ger att

$$\underbrace{d(x,y)}_{1} \leq \underbrace{d(x,z)}_{0} + \underbrace{d(z,y)}_{1}.$$

Om $x \neq z$ då är $d(x,z) = 1$, så då spelar det ingen roll om $y = z$ eller $y \neq z$, för vi får att

$$\underbrace{d(x,y)}_{=1} \leq \underbrace{d(x,z)}_{1} + \underbrace{d(z,y)}_{0 \text{ el. } 1}.$$

Om $d(x,y)=0$. Då gäller att

$$\underbrace{d(x,y)}_{=0} \leq d(x,z) + d(z,y)$$

för alla $z \in M$.

Detta visar att även triangelolikheten är uppfylld, så d är en metrik på M.

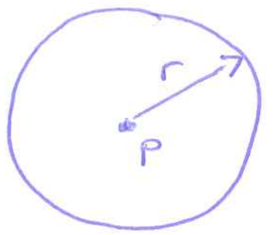
Definition: ((Öppen) boll)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. **Bollen** runt $p\in M$ med radie $r>0$ skrivs $B(p,r)$ och är mängden

$$B(p,r)=\{q\in M : d(p,q)<r\}.$$

Detta kallas även för en öppen boll.

Bild:



$B(p,r)$.

Anmärkning:

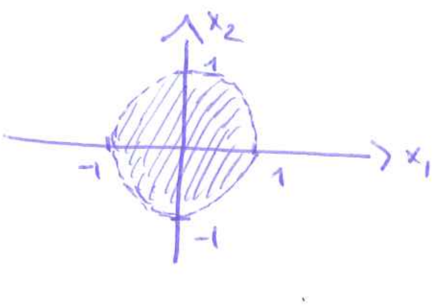
Hur bollen ser ut beror förstås på metriken d.

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}^2$ med metrik $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{2}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$.

Vi ska rita

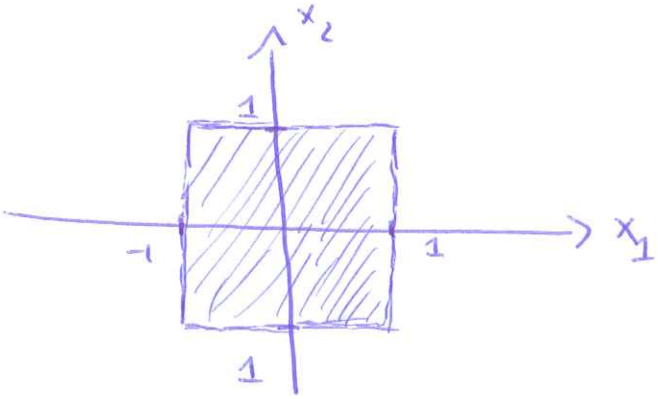
$$\begin{aligned}B(0,1)&=\{x\in\mathbb{R}^2 : d(x,0)<1\}=\\&=\{x\in\mathbb{R}^2 : \left(\sum_{k=1}^{2}x_k^2\right)^{1/2}<1\}\\&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : (x_1^2+x_2^2)^{1/2}<1\}\end{aligned}$$



Ex:

Betrakta $\mathbb{R}^2$ med metrik $d(x,y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$.
Vi ska rita

$$B(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d(x,0) < 1 \} =$$
$$= \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max_{i=1,2} |x_i| < 1 \}.$$



Definition: (Slutna bollen)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. Den slutna bollen runt $p \in M$ med radie $r \geq 0$ är mängden

$$\overline{B}(p,r) = \{ q \in M : d(p,q) \leq r \}.$$

Anmärkning:

I den slutna bollen så tar vi även med randpunkterna. Detta gjorde vi inte i den öppna bollen.

Ex:

Låt (M,d) vara det diskreta rummet för någon mängd $M \neq \emptyset$.

Låt $r=0$. Då gäller att

$$\overline{B}(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq 0\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ty } d(p,q)\geq 0.}}{=} \{q \in M : d(p,q)=0\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ d \text{ positivt} \\ \text{definit}}}{=} \{q \in M : p=q\} = \{p\}.$$

Detta gäller faktiskt i alla metriska rum.

Antag nu att $0<r<1$. Då gäller att

$$\overline{B}(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eftersom } r<1 \\ \text{och att vi} \\ \text{befinner oss i} \\ \text{ett diskret metriskt rum}}}{=} \{q \in M : d(p,q)=0\} = \{p\}.$$

Man kan även se att

$$B(p,r) = \{p\} \quad (0<r<1)$$

på samma sätt som för $\overline{B}(p,r)$.

Antag nu att $r=1$. Då gäller att

$$\overline{B}(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq 1\} = M \quad \left(d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & \text{annars.} \end{cases} \right)$$

Vidare så är

$$B(p,r) = \{q \in M : d(p,q) < 1\} = \{p\}$$

som ovan.

Slutligen, antag att $r > 1$. Då är

$$\bar{B}(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\}.$$

Men eftersom d antar endast värden 0 eller 1 så är $d(p,q) \leq r$ uppfyllt för alla p och q. Därför är

$$\bar{B}(p,r) = M.$$

På samma sätt kan man se att $B(p,r) = M$.
Vi har alltså:

- $\bar{B}(p,r) = \{p\}$, $0 \leq r < 1$
- $\bar{B}(p,r) = M$, $r \geq 1$
- $B(p,r) = \{p\}$, $0 < r \leq 1$
- $B(p,r) = M$, $r > 1$.

Definition: (Inre punkt, omgivning)

Låt M vara ett metriskt rum och låt $A \subseteq M$ vara en mängd. Vi säger att en punkt $p \in A$ är en inre punkt i A om det finns en boll runt p som ligger helt i A. I så fall kallar vi A för en omgivning till p. Mängden av inre punkter skriver vi som $\mathrm{Int}(A)$.

Obs:

$\mathrm{Int}(A) \subseteq A$.

Definition: (Öppen mängd).

En mängd A i ett metriskt rum är <u>öppen</u> om varje punkt i A är en inre punkt, dvs $\mathrm{Int}(A) = A$. Detta betyder att

$$\forall p \in A \ \exists r > 0 : B(p,r) \subset A.$$

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med metriken $d(x,y) = |x-y|$. Detta är den så kallade Euklidiska metriken. Då gäller att

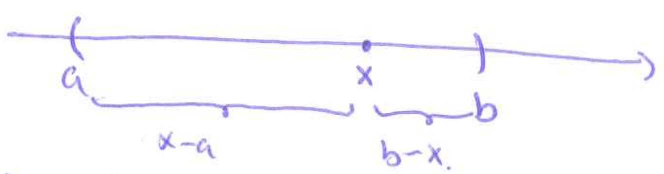
a) $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ (Gör detaljerna!)

b) $B(a,b) = (a-b, a+b)$

Så varje öppen boll är ett öppet begränsat intervall.

Ex:

Varje öppet intervall (a,b) i $\mathbb{R}$ är en öppen mängd. Låt oss visa detta. Tag $x \in (a,b)$. Vi måste hitta en boll kring x som ligger helt inne i (a,b). Men om $x \in (a,b)$ så är $a < x < b$. Låt $r = \min\{x-a, b-x\}$



Då är $B(x,r) \subset (a,b)$, så (a,b) är en öppen mängd.

Ex:

Ett slutet intervall $[a,b]$ är inte öppen.
Låt oss visa detta. Låt $x=a$. ~~[illegible]~~
Vi ska visa att

$$\forall r>0\ \exists y\in B(x,r) : y\notin [a,b]$$

Så tag godtycklig radie $r>0$. Låt $y=a-\frac{r}{2}$. Då är $y\in B(a,r)$, ty $|a-(a-\frac{r}{2})|=|\frac{r}{2}|<r$. Men $y\notin [a,b]$, eftersom att $x\in[a,b]$ uppfyller att $a\le x\le b$, ~~men~~ och $a-\frac{r}{2}<a$.

Ex:

Man kan även visa att (a,∞) och $(-\infty,b)$ är öppna mängder. Men $[a,\infty)$ och $(-\infty,b]$ är inte öppna.

Ex:

Låt M vara ett diskret metriskt rum, och låt $A\subseteq M$ vara en mängd. Om $p\in A$ då är p en inre punkt ty vi kan välja bollen $\underset{\{p\}}{\underset{\shortparallel}{B(p,1)}}\subset A$. Alltså är varje mängd i ett diskret metriskt rum öppen.

Sats:

Varje öppen boll i ett metriskt rum (M,d) är en öppen mängd.

Bevis:

Tag $x \in M$ och betrakta $B(x,r)$. Låt $y \in B(x,r)$. Vi vill hitta en boll kring y som ligger helt inne i $B(x,r)$. Eftersom $x, y \in B(x,r)$ så är $d(x,y) < r$. Detta ger att

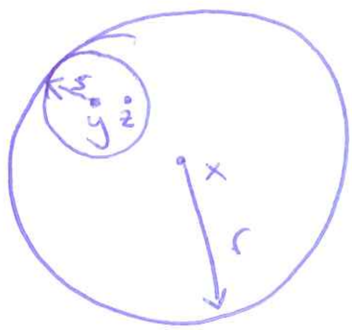
$$s := r - d(x,y) > 0.$$

Om $z \in B(y,s)$, dvs $d(y,z) < s$, då gäller att

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ s = r - d(x,y)}}{=} d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$

Detta ger att $z \in B(x,r)$. Alltså $B(y,s) \subseteq B(x,r)$.



$\square$

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum, och låt $A \subseteq M$ vara en mängd. Då är $\mathrm{Int}(A)$ en öppen mängd i M, dvs $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$

Bevis:

Låt $x \in \mathrm{Int}(A)$. Då finns det per definition ett $r>0$ så att $B(x,r) \subseteq A$. Vi ska visa att $B(x,r) \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

Eftersom $B(x,r)$ är en öppen mängd, så finns det för varje $y \in B(x,r)$ en boll $B(y,s)$ som ligger i $B(x,r)$, dvs $B(y,s) \subseteq B(x,r) \subseteq A$. Därför är varje $y \in B(x,r)$ ett element i $\mathrm{Int}(A)$, så $B(x,r) \subseteq \mathrm{Int}(A)$.

$\square$

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ vara en samling av öppna mängder. Då är $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ en öppen mängd.

Bevis:

Tag $x \in U := \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Då är $x \in U_\alpha$ för något $\alpha \in A$. Eftersom U_α är öppen så finns det en boll $B(x,r) \subseteq U_\alpha$. Men då är $B(x,r) \subseteq U$. Detta gäller för varje val av $x \in U$, så U är öppen.

$\square$

<u>Sats:</u>

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. En delmängd $U \subseteq M$ är öppen om och endast om U är en union av öppna bollar i M.

<u>Bevis:</u>

$\Leftarrow$: Eftersom en boll är öppen och unionen av bollar är öppen så följer resultatet.

$\Rightarrow$: Låt $U \subseteq M$ vara öppen och låt $x \in U$. Då finns ett r_x så att $B(x,r_x) \subseteq U$. Detta ger att

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x,r_x).$$

$\square$.

<u>Definition:</u> (Begränsad)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. Vi säger att $A \subseteq M$ är <u>begränsad</u> om det finns en boll som omfattar A, dvs $\forall x \in A \ \exists r_x : B(x,r_x) \supseteq A$.

Ex:

Låt M vara ett diskret metriskt rum, och låt A vara en mängd. Då är A begränsad, ty varje $r > 1$ ger att

$$B(x,r) = M \supseteq A.$$

för alla val av x.

Ex:

Varje intervall (a,b) är begränsat i $\mathbb{R}$, ty eftersom

$$(a,b) \subseteq B(x, b-a) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Definition: (Sluten mängd)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. Vi säger att $S \subseteq M$ är sluten om S^c är en öppen mängd.

Ex:

Låt M vara ett metriskt rum. Då är M och $\emptyset$ både öppna och slutna mängder.

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidiska metrik. Betrakta mängden $[a,b]$. Då är $[a,b]$ sluten, ty

$$[a,b]^c = \underbrace{(-\infty,a)}_{\text{öppen}} \cup \underbrace{(b,\infty)}_{\text{öppen}}$$

är öppen.

En godtycklig union av öppna mängder är en öppen mängd, men hur är det med slutna mängder?

Q: Är unionen av slutna mängder en sluten mängd?

För att besvara denna fråga fullt ut så behöver vi en sats om snitt av öppna mängder.

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. Ändliga snitt av öppna mängder är en öppen mängd, dvs om $U_1, \ldots, U_m$ är öppna mängder då är $\bigcap_{j=1}^{m} U_j$ en öppen mängd.

Bevis:

Låt $U = U_1 \cap \ldots \cap U_m$, där U_j är öppna mängder. Låt $y \in U$, då är $y \in U_j$ för alla j. Eftersom U_j är öppen så finns ett $r_j > 0$ så att $B(y, r_j) \subseteq U_j$ för alla j.

Låt nu $r = \min\{r_1, \ldots, r_m\}$. Då är $r > 0$ och $B(y,r) \subseteq U_j$ för alla $j = 1, \ldots, m$. Detta ger att $B(y,r) \subseteq U$, så U är öppen.

$\square$

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidiskt metrik. Då är

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B(0, 1/j) = \{0\}.$$

Men $\{0\}$ är inte en öppen mängd. Alltså är antagandet i förra satsen att vi endast har ett ändligt antal öppna mängder är nödvändigt.

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum.

1/ Om $S_1, \ldots, S_m$ är slutna mängder, då är $\bigcup_{j=1}^{m} S_j$ sluten

2/ Om $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ är slutna mängder, då är $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ sluten.

Bevis:

Kom ihåg att $(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$ och $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$.

1/ Vi har att $\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{m} S_j^c$. Eftersom S_j^c är öppna per definition så följer det att $\bigcap_{j=1}^{m} S_j^c$ är öppen enligt satsen på sidan 38, så $\bigcup_{j=1}^{m} S_j$ är sluten.

2/ Vi har att $\left(\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha^c$. Nu får vi enligt satsen på sidan 35 att $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha^c$ är öppen, så $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ är sluten.

$\square$

Följd:

Om $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ är slutna mängder i ett metriskt rum M, då är $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ inte nödvändigtvis ~~är~~ sluten.

Bevis:

$\left(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha^c$. Men S_α^c är öppna, så vi får enligt exemplet på siden 39 att $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha^c$ ~~är~~ inte behöver vara öppen.

$\square$.

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik. Då är $[a,b)$ varken öppen eller sluten. Den är inte öppen eftersom $x=a$ inte har en boll kring sig som ligger helt i $[a,b)$.
Å andra siden är $[a,b)$ inte sluten heller, ty

$$[a,b)^c = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{öppen}} \cup \underbrace{[b,\infty)}_{\text{inte öppen}}$$

är inte öppen.

Definition: (Hopningspunkt)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum, och låt $A \subseteq M$ och låt p vara en punkt i M. Vi säger att p är en hopningspunkt (eng. limit point) till A, om det i varje boll runt p finns någon punkt ur A som skild från p.

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $A \subseteq M$. Om p är en hopningspunkt till A, då innehåller varje boll kring p oändligt många punkter ur A.

Bevis:

Antag, för en motsägelse, att det finns en boll kring p, $B(p,s)$, som endast innehåller ett ändligt antal punkter från A.

Säg att $q_1, \ldots, q_n$ är dessa punkter i $B(p,r) \cap A$, och att alla är distinkta från p. Låt $r = \min_{1 \leq j \leq n} d(p, q_j) > 0$.

Betrakta bollen $B(p,r)$. Då har $B(p,r)$ ingen punkt q från A med $q \neq p$. Därför är p ingen hopningspunkt, och detta motsäger antagandet.

$\square$

Följd:

En ändlig mängd har inga hopningspunkter.

Bevis:

Om den ändliga mängden skulle ha en hopningspunkt, då ger föregående sats att varje omgivning till denna hopningspunkt skulle ha ett oändligist antal punkter från den ändliga mängden. Men vi kan inte ha ett oändligt antal punkter från en ändlig mängd. Därför kan inte den ändliga mängden ha en hopningspunkt.

Ex: $\square$.

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik. Då är $I=(0,1)$ en delmängd till $\mathbb{R}$. Vilka är I:s hopningspunkter.

1) Om $x<0$ eller $y>1$ så är ~~x el~~ y inte en hopningspunkt till I. Bollarna $B(x, 0-x)\cap I=\emptyset$ och $B(y, y-1)\cap I=\emptyset$, så de innehåller inte oändligst antal punkter av I.

2) Om $x\in I$ så är x en hopningspunkt till I.

3) Om $x=0$ eller $y=1$ så är x och y hopningspunkter till I.

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik. Då saknar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ hopningspunkter.

Definition: (Slutna höljet)

Antag att (M, d) är ett metriskt rum, och antag att $S \subseteq M$ är en mängd. Vi definierar

$$S' := \{\text{hopningspunkter till } S\}.$$

Vidare så definierar vi det slutna hölje till S genom

$$\overline{S} := S \cup S'.$$

Hur slutna mängder och slutna höljet hänger ihop formuleller vi i nästa sats:

Sats:

Låt (M, d) vara ett metriskt rum och låt $S \subseteq M$ vara en mängd. Då gäller följande:

a) S är sluten

$\Longleftrightarrow$

b) $S' \subseteq S$

$\Longleftrightarrow$

c) $S = \overline{S}$.

Bevis:

Vi ska börja med (a) $\Rightarrow$ (b). Antag att S är sluten, dvs att S^c är öppen. Tag en punkt $p \notin S$. Eftersom S^c är öppen så finns ett $r>0$ och en boll $B(p,r) \subseteq S^c$, dvs $B(p,r) \cap S = \emptyset$. Alltså $p \notin S'$, så p måste ligga i S för att det ska vara en hopningspunkt, dvs $S' \subseteq S$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Antag att $S' \subseteq S$, dvs $S^c \subseteq (S')^c$. Om $p \in S^c$, då är $p \notin S'$, eftersom $p \in (S')^c$. Det följer att det finns ett $r>0$ och en boll $B(p,r) \cap S = \emptyset$, eftersom p inte är en hopningspunkt till S. Men $B(p,r) \cap S = \emptyset$ betyder att $B(p,r) \subset S^c$, så S^c är öppen, vilket betyder att S är sluten. Detta avslutar ekvivalensen (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): Antag att $S' \subseteq S$. Men detta ger att

$$\overline{S} = S \cup S' \underset{S' \subseteq S}{=} S$$

(c) $\Rightarrow$ (b): Antag att $\overline{S} = S \cup S' = S$. Detta ger att $S' \subseteq S$ eller att $S' = \emptyset$, men detta betyder att $S' \subseteq S$, som avslutar att (b) $\Leftrightarrow$ (c).

$\square$

Följd:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $S \subseteq M$. Då gäller att $\bar{S}$ är den minsta slutna mängd som innehåller S.

Bevis:

Vi ska börja med att visa att $\bar{S} = S \cup S'$ är sluten.

Tag $p \notin \bar{S}$, varvid $p \notin S$ eller $p \notin S'$. Detta betyder att det finns ett $r > 0$ så att $B(p,r) \cap S = \emptyset$, så $B(p,r) \subset (\bar{S})^c$, dvs att $(\bar{S})^c$ är öppen, vilket betyder att $\bar{S}$ är sluten.

Påst: $\forall T \subseteq M$ sluten så att $S \subset T$, då gäller att $\bar{S} \subset T$.

Om vi visar detta påstående så är vi klar, ty om vi tar större slutna mängder än S, då är $\bar{S} \subset T$, dvs $\bar{S}$ innehåller ingen större sluten mängd än S.

Låt oss visa påståendet. Antag att T är sluten med $T \supset S$. Då gäller att $T \supset T'$, enligt föregående sats, så $T \supset S'$. Men eftersom $T \supset S$ så kommer $T \supset \bar{S} = S \cup S'$.

$\square$

Sats:

Låt $S \subseteq \mathbb{R}$ vara icke-tom och uppåt begränsad. Låt $y = \sup S$. Då är $y \in \overline{S}$. Alltså, om S är sluten så är $y \in S$.

Bevis:

Om $y \in S$ då är $y \in \overline{S} = S \cup S'$. Så antag att $y \notin S$.
För varje $h > 0$ så finns det en punkt $x \in S$ så att

$$y - h < x < y,$$

ty annars så skulle $y-h$ vara en övre gräns för S.
Detta betyder att vi har hittat en punkt ~~x~~ y ur S som ligger i en boll .
Detta ger att y är en hopningspunkt, så $y \in \overline{S} = S \cup S'$.

Om S är sluten så ger föregående sats att $S = \overline{S}$, så $y \in S$.

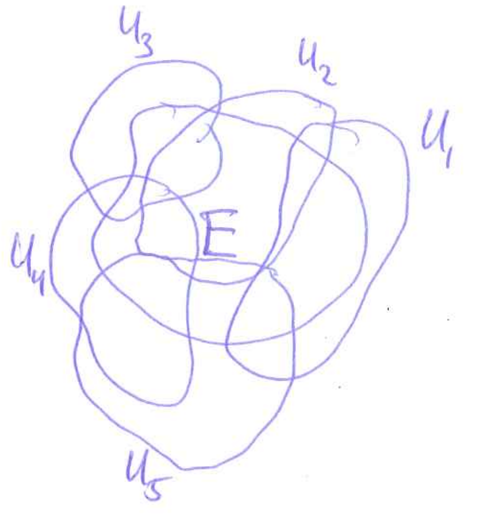
$\square$

Definition: (Öppen övertäckning).

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $E \subseteq M$ vara en mängd. En öppen övertäckning av E är en samling $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ av öppna delmängder till M så att

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha .$$

Bild:



U_j öppna mängder.

Då är $E \subset \bigcup_{j=1}^{5} U_j$, så $\{U_j\}_{j=1}^{5}$ är en öppen övertäckning av E.

Definition: (Delövertäckning)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ vara en öppen övertäckning av en mängd E. En delövertäckning av E är en delsamling av $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ som fortfarande täcker E. Detta betyder att det finns en delmängd $B \subset A$ så att $\{U_\alpha\}_{\alpha\in B}$ är en öppen övertäckning för E.

Definition: (Kompakt).

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. En mängd $K \subseteq M$ sägs vara kompakt om varje öppen övertäckning av K har en ändlig delövertäckning.

Kompakthet är viktigt inom analys. Vi kommer återkomma flera gånger till kompakthet, bland annat då vi pratar om följder och även då vi pratar om kontinuitet. Men det finns flera andra tillämpningar och konsekvenser av kompakthet. Vi ska kolla på några av dessa här.

Ex:

Antag att K är en ändlig delmängd i ett metriskt rum M. Vi kan anta att $K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Låt U_j vara en öppen mängd som åtminstone innehåller a_j. Då blir $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ en ändlig öppen övertäckning av K, dvs

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$$

Alltså är K kompakt.

$\square$

Ex:

Betrakta mängden $S=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$. Vi ska visa att S inte är kompakt.

Låt, för $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, U_n vara mängden

$$U_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n-1}\right)$$

Vi ska visa två saker:

1) $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ är en öppen övertäckning av S.

2) Övertäckningen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ har ingen ändlig delövertäckning, så S är inte kompakt.

Bevis 1.

Vi ska visa att om $x\in S$ så finns det ett $j=2,3,\ldots$ så att $x\in U_j$. Om $x\in S$ så är $x=\frac{1}{n}$ för något $n\in\mathbb{N}$. Men $U_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1},\frac{2}{n}\right)$ och

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}$$

så för $j=n+1\geq 2$ så är $x\in U_j$.

Bevis 2:

Antag att $U_{k_1},\ldots,U_{k_n}$ är en ändlig delövertäckning med $2\leq k_1<k_2<\ldots<k_n$. Då gäller att $\frac{1}{k_n}\in S$ men

$$\frac{1}{k_n}\notin\bigcup_{j=1}^{n}U_{k_j}$$

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum, och låt $K \subseteq M$ vara en mängd. Då gäller att

$$K \text{ kompakt} \Rightarrow K \text{ sluten och begränsad.}$$

Bevis:

Antag att K inte är sluten och begränsad. Vi ska visa att då är K inte kompakt.

Antag först att K inte är begränsad, vilket betyder att K inte omfattas av någon boll. Fixera en punkt $p \in K$. Låt $U_n = B(p,n)$ för $n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Då är

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

så $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ är en öppen övertäckning. Observera att om $k < l$ så är $U_k \subset U_l$, dvs om $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ så är $U_{k_1} \subseteq U_{k_2} \subset \ldots \subset U_{k_n}$ och

$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{k_j} = U_{k_n} = B(p, k_n)$$

Men $\{U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}\}$ är inte en ändlig övertäckning av K, eftersom K kan inte omfattas av en boll.

Alltså är inte K kompakt.

Låt oss nu anta att K inte är sluten, och vi ska då visa att K inte kan vara kompakt.

Att K inte är sluten betyder att K^c inte är öppen, dvs det finns en punkt $p \in K^c$ så att om B är en boll kring p så finns det en punkt $q \in B \cap K$.

För $n \in \mathbb{N}$ definiera U_n genom

$$U_n = (\overline{B}(p, \tfrac{1}{n}))^c = \{x : d(x,p) > \tfrac{1}{n}\}.$$

Eftersom den slutna bollen är en sluten mängd så är U_n en öppen mängd. Vi har att

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{p\}^c$$

och eftersom $p \notin K$ så är $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en öppen övertäckning av K. Observera att om $k < l$ så är $U_k \subset U_l$ så precis som första delen av beviset får vi att om $k_1 < \dots < k_n$ att

$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{k_j} = U_{k_n}.$$

Om vi kan visa att K inte ligger i någon U_j så kan inte K ha någon ändlig delövertäckning från $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Vi ska visa att $U_j^c \cap K$ innehåller åtminstone en punkt. Vi har att

$$U_j^c = ((\overline{B}(p, \tfrac{1}{j}))^c)^c = \overline{B}(p, \tfrac{1}{j})$$

Detta ger att

$$U_j^c \cap K = \bar{B}(p,\tfrac{1}{j}) \cap K \supset B(p,\tfrac{1}{j}) \cap K \neq \emptyset$$

ty K är inte sluten. Därför är inte K kompakt.

$\square$.

<u>Ex:</u>

Låt M vara ett diskret metriskt rum. Varje mängd i M är öppen, sluten samt begränsad, så speciellt är alla mängder slutna och begränsade. Men alla mängder i M är <u>inte</u> kompakta, utan följande gäller:

En mängd $S \subseteq M$ är kompakt

$\Longleftrightarrow$

S är ändlig.

$\Leftarrow$: Gäller för alla metriska rum.

$\Rightarrow$: Antag att S är kompakt. Eftersom

$$B(p,r) = \{p\} \quad \text{om } 0<r\leq 1$$

och

$$B(p,r) = M \quad \text{om } r>1$$

så måste S kunna täckas med bollar av radie $0<r\leq 1$. Men då måste S vara ändlig.

$\square$

Omvändningen gäller också om vi befinner oss i $\mathbb{R}^n$:

<u>Sats:</u> (Heine-Borels sats)

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt

$\Longleftrightarrow$

K är sluten och begränsad.

Man kan använda sig av Heine-Borels sats för att ganska lätt avgöra om mängder i $\mathbb{R}^n$ är kompakta.

<u>Ex:</u>

- $[-2,2)$ är ej sluten $\Rightarrow$ ej kompakt.
- $[3,6]$ är kompakt, ty sluten och begränsad.
- $(-\infty, 1)$ är ej begränsad $\Rightarrow$ ej kompakt.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ är sluten och begränsad, så den är kompakt.

Definition: (Sammanhängande)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. En mängd $S \subseteq M$ är icke-sammanhängande om det finns mängder S_1, S_2, U_1 och U_2 så att

1) $S = S_1 \cup S_2$
2) U_1, U_2 är öppna och disjunkta, dvs $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
3) $S_1 \subseteq U_1$ och $S_2 \subseteq U_2$.

Om S inte är icke-sammanhängande så säger vi att S är sammanhängande.

Ex:

Betrakta $S = \{1,2\} \subseteq \mathbb{R}$. Då är S icke-sammanhängande ty

$$\{1,2\} = \underbrace{\{1\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{2\}}_{S_2}$$

och $S_1 \subset B(1, 1/2)$ och $S_2 \subset B(2, 1/2)$ uppfyller att $B(1, 1/2) \cap B(2, 1/2) = \emptyset$.

Ex:

Låt M vara ett diskret metriskt rum. Då är en icke-tom mängd $S \subseteq M$ sammanhängande om och endast om $S = \{p\}$, dvs innehåller endast en punkt.

Sats:

$E \subseteq \mathbb{R}$ är sammanhängande

$\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in E$ och $x < z < y \Rightarrow z \in E$.

Bevis:

$\Leftarrow$: Antag att det finns $x, y \in E$ och något $z \in (x, y)$ så att $z \notin E$. Vi ska visa att E är icke-sammanhängande.

Låt $A = E \cap (-\infty, z)$ och $B = E \cap (z, \infty)$. Då är

1) $E = A \cup B$.

2) $A \subset (-\infty, z)$ och $B \subset (z, \infty)$ och $(-\infty, z) \cap (z, \infty) = \emptyset$.

Alltså är E icke-sammanhängande.

$\Rightarrow$: Antag att E är icke-sammanhängande. Vi ska hitta $x, y \in E$ och $z \in (x,y)$ med $z \notin E$. Eftersom E är icke-sammanhängande så finns det mängder A och B

med $E = A \cup B$. Tag $x \in A$ och $y \in B$, varvid vi kan anta att $x < y$, ty A och B är disjunkta. Låt

$$z := \sup(A \cap [x,y])$$

Eftersom $A \cap [x,y]$ är begränsad så kommer $z \in \overline{A}$ varvid $z \notin B$. Speciellt gäller att $x \leq z < y$. Om $z \notin A$ då gäller att $x < z < y$ och $z \notin E = A \cup B$.
Men om $z \in A$, då är $z \notin \overline{B}$, varvid det finns z_1 med $z < z_1 < y$ och $z_1 \notin B$. Detta ger att $x < z_1 < y$ och $z_1 \notin E$.

$\square$

<u>Följd:</u>

Låt $I \subset \mathbb{R}$. Då gäller att

I är sammanhängande $\Leftrightarrow$ I är ett intervall.

<u>Sats:</u>

Antag att $U \subseteq \mathbb{R}$. Då gäller att

U öppen $\Leftrightarrow$ U uppräknelig union av disjunkta öppna intervall (sammanhängande mängder).